

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ

10. lipnja 2013.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati i uvid u kolokvije: **srijeda, 12. lipnja 2013. u 10 sati.**

ZADATAK 1

1

(20 bodova.) Neka je $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

- Napišite definiciju **kubične splajn** interpolacije za funkciju f na zadanoj mreži. Koje uvjete **interpolacije** i **glatkoće** zadovoljava ova interpolacija?
- Ukratko komentirajte je li kubična splajn interpolacija **lokalna** ili ne.
- Uz koje uvjete na mreže čvorova dobivamo **uniformnu** konvergenciju kubične splajn interpolacije prema funkciji f ? Kojeg **reda** je konvergencija i o čemu to ovisi?

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 2

10. lipnja 2013.

(15 + 5 = 20 bodova.)

(a) Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x & 0 \\ 0 & x & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

gdje je x realni parametar. Nađite sve vrijednosti x za koje je $A(x)$ pozitivno definitna matrica i izračunajte pripadnu faktorizaciju Choleskog matrice $A(x)$.

(b) Napišite iskaz teorema o egzistenciji i jedinstvenosti LR faktorizacije kvadratne matrice A , reda n . Ukratko komentirajte što se događa ako bitni uvjeti teorema nisu ispunjeni. Kako se iz LR faktorizacije bez pivotiranja dobije rješenje linearnog sustava $Ax = b$?

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 3

10. lipnja 2013.

(15 bodova.) Funkciju

$$f(x) = e^{-x} \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

interpoliramo polinomom u čvorovima $x_0 = -1$, $x_1 = -1/2$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 1$.

- (i) Izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik ovog interpolacijskog polinoma.
- (ii) Nađite ocjenu uniformne pogreške ove interpolacije na intervalu $[-1, 1]$.
- (iii) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 1/3$, ocjenu lokalne pogreške i pripadnu pravu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 4

10. lipnja 2013.

(20 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = x^2 - x$$

na intervalu $[0, 2]$. Za bilo koji zadani prirodni broj $N \in \mathbb{N}$, neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite koeficijente b_n u aproksimaciji funkcije f sinusnim trigonometrijskim “polinomom”, tj. funkcijom oblika

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin(n\pi x).$$

Ovise li koeficijenti b_n o N ? Argumentirajte odgovor!

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 5

10. lipnja 2013.

(15 + 5 = 20 bodova.)

- (a) Odredite težine
- w_1
- ,
- w_2
- ,
- w_3
- i čvor
- x_2
- u Gauss–Lobattovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^{-1/4} f(x) dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(x_2) + w_3 f(1)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{5/4}$ i nađite pravu grešku.

- (b) Može li integracijska formula

$$I(f) = \frac{1}{5} f\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{2}{3} f\left(\frac{2}{3}\right)$$

biti **interpolacijska** s nekom pozitivnom težinskom funkcijom w , na nekom intervalu $[a, b]$ koji sadrži čvorove $1/5$ i $2/3$? Precizno argumentirajte odgovor!

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 6

10. lipnja 2013.

(15 + 5 = 20 bodova.)

- (a) Nađite najveće rješenje jednadžbe

$$e^x + \frac{3}{4}x^2 + x - \frac{5}{2} = 0$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$.**Napomena:** Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

- (b) Na primjeru Newtonove metode pokažite koja je veza između iterativnih metoda za nalaženje nultočke funkcije
- f
- i jednostavnih iteracijskih funkcija
- φ
- . Iskažite teorem koji garantira da niz jednostavnih iteracija generiranih funkcijom
- φ
- “lokalno” konvergira prema fiksnoj točki
- α
- funkcije
- φ
- , s redom konvergencije (barem)
- p
- , gdje je
- $p > 1$
- prirodan broj.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ

10. lipnja 2013.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez opisa postupka kako se do njih dolazi**, odnosno, **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost — **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati i uvid u kolokvije: **srijeda, 12. lipnja 2013. u 10 sati.**

ZADATAK 1

1

(20 bodova.) Neka je $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

- Napišite definiciju **po dijelovima kubične Hermiteove** interpolacije za funkciju f na zadanoj mreži. Koje uvjete **interpolacije** i **glatkoće** zadovoljava ova interpolacija?
- Ukratko komentirajte je li po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija **lokalna** ili ne.
- Uz koje uvjete na mreže čvorova dobivamo **uniformnu** konvergenciju po dijelovima kubične Hermiteove interpolacije prema funkciji f ? Kojeg **reda** je konvergencija?

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 2

10. lipnja 2013.

(15 + 5 = 20 bodova.)

(a) Zadana je matrica

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & x & 0 \\ 0 & x & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

gdje je x realni parametar. Nađite sve vrijednosti x za koje je $A(x)$ pozitivno definitna matrica i izračunajte pripadnu faktorizaciju Choleskog matrice $A(x)$.

(b) Napišite definiciju dijagonalne dominantnosti po stupcima za kvadratnu matricu A , reda n . Što vrijedi za takve matrice u Gausovim eliminacijama bez pivotiranja i je li potrebno parcijalno pivotiranje?

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 3

10. lipnja 2013.

(15 bodova.) Funkciju

$$f(x) = e^x \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

interpoliramo polinomom u čvorovima $x_0 = -1$, $x_1 = -2/3$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = 1$.

- (i) Izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik ovog interpolacijskog polinoma.
- (ii) Nađite ocjenu uniformne pogreške ove interpolacije na intervalu $[-1, 1]$.
- (iii) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 1/2$, ocjenu lokalne pogreške i pripadnu pravu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 4

10. lipnja 2013.

(20 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = x^2 - x$$

na intervalu $[0, 2]$. Za bilo koji zadani prirodni broj $N \in \mathbb{N}$, neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite koeficijente a_n u aproksimaciji funkcije f kosinusnim trigonometrijskim “polinomom”, tj. funkcijom oblika

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\pi x).$$

Ovise li koeficijenti a_n o N ? Argumentirajte odgovor!

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 5

10. lipnja 2013.

(15 + 5 = 20 bodova.)

(a) Odredite težine w_1 , w_2 , w_3 i čvor x_2 u Gauss–Lobattovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 x^{1/4} f(x) dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(x_2) + w_3 f(1)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = x^{7/4}$ i nađite pravu grešku.

(b) Može li integracijska formula

$$I(f) = \frac{1}{4} f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{2}{3} f\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{4}{5} f\left(\frac{4}{5}\right)$$

biti **Gaussova** integracijska formula s nekom pozitivnom težinskom funkcijom w , na nekom intervalu $[a, b]$ koji sadrži čvorove $1/4$, $2/3$ i $4/5$? Precizno argumentirajte odgovor!

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 6

10. lipnja 2013.

(15 + 5 = 20 bodova.)

- (a) Nađite najmanje rješenje jednadžbe

$$e^{-x} + \frac{2}{3}x^2 - x - \frac{5}{2} = 0$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1/2.**Napomena:** Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

- (b) Što je jednostavna iteracijska funkcija
- φ
- za generiranje niza iteracija
- x_n
- ? Iskažite teorem o konvergenciji niza generiranog neprekidnom funkcijom
- φ
- prema fiksnoj točki
- α
- funkcije
- φ
- . Koja je brzina konvergencije tog niza (u općem slučaju)?