Teorija vjerojatnosti - vježbe

Ivan Biočić

26. svibnja 2021.

Sažetak

Ovi materijali namjenjeni su kao dopuna vježbama na kolegijima Teorija vjerojatnosti 1 i Teorija vjerojatnosti 2 koji se odvijaju na diplomskim studijima matematike na PMF-MO-u.

Sadržaj

1 Uvod

Predavanja u velikom dijelu prate knjigu prof. Sarape ([3]), dok vježbe nemaju fiksnu literaturu. Dodatne zadatke za vježbu studenti mogu potražiti na kraju svakog poglavlja knjiga [1, 2, 3].

Osnovna struktura koju promatramo je **vjerojatnosni prostor** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdje je

- Ω skup elementarnih događaja;
- $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω;
- $\mathbb{P}$ vjerojatnost na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$.

Osnovni objekti koje promatramo su **slučajni elementi**, tj. funkcije $X : \Omega \to S$ koje su izmjerive u paru σ-algebri $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(S))$, npr.

- $S = \mathbb{R} \longrightarrow X$ zovemo slučajna varijabla,
- $S = \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ zovemo n-dim slučajni vektor,
- $S = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow X$ zovemo slučajni niz,
- $S = \mathbb{R}^{[0,\infty\rangle} \longrightarrow X$ zoveno slučajni proces,

više o tome kasnije.

2 Familije skupova

Definicija 2.1. *Neka je $\Omega \neq \emptyset$ i $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Kažemo da je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω ako vrijedi*

(a) $\emptyset \in \mathcal{F}$;

(b) $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$;

(c) $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N} \implies \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Napomena 2.2. σ-algebra zatvorena je i na prebrojive operacije: $\setminus$, $\cap$, $\cup$, $\triangle$ (simetrična razlika).

Primjer 2.3. Primjeri σ-algebri:

(a) $\{\emptyset, \Omega\}$ - tzv. trivijalna σ-algebra, $\mathcal{P}(\Omega)$, tj. partitivni skup.

(b) $A_1, A_2, \dots A_n$ particija od Ω,

$$\mathcal{F} := \left\{ \bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j} : \text{za sve moguće izbore indeksa} \right\}.$$

Primijetimo da je $\operatorname{card}(\mathcal{F}) = 2^n$.

(c) za Ω neprebrojiv skup

$$\mathcal{F} := \{A \subseteq \Omega : A \text{ konačan ili prebrojiv ili } A^c \text{ konačan ili prebrojiv}\}.$$

DZ 2.4. Pokažite da su familije iz gornjeg primjera zaista σ-algebre.

Napomena 2.5. (a) Presjek σ-algebri je σ-algebra, tj.

$$\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \in A\} \text{ familija } \sigma\text{-algebri} \implies \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \text{je } \sigma\text{-algebra.}$$

Slična tvrdnja za unije ne vrijedi.

(b) $\sigma(\mathcal{U}) := \bigcap\limits_{\substack{\mathcal{F}\sigma\text{-algebra} \\ \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}}} \mathcal{F}$ je najmanja σ-algebra na Ω koja sadrži $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

(c) $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2 \implies \sigma(\mathcal{U}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{U}_2)$.

(d) $\mathcal{U}$ σ-algebra $\implies \sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

DZ 2.6. Dokažite tvrdnje iz prethodne napomene.

Zadatak 2.7. Neka je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Pokažite da za svaki $A \in \sigma(\mathcal{U})$ postoji prebrojiva familija $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ takva da je $A \in \sigma(\mathcal{U}_1)$.

Rješenje. Označimo s $\mathcal{F}$ familiju skupova iz $\sigma(\mathcal{U})$ za koju tvrdnja vrijedi. Primijetimo da je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ jer za $A \in \mathcal{U}$ možemo uzeti $\mathcal{U}_1 = \{A\}$. Stoga, ako još pokažemo da je $\mathcal{F}$ i σ-algebra, dobit ćemo da je $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{U})$.

- Očito je $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- Ako je $A \in \mathcal{F}$, onda postoji prebrojiva familija $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ takva je $A \in \sigma(\mathcal{U}_1)$. Međutim, σ-algebre su zatvorene na komplementiranje pa je i $A^c \in \sigma(\mathcal{U}_1)$, tj. $A^c \in \mathcal{F}$.
- Neka je $(A_n)_n$ niz u $\mathcal{F}$. Tada postoje prebrojivi $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}$ takvi da je $A_n \in \sigma(\mathcal{U}_n)$. Definirajmo $\widetilde{\mathcal{U}} = \cup_n \mathcal{U}_n$ što je prebrojiva familija skupova. Budući da za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo $A_n \in \sigma(\mathcal{U}_n) \subseteq \sigma(\widetilde{\mathcal{U}})$, a σ-algebre su zatvorene na prebrojive unije, imamo da je i $\cup_n A_n \in \sigma(\widetilde{\mathcal{U}})$, tj. $\cup_n A_n \in \mathcal{F}$.

Zaključujemo da je $\mathcal{F}$ σ-algebra čimo smo riješili zadatak.

Propozicija 2.8. *([3, Propozicija 8.1]) Neka je $h : \Omega_1 \to \Omega_2$ preslikavanje.*

(a) Ako je $\mathcal{S}_2$ σ-algebra na Ω_2, onda je $\{h^{\leftarrow}(B) \mid B \in \mathcal{S}_2\}$ σ-algebra na Ω_1.

(b) Ako je $\mathcal{S}_1$ σ-algebra na Ω_1, onda je $\{B \subseteq \Omega_2 \mid h^{\leftarrow}(B) \in \mathcal{S}_1\}$ σ-algebra na Ω_2.

Propozicija 2.9. *([3, Propozicija 8.2]) Neka je $h : \Omega_1 \to \Omega_2$ preslikavanje. Ako je $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_2)$, tada vrijedi $h^{\leftarrow}(\sigma(\mathcal{A}_2)) = \sigma(h^{\leftarrow}(\mathcal{A}_2))$.*

Definiramo i restrikciju familije podskupova od Ω na podskup od Ω, tj. za $A \subseteq \Omega$ i $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ definiramo $\mathcal{U}_A \coloneqq \{A \cap B \mid B \in \mathcal{U}\}$.

Zadatak 2.10. Dokažite:

(a) $\mathcal{U}$ σ-algebra na $\Omega \implies \mathcal{U}_A$ σ-algebra na A.

(b) $\sigma(\mathcal{U}_A) = \sigma(\mathcal{U})_A$.

Rješenje. Neka je $h : A \to \Omega$ takva da $h(a) = a$ (tzv. inkluzija). Tada je $\mathcal{U}_A = h^{\leftarrow}(\mathcal{U})$ jer za $B \in \mathcal{U}$ imamo $h^{\leftarrow}(B) = A \cap B$.

(a) $\mathcal{U}$ σ-algebra $\implies h^{\leftarrow}(\mathcal{U})$ σ-algebra (Propozicija 2.8(a)).

(b) $\sigma(\mathcal{U}_A) = \sigma(h^{\leftarrow}(\mathcal{U})) \overset{Prop.2.9}{=} h^{\leftarrow}(\sigma(\mathcal{U})) = (\sigma(\mathcal{U}))_A$.

Napomena 2.11. (Dynkinov teorem) Ako je $\mathcal{U}$ π-sistem (tj. familija zatvorena na konačne presjeke), onda je $d(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{U})$, gdje je $d(\mathcal{U})$ najmanja Dynkinova klasa generirana s $\mathcal{U}$. Prisjetimo se da je $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ Dynkinova klasa ako vrijede

$$\begin{aligned}
&(a)\, \Omega \in \mathcal{D}, \\
&(b)\, A, B \in \mathcal{D}, A \subseteq B \implies B \setminus A \in \mathcal{D}, \\
&(c)\, A_n \in \mathcal{D}, n \in \mathbb{N}, A_n \subseteq A_{n+1} \implies \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}.
\end{aligned}$$

2.1 Borelovi skupovi

Ukratko ponovimo/istaknimo osnovna svojstva topoloških prostora.

Definicija 2.12. *Topološki prostor je uređen par $(X, \mathcal{U}_X)$ gdje je X skup, a $\mathcal{U}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ takav da*

(a) $\emptyset$, $X \in \mathcal{U}_X$,

(b) $\mathcal{U}_X$ je zatvorena na konačne presjeke,

(c) $\mathcal{U}_X$ je zatvorena na proizvoljne unije.

Napomena 2.13. $\mathcal{U}_X$ zovemo topologija na X, a $U \in \mathcal{U}_X$ zovemo otvoren skup u X.

Definicija 2.14. *Baza topologije $\mathcal{U}_X$ je familija $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}_X$ takva da se svaki element familije $\mathcal{U}_X$ može prikazati kao unija elemenata iz $\mathcal{B}$.*

Napomena 2.15. Karakterizacija baze: Ako familija $\mathcal{B}$ zadovoljava sljedeća dva uvjeta

(i_B) $\mathcal{B}$ je pokrivač za X, tj. $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B = X$,

(ii_B) $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$, $x \in U_1 \cap U_2 \implies \exists U_3 \in \mathcal{B}$ takav da $x \in U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$,

tada postoji jedinstvena topologija kojoj je $\mathcal{B}$ baza. Tu topologiju čine svi skupovi oblika $U = \cup_{B \in \mathcal{I}} B$, pri čemu je $\mathcal{I}$ podskup skupa $\mathcal{B}$.

Zadatak 2.16. Dokažite da familije podskupova od $\mathbb{R}$

(a) $\mathcal{B} = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in \mathbb{R}\}$,

(b) $\mathcal{B}' = \{\langle p, q\rangle \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$.

zadovoljavaju (i_B) i (ii_B) te da generiraju istu topologiju.

Rješenje. Iznimno lako se provjeri da obje familije zadovoljavaju (i_B) i (ii_B). Stoga obje definiraju neke topologije, nazovimo ih $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}'$. Očito je da $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ jer je $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. Međutim, za svaka dva realna broja a i b, $a < b$, postoje racionalni nizovi $(p_n)_n$ i $(q_n)_n$ takvi da $p_n < q_n$, te $p_n \searrow a$ i $q_n \nearrow b$. Time smo dobili $\langle a, b\rangle = \bigcup_n \langle p_n, q_n\rangle$. Dakle, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}'$, a time i $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$.

Napomena 2.17. (a) Ako topologija ima prebrojivu bazu (*second countable topology*, tj. vrijedi drugi aksiom prebrojivosti), onda se svaki otvoren skup može prikazati kao prebrojiva unija elemenata baze. (**DZ**).

(b) Svaki otvoren skup u $\mathbb{R}$ možemo prikazati kao prebrojivu uniju intervala. Štoviše, to možemo učiniti i s međusobno disjunktinim intervalima. (**DZ**).

(c) Svaki otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ možemo prikazati kao prebrojivu uniju otvorenih pravokutnika, pri čemu pod pravokutnikom smatramo $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle$, za $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Za $\mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ ćemo u pravilu smatrati da je to euklidska topologija na $\mathbb{R}^n$.

Definicija 2.18. *Neka je $(X, \mathcal{U}_X)$ topološki prostor. $\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{U}_X)$ nazivamo Borelovom σ-algebrom na X, a $B \in \mathcal{B}(X)$ nazivamo Borelov skup.*

Napomena 2.19. Ako je $\mathcal{B}$ baza za $\mathcal{U}_X$, tada vrijedi $\sigma(\mathcal{B}) \subsetneqq \sigma(\mathcal{U}_X) = \mathcal{B}(X)$ (tj. prva inkluzija je općenito stroga). Ipak, ako imamo neko dodatno svojstvo topologije, onda možemo dobiti da u prvoj inkluziji imamo jednakost o čemu govori i sljedeći zadatak.

Zadatak 2.20. Neka je $\mathcal{C}$ prebrojiva baza za $\mathcal{U}_X$. Tada je $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(X)$.

Rješenje. Uvijek vrijedi da je $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{U}_X) = \mathcal{B}(X)$. Dokažimo da vrijedi i obrat. Dovoljno je pokazati da za svaki $U \in \mathcal{U}_X$ vrijedi $U \in \sigma(\mathcal{C})$. Uzmimo, dakle, $U \in \mathcal{U}_X$. Budući da je $\mathcal{C}$ prebrojiva baza za $\mathcal{U}_X$ postoji niz $(C_n)_n \subseteq \mathcal{C}$ takav da $U = \cup_n C_n$. Dakle, $U \in \sigma(\mathcal{C})$.

DZ 2.21. Pokažite da

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbb{R}) &= \sigma(\{U \subseteq \mathbb{R} \,|\, U \text{ otvoren}\}) \\ &= \sigma(\{F \subseteq \mathbb{R} \,|\, F \text{ zatvoren}\}) \\ &= \sigma(\{\langle -\infty, a] \,|\, a \in \mathbb{Q}\}).\end{aligned}$$

Pomoć: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{A}^c := \{A^c \,|\, A \in \mathcal{A}\} \implies \sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}^c)$.

Definicija 2.22. *Neka je $(X,\mathcal{U}_X)$ topologija i $Y \subseteq X$. Relativna topologija na Y zovemo $\mathcal{U}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{U}_X\} = (\mathcal{U}_X)_Y$, a par $(Y,\mathcal{U}_Y)$ zovemo topološki potprostor od $(X,\mathcal{U}_X)$.*

Napomena 2.23. Za Borelova σ-algebru na potprostoru vrijedi

$$\mathcal{B}(Y) = \sigma(\mathcal{U}(Y)) = \sigma((\mathcal{U}(X))_Y) \overset{Zad2.10}{=} (\sigma(\mathcal{U}(X)))_Y = (\mathcal{B}(X))_Y$$

Definicija 2.24. *Neka su $(X_1,\mathcal{U}_{X_1})$ i $(X_2,\mathcal{U}_{X_2})$ topološki prostori. Produktna topologija na $X_1 \times X_2$ je topologija $\mathcal{U}$ s bazom $\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \mathcal{U}_{X_1}, U_2 \in \mathcal{U}_{X_2}\}$.*
$(X_1 \times X_2,\mathcal{U})$ zovemo Kartezijev produkt topoloških prostora.

Napomena 2.25. (a) Gornja definicija je dobra jer familija $\mathcal{B}$ zadovoljava (i_B) i (ii_B).

(b) $\mathcal{B}_i$ baza za $\mathcal{U}_i$, $i = 1,2 \implies \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ baza za $\mathcal{U}$.

(c) Produktna topologija je najmanja topologija u kojoj su projekcije π_1 i π_2

$$\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i, \quad \pi(x_1,x_2) = x_i, \quad i = 1,2.$$

neprekidne. (**DZ**)
(Prisjetimo se: $f : (X_1,\mathcal{U}_{X_1}) \to (X_2,\mathcal{U}_{X_2})$ je neprekidna ako je $f^{\leftarrow}(\mathcal{U}_2) \subseteq \mathcal{U}_1$.)

Definicija 2.26. *Neka su $(\Omega_1,\mathcal{F}_1)$ i $(\Omega_2,\mathcal{F}_2)$ izmjerivi prostori. Produktna σ-algebra na $\Omega_1 \times \Omega_2$ je*

$$\mathcal{F} \coloneqq \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \coloneqq \sigma(F_1 \times F_2 \mid F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2).$$

$(\Omega_1 \times \Omega_2,\mathcal{F})$ zovemo produktni izmjerivi prostor.

Napomena 2.27. Borelova σ-algebra na produktu $\mathcal{B}(X_1 \times X_2) = \sigma(\mathcal{U})$ i općenito je

$$\mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2) \subsetneqq \mathcal{B}(X_1 \times X_2).$$

Definicija 2.28. *Neka su $(\Omega_1,\mathcal{F}_1)$ i $(\Omega_2,\mathcal{F}_2)$ izmjerivi prostori te $f : \Omega_1 \to \Omega_2$. Funkcija f je $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$-izmjeriva ako je $f^{\leftarrow}(\mathcal{F}_2) \subseteq \mathcal{F}_1$.*

Zadatak 2.29. $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ je najmanja σ-algebra u kojoj su projekcije $\pi : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_i$, $i = 1,2$, izmjerive.

Rješenje. π_i je izmjeriva ako je $\pi_i^{\leftarrow}(\mathcal{F}_i) \subseteq \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$.

Ako je $A \in \mathcal{F}_1$ tada je $\pi_1^{\leftarrow}(A) = A \times \Omega_2 \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. Dakle, $\pi_1^{\leftarrow}(\mathcal{F}_1) \subseteq \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. Slično i $\pi_2^{\leftarrow}(\mathcal{F}_2) \subset \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, tj. obje projekcije su izmjerive.

Nadalje, imamo i

$$\begin{aligned} &\pi_1^{\leftarrow}(\mathcal{F}_1) \cup \pi_2^{\leftarrow}(\mathcal{F}_2) \subseteq \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \\ \Longrightarrow\ &\sigma(\pi_1^{\leftarrow}(\mathcal{F}_1) \cup \pi_2^{\leftarrow}(\mathcal{F}_2)) \subseteq \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2. \end{aligned}$$

S druge strane za $F_i \in \mathcal{F}_i$, $i = 1, 2$, imamo

$$\begin{aligned} F_1 \times F_2 &= (F_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times F_2) \\ &= \pi_1^{\leftarrow}(F_1) \cap \pi_2^{\leftarrow}(F_2) \\ \Longrightarrow\ \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 &\subseteq \sigma(\pi_1^{\leftarrow}(\mathcal{F}_1) \cap \pi_2^{\leftarrow}(\mathcal{F}_2)). \end{aligned}$$

Budući da je $\sigma(\pi_1^{\leftarrow}(\mathcal{F}_1) \cap \pi_2^{\leftarrow}(\mathcal{F}_2)) = \sigma(\pi_1^{\leftarrow}(\mathcal{F}_1) \cup \pi_2^{\leftarrow}(\mathcal{F}_2))$, slijedi $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma(\pi_1^{\leftarrow}(\mathcal{F}_1) \cup \pi_2^{\leftarrow}(\mathcal{F}_2))$.

Zadatak 2.30. Neka je $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ preslikavanje, a $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ izmjerivi prostori. Dokažite:

(a) f je $(f^{\leftarrow}(\mathcal{F}_2), \mathcal{F}_2)$-izmjeriva.

(b) Ako je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\Omega_2)$, $f^{\leftarrow}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{F}_1$ i $\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{F}_2$, tada je f izmjeriva u paru σ-algebri $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$.

Rješenje. (a) je trivijalan. Za (b) imamo

$$f^{\leftarrow}(\mathcal{F}_2) = f^{\leftarrow}(\sigma(\mathcal{U})) \overset{Prop. 2.9}{=} \sigma(f^{\leftarrow}(\mathcal{U})) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_1,$$

tj. f je $(\mathcal{F}_1, F_2)$-izmjeriva.

Zadatak 2.31. Neka je $f : (X_1,\mathcal{U}_1) \to (X_2,\mathcal{U}_2)$ neprekidna. Tada je ona i $(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2))$-izmjeriva.

Rješenje.

$$f^{\leftarrow}(\mathcal{B}(X_2)) = f^{\leftarrow}(\sigma(\mathcal{U}_2)) = \sigma(f^{\leftarrow}(\mathcal{U}_2)) \subseteq \sigma(\mathcal{U}_1) = \mathcal{B}(X_1).$$

Zadatak 2.32. Neka je $(X,\mathcal{U}) = (X_1,\mathcal{U}_1) \times (X_2,\mathcal{U}_2)$ i neka topologije $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$ imaju prebrojive baze. Tada je $\mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2) = \mathcal{B}(X)$.

Rješenje. Dokazujemo najprije $(\subseteq)$. Uvijek vrijedi da je $\mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2) \subseteq \mathcal{B}(X)$ što smo već komentirali u Napomeni 2.27.

Sada pokazujemo $(\supseteq)$. Neka su $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ prebrojive baze za $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$. Tada je $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ prebrojiva baza za $\mathcal{U}$ pa po Zadatku 2.20 slijedi

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{U}) &\overset{Zad. 2.20}{=} \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2) \\ &\subseteq \sigma(\mathcal{B}(X_1) \times \mathcal{B}(X_2)) = \mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2) \end{aligned}$$

Koristeći karakterizacije preko projekcija možemo definirati proizvoljne produkte topoloških, odnosno izmjerivih, prostora. Naime, neka je $(X_t, \mathcal{U}_t)_{t\in T}$ familija topoloških prostora i neka je $X = \prod_{t\in T} X_t$. Produktna topologija $\mathcal{U}$ na X je najmanja topologija na X za koju su sve projekcije $\pi_t : X \to X_t$ neprekidne. (Takva topologija je generirana tzv. cilindrima o kojima će više biti riječ kod Kolmogorovljevog teorema proširenja.)

Slično, neka je $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ familija izmjerivih prostora produktna i $X = \prod_{t\in T} X_t$. Produktna σ-algebra na X je σ-algebra $\mathcal{F}$ koja je najmanja σ-algebra na X za koju su projekcije $\pi_t : X \to X_t$ izmjerive. Oznaka $\mathcal{F} = \otimes_{t\in T}\mathcal{F}_t$.

Teorem 2.33. *Neka je $(X_n,\mathcal{U}_n)_n$ niz topoloških prostora koji imaju prebrojivu bazu i neka je $(X,\mathcal{U})$ njihov produkt. Tada vrijedi $\mathcal{B}(X) = \otimes_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}(X_n)$.*

Dokaz prethodnog teorema nije težak i može se pokazati slijedeći ideju iz Zadatka 2.32. Također, možete ga pronaći dokazanog u Zadacima za vježbu u [3].

DZ 2.34 (*Za one koje žele znati više, tj. nebitno za kolegij.)**.** Ukoliko imamo neprebrojivo topoloških prostora u produktu, onda gornja tvrdnja općenito neće vrijediti. Zaista, pokažite da je Borelova σ-algebra na neprebrojivom produktu netrivijalnih Hausdorffovih prostora (dakle, s barem dvije točke) uvijek strogo veća od produkta σ-algebri. (Uputa: pokušajte iskoristiti Zadatak 2.7 ili pronađite na internetu.)

Također, nađite protuprimjer za konačan produkt ako nemamo prebrojivost baze.

Zadatak 2.35. Neka su $(X_1,\mathcal{U}_1)$ i $(X_2,\mathcal{U}_2)$ topološki prostori i $(X,\mathcal{U})$ njihov produktni prostor. Za $x_1 \in X_1$ i $x_2 \in X_2$ te $A \subseteq X$ definiramo prereze skupa A:

$$A_{x_1} \coloneqq \{y \in X_2 \,|\, (x_1, y) \in A\},$$
$$A_{x_2} \coloneqq \{x \in X_1 \,|\, (x, x_2) \in A\}.$$

(a) Dokažite: A otvoren $\implies$ A_{x_1}, A_{x_2} otvoreni (u X_2 i X_1).

(b) Neka je $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ proizvoljna funkcija. Definiramo $f_{x_1} : X_2 \to Y$ s $f_{x_1}(y) = f(x_1, y)$ te $f_{x_2} : X_1 \to Y$ s $f_{x_2}(x) = f(x, x_2)$. Dokažite f neprekidna $\implies$ f_{x_1} i f_{x_2} neprekidne.

Rješenje. (a) Definirajmo familiju $\mathcal{U}' \coloneqq \{A \in \mathcal{U} : A_{x_1} \in \mathcal{U}_2, A_{x_2} \in \mathcal{U}_1\}$. Cilj je pokazati da je ova familija topologija (**DZ**). Budući da je familija $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}'$ zaključujemo da je $\mathcal{U}' = \mathcal{U}$.

(b) Za $V \in \mathcal{V}$ i $x_1 \in X_1$ imamo

$$f_{x_1}^{\leftarrow}(V) = \{(x,y) : f(x,y) \in V\}_{x_1} \in \mathcal{U}_2.$$

Zadatak 2.36. ([3, Propozicija 10.22]) Neka su $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ izmjerivi prostori i $(\Omega, \mathcal{F})$ njihov produkt. Dokažite da su tada za $F \in \mathcal{F}$ F_{x_1} i F_{x_2} izmjerivi te da su za izmjerivu $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (Z, \mathcal{G})$ funkcije f_{x_1} i f_{x_2} izmjerive.

Rješenje. Zadatak se riješi slično kao i prethodni. Definira se familija $\mathcal{F}' = \{F \in \mathcal{F} : F_{x_1} \in \mathcal{F}_2, F_{x_2} \in \mathcal{F}_1\}$ te se pokaže da je to σ-algebra koja sadrži $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

DZ 2.37. Neka je $X = \mathbb{R}^{\langle 0,\infty\rangle} = \{(x_t)_{t\in\langle 0,\infty\rangle} : x_t \in \mathbb{R}, \ , \forall t \in \langle 0,\infty\rangle\}$. Na $X = \mathbb{R}^{\langle 0,\infty\rangle}$ možemo gledati kao skup svih funkcija $f : \langle 0,\infty\rangle \to \mathbb{R}$. Na $\mathbb{R}$ gledamo klasičnu euklidsku topologiju, a na $\mathbb{R}^{\langle 0,\infty\rangle}$ gledamo topologiju $\mathcal{U}$ koja je najmanja topologija u kojoj su sve projekcije neprekidne, te pripadnu Borelovu σ-algebru $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\langle 0,\infty\rangle}) = \sigma(\mathcal{U})$. Dokažite da skup svih neprekidnih funkcija na $\langle 0,\infty\rangle$, u oznaci $C(\langle 0,\infty\rangle)$, nije Borelev izmjeriv, tj. $C(\langle 0,\infty\rangle) \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\langle 0,\infty\rangle})$.

3 Slučajne varijable i vektori

Definicija 3.1. *Kažemo da je* $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *vjerojatnost na izmjerivom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F})$ *ako vrijedi*

(a) $\mathbb{P}(A) \geq 0,\ A \in \mathcal{F}$

(b) $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$, *međusobno disjunktni* $\implies \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$

(c) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Napomena 3.2. Osnovna svojstva vjerojatnosti:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- $A, B \in \mathcal{F},\ A \subseteq B \implies \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$;
- $A \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
- $A, B \in \mathcal{F},\ A \subseteq B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
- $A_1, \ldots, A_n$ disjunktni $\implies \mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$;
- $A_n, n \in \mathbb{N},\ A_n \subseteq A_{n+1}, n \in \mathbb{N}, \implies \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$;
- $A_n, n \in \mathbb{N},\ A_n \supseteq A_{n+1}, n \in \mathbb{N}, \implies \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$;
- $A_n, n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$;

Definicija 3.3. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor.* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *je slučajni vektor (za* $n = 1$ *slučajna varijabla) ako je* X $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$*-izmjeriva.*

Zadatak 3.4. ([3, Propozicija 10.8]) Neka su $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ proizvoljna preslikavanja na potpunom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i neka je $\mathbb{P}(X_1 \neq X_2) = 0$. Dokažite da su tada oba preslikavanja slučajni vektori ili nijedno nije.

Rješenje. Označimo s $D \coloneqq \{X_1 \neq X_2\}$ te po pretpostavci zadatka imamo $D \in \mathcal{F}$ te $\mathbb{P}(D) = 0$. Uzmimo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ te pretpostavimo da je X_1 izmjeriva, tj. da je slučajni vektor. Imamo

$$\begin{aligned} X_2^{\leftarrow}(B) &= \left(X_2^{\leftarrow}(B) \cap D\right) \cup \left(X_2^{\leftarrow}(B) \cap D^c\right) \\ &= \underbrace{\left(X_2^{\leftarrow}(B) \cap D\right)}_{\in \mathcal{F}} \cup \underbrace{\left(X_1^{\leftarrow}(B) \cap D^c\right)}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Zbog simetrije, dokaz je gotov.

3.1 Funkcije slučajnih vektora

Propozicija 3.5. *Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ slučajan vektor i $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Borelova funkcija. Tada je $g(X) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ slučajan vektor.*

Napomena 3.6. Iz prethodne propozicije lako dobijemo da su $Y = \sin(X)$, $Y = \sum_{i=1}^n X_i$, $Y = \max\{X, 0\} = X^+$, $Y = \max\{-X, 0\} = X^-$ također slučajne varijable ako su $X, X_1, \ldots, X_n$ slučajne varijable.

Propozicija 3.7. *Neka su X_1 i X_2 slučajne varijable na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada je svaki od skupova $\{X_1 < X_2\}$, $\{X_1 \le X_2\}$, $\{X_1 \neq X_2\}$, $\{X_1 = X_2\}$ izmjeriv.*

Teorem 3.8. *Neka je $X \ge 0$ slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada postoji rastući niz nenegativnih jednostavnih slučajnih varijabli $(X_n)_n$ na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tako da je $\lim_n X_n(\omega) = X(\omega)$, $\omega \in \Omega$.*

Definicija 3.9. *Neka je $\{X_t : t \in T\}$ familija slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. σ-algebra inducirana familijom $\{X_t : t \in T\}$ je najmanja σ-algebra u odnosu na koju su te varijable izmjerive:*

$$\sigma(\{X_t : t \in T\}) = \sigma\left(\bigcup_{t\in T} X_t^{\leftarrow}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))\right).$$

Specijalno, $\sigma(X) = \sigma(X^{\leftarrow}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))) = X^{\leftarrow}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Zadatak 3.10. Ako su X i Y slučajne varijable na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dokažite da $\sigma(X) \subseteq \sigma(Y)$ ako i samo ako postoji Borelova funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da $X = g(Y)$.

Rješenje. Jedan smjer je očit, tj. ako je $g(Y) = X$, onda je i

$$\sigma(X) = X^{\leftarrow}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = g(Y)^{\leftarrow}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = Y^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))) \subseteq Y^{\leftarrow}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \sigma(Y).$$

Drugi smjer pokazujemo klasičnim postupkom koji se ponegdje naziva i *Lebesgueova indukcija.* Pretpostavimo da je $X = \mathbf{1}_A$ pa $\sigma(X) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$. Zbog pretpostavke zadatka postoji $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ takav da $A = Y^{\leftarrow}(B)$ pa za $g = \mathbf{1}_B$ imamo $X = g(Y)$. Pretpostasvimo sada da je $X = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$ pri čemu su $(A_i)_{i=1}^n$ međusobno disjunktni, a $(a_i)_{i=1}^n \subset \langle 0, \infty\rangle$ međusobno različiti. Opet postoje skupovi $(B_i)_{i=1}^n$ takvi da $A_i = Y^{\leftarrow}(B_i)$ pa je pravi odabir $g = \sum_{i=1} a_i \mathbf{1}_{B_i}$. Tada je $g(Y) = X$. Pretpostavimo sada da je $X \ge 0$. Iz Teorema 3.8 lako dobijemo, uz korištenje već dokazanog, da postoji funkcija g takva da $g(Y) = X$. Sada za opći X koristimo rastav $X = X^+ - X^-$ te na uobičajeni način dovršavamo dokaz.

Zadatak 3.11. Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te $A \in \mathcal{F}$ i $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Odredite $\sigma(Y)$ ako je

(a) $Y = \mathbf{1}_A$,

(b) $Y = c\mathbf{1}_A$,

(c) $Y = X\mathbf{1}_A$.

Rješenje. (a) Očito je da $\sigma(Y) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

(c) Neka je $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Tada

$$Y^{\leftarrow}(B) = \begin{cases} X^{\leftarrow}(B) \cap A, & 0 \notin B, \\ X^{\leftarrow}(B) \cup A^c, & 0 \in B. \end{cases}$$

(**DZ**: Je li $\sigma(Y) = \sigma(X, \mathbf{1}_A)$?)

3.2 Funkcije distribucije

Definicija 3.12. *Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Funkcija distribucije slučajne varijable X je $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definirana s $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.*
Vjerojatnosna mjera generirana s X je $\mathbb{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ definirana s $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$.

Napomena 3.13. Postoji 1-1 veza između F_X i $\mathbb{P}_X$. Primijetimo da je

$$\mathbb{P}_X(\langle -\infty, x]) = F_X(x)$$

i da je $\mathbb{P}_X$ dovoljno definirati na skupovima oblika $\langle -\infty, x]$ jer oni čine π-sustav koji generira σ-algebru na $\mathbb{R}$.

Primijetimo da je zbog neprekidnosti vjerojatnosti na rastuće događaje $\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}_X(\langle -\infty, x\rangle) = \lim_{z \uparrow x} \mathbb{P}_X(\langle -\infty, z]) = \lim_{z \uparrow x} F_X(z)$. Zbog tog razloga uvodimo oznaku $F_X(x-) \coloneqq \lim_{z \uparrow x} F_X(z)$.

Zadatak 3.14. Nađite funkciju distribucije slučajne varijable Y ako je F_X funkcija distribucije slučajne varijable X i

(a) $Y = c$, za neki $c \in \mathbb{R}$,

(b) $Y = -X$,

(c) $Y = aX + b$, $a \neq 0$,

(d) $Y = X^+$,

(e) $Y = X^-$.

(f) $Y = |X|$.

Rješenje. (a) (**DZ**)

(b) (**DZ**)

(c)

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(aX+b \leq x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X \leq \frac{x-b}{a}), & a > 0, \\ \mathbb{P}(X \geq \frac{x-b}{a}), & a < 0, \end{cases} = \begin{cases} F_X(\frac{x-b}{a}), & a > 0, \\ 1 - F_X(\frac{x-b}{a}-), & a < 0. \end{cases}$$

(d) Očito da za $x < 0$ imamo $F_{X^+}(x) = \mathbb{P}(\max\{X, 0\} \leq x) = 0$. Neka je $x \geq 0$. Tada

$$F_{X^+}(x) = \mathbb{P}(\max\{X, 0\} \leq x) = F_X(x).$$

Dakle, $F_{X^+}(x) = F_X(x)\mathbf{1}_{[0,\infty\rangle}(x)$.

(e) (**DZ**)

(f) Očito da za $x < 0$ imamo $F_{|X|}(x) = \mathbb{P}(|X| \leq x) = 0$. Neka je $x \geq 0$. Tada $F_{|X|}(x) = \mathbb{P}(-x \leq X \leq x) = F_X(x) - F_X(-x-)$.

Svojstva funkcije distribucije: Funkcija distribucije F_X slučajne varijable X zadovoljava:

D1) F_X je neopadajuća,

D2) F_X je neprekidna zdesna i ima limes slijeva,

D3) $F_X(\infty) = 1$ i $F_X(-\infty) = 0$.

Definicija 3.15. *Svaku funkciju $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ sa svojstvima D1-D3 zovemo vjerojatnosna funkcija distribucije.*

Napomena 3.16. Postoji 1-1 korespodencija između vjerojatnosnih funkcija distribucija i funkcija distribucija slučajnih varijabli. Dakle, svaka funkcija distribucije slučajne varijable jest vjerojatnosna funkcija distribucije. Također, ako je F vjerojatnosna funkcija distribucije, onda postoji vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i na njemu slučajna varijabla X takva da $F_X = F$.

Primjer 3.17. Kako za danu funkciju distribucije F pronaći vjerojatnosni prostor i slučajnu varijablu X sa svojstvom $F_X = F$?

(a) $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}(\langle -\infty, x]) := \mathbb{P}_F(\langle -\infty, x]) := F(x)$, $X(\omega) = \omega \implies F_X = F$.

(b) $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$, $\mathbb{P} = \lambda_{|[0,1]}$, $X(\omega) = \sup\{y \,|\, F(y) < \omega\}$ $\implies \{X \leq x\} = \{\omega \in [0,1] \,|\, X(\omega) \leq x\} = \{\omega \in [0,1] \,|\, \omega \leq F(x)\}$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \lambda([0, F(x)]) = F(x)$.

Zadatak 3.18. F_X je (topološki) neprekidna funkcija distribucije u točki $x \in \mathbb{R}$ ako i samo ako je $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Rješenje. Znamo da je F_X neprekidna zdesna pa je potrebno pokazati samo da je i neprekidna slijeva. Neka je $(x_n)_n$ niz u $\mathbb{R}$ takav da $x_n \uparrow x$. Iz jednakosti $|F_X(x) - F_X(x_n)| = \mathbb{P}(x_n < X \leq x) = \mathbb{P}(X \in \langle x_n, x])$ slijedi tvrdnja.

Zadatak 3.19. Neka je X slučajna varijabla s topološki neprekidnom funkcijom distribucije F_X. Nađite funkciju distribucije slučajne varijable $Y = F_X(X)$.

Rješenje. Primijetimo da je F_X uvijek izmjeriva pa je $Y = F_X(X)$ uvijek slučajna varijabla. Očito $Y = F_X(X)$ poprima vrijednosti u skupu $[0,1]$ tako da je $F_Y(y) = 0$, za $y < 0$, i $F_Y(y) = 1$, za $y \geq 1$.

Pogledajmo sada slučaj $y = 0$. Imamo $F_Y(0) = \mathbb{P}(F_X(X) = 0)$. Ako funkcija F_X ne poprima vrijednost 0, onda odmah znamo $F_Y(0) = 0$. Ako pak poprima, onda to vrijedi na intervalu $\langle -\infty, \sup F_X^{\leftarrow}(\{0\})]$. Stoga $F_Y(0) = \mathbb{P}(X \leq \sup F_X^{\leftarrow}(\{0\})) = 0$.

Slično možemo postupiti i za $y \in \langle 0, 1\rangle$. Imamo

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(F_X(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \sup F_X^{\leftarrow}(\{y\})) = y.$$

DZ 3.20. Ako su F_1 i F_2 funkcije distribucije i ako je $D \subseteq \mathbb{R}$ gust u $\mathbb{R}$ takav da $F_1 = F_2$ na D. Tada je $F_1 = F_2$ na $\mathbb{R}$.

DZ 3.21. Dokažite da je skup prekida funkcije distribucije najviše prebrojiv.

3.3 Klasifikacija slučajnih varijabli

Definicija 3.22. *Slučajna varijabla X je **diskretna** ako postoji $D \subseteq \mathbb{R}$ koji je prebrojiv ili konačan takav da $\mathbb{P}(X \in D) = 1$.*

Napomena 3.23. (a) X diskretna $\iff$ F_X diskretna funkcija distribucije

$$F_X(x) = \sum_{\substack{x_n \in D \\ x_n \leq x}} \mathbb{P}(X = x_n).$$

(b) X diskretna $\implies \mathbb{P}(X \in B) = \sum_{x_n \in B} \mathbb{P}(X = x_n) = \mathbb{P}_X(D \cap B)$.

Primjer 3.24. Općenito diskretne slučajne varijable zadajemo zapisom

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

pri čemu je $\mathbb{P}(X = a_i) = p_i$, $i \in \mathbb{N}$. Naravno, brojevi $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, su međusobno različiti, a $p_i \geq 0$, $i \in \mathbb{N}$, takvi da $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Posebno ćemo označavati sljedeće slučajne varijable:

(a) Bernoullijeva s parametrom $p \in \langle 0, 1\rangle$ u oznaci $X \sim b(p)$:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

(b) Binomna s parametrima $n \in \mathbb{N}$ i $p \in \langle 0, 1\rangle$ u oznaci $X \sim B(n,p)$: $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

(c) Poissonova s parametrom $\lambda > 0$ u oznaci $X \sim P(\lambda)$: $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2 \dots$

(d) Geometrijska s parametrom $p \in \langle 0, 1\rangle$ u oznaci $X \sim G(p)$: $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Definicija 3.25. *Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Kažemo da je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla ako postoji Borelova funkcija $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty\rangle$ takva da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$F_X(x) = \int\limits_{\langle -\infty, x]} f_X(t) d\lambda(t),$$

pri čemu integriramo po Lebesgueovoj mjeri λ na $\mathbb{R}$.

Napomena 3.26. (a) F_X je diferencijabilna λ-g.s. i $F_X' = f_X$ λ-g.s. Funkciju f_X zovemo funkcija gustoće slučajne varijable X.

(b) Za svaki $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vrijedi $\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(t) d\lambda(t)$.

(c) f gustoća neke slučajne varijable $\iff f \geq 0$ i $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 1$.

Primjer 3.27. Tijekom kolegija koristit ćemo sljedeće neprekidne slučajne varijable:

(a) Uniformna na intervalu $\langle a, b\rangle$ u oznaci $X \sim U(a, b)$ s gustoćom

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{\langle a,b\rangle}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

(b) Eksponencijalna s parametrom $\mu > 0$ u oznaci $X \sim Exp(\mu)$ s gustoćom

$$f_X(x) = \mu e^{-\mu x}\mathbf{1}_{[0,\infty\rangle}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(c) Normalna s parametrima $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 > 0$ u oznaci $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s gustoćom

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(d) Gama distribucija s parametrima $\alpha > 0$ i $\beta > 0$ u oznaci $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ s gustoćom

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}\mathbf{1}_{[0,\infty\rangle}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

pri čemu je $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$.

(e) χ^2 distribucija s parametrom $n \in \mathbb{N}$ u oznaci $X \sim \chi^2(n)$ gdje je $\chi^2(n) = \Gamma(\frac{n}{2}, 2)$, tj.

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}}x^{n/2-1}e^{-x/2}\mathbf{1}_{[0,\infty\rangle}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(f) Cauchyjeva distribucija s parametrima $a > 0$ i $b \in \mathbb{R}$ u oznaci $X \sim C(a, b)$ s gustoćom

$$f_X(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + (x-b)^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pokazat ćemo da je $C(0, 1)$ omjer dviju nezavisnih standardnih normalnih varijabli, vidi Zadatak 6.32. Zabilježimo i gustoću slučajne varijable $X \sim C(0, 1)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definicija 3.28. *Slučajna varijabla X na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je singularna slučajna varijabla ako je F_X topološki neprekidna i $F'_X = 0$ λ-g.s.*

Primjer 3.29 (Cantorova distribucija - đavolje stepence)**.** Dat ćemo primjer funkcije distribucije slučajne varijable koja je singularna. Označimo s $(C_n)_n$ Cantorov niz skupova, tj. $C_1 = [0,1]$, $C_2 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$, $C_3 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$, ... Neka je za svaki $n \in \mathbb{N}$ s F_n označena funkcija distribucije uniformne slučajne varijable na skupu C_n. Kasnije na kolegiju ćete naučiti da je niz $(F_n)_n$ napet niz funkcija distribucija što će povlačiti da taj niz konvergira prema funkciji distribucije F, pogledajte [3, Teorem 13.17]. (Zbog zanemarivosti Cantorovog skupa $C := \cap_n C_n$ koristeći Zadatak 3.20 vidi se da se konvergencija od (F_n) prema F ne događa samo na nekom podnizu, nego baš na cijelom nizu.) Štoviše, konvergencija je uniformna pa je očito da je F singularna.

Teorem 3.30. *Za svaku funkciju distribucije F postoje jedinstveni α_a, α_d, $\alpha_s \geq 0$ takvi da $\alpha_a + \alpha_d + \alpha_s = 1$ i funkcije distribucije F_a, F_d i F_s tako da je*

$$F = \alpha_a F_a + \alpha_d F_d + \alpha_s F_s,$$

gdje je F_a funkcija distribucije neke aspolutno neprekidne, F_d neke diskretne, a F_s neke singularne slučajne varijable.

Napomena 3.31. U više dimenzija se distribucije klasificiraju na iste kategorije. Pri tome je slučajni vektor $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$

(a) diskretan ako postoji prebrjiv skup $D \subseteq \mathbb{R}^d$ takav da $\mathbb{P}(X \in D) = 1$,

(b) apsolutno neprekidan ako postoji Borelova funkcija $f_o X : \mathbb{R}^d \to [0, \infty\rangle$ takva da $\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f d\lambda^d$ za sve $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

(c) singularan ako je F_X neprekidna i postoji Borelov skup $A \in \mathbb{R}^d$ takav da $\lambda^d(A) = 0$ i $\mathbb{P}(X \in A) = 1$.

Također, ponovno vrijedi gornja dekompozicija iz teorema. Ipak, u više dimenzija je lakše smisliti singularnu distribuciju. Zaista, neka je $X \sim N(0,1)$ te neka je $Y = (X, X)$ slučajni vektor u $\mathbb{R}^2$. Tada je Y singularan jer je koncentriran na dijagonali skupa $\mathbb{R}^2$.

DZ 3.32 (Umjesto društvenim mrežama, skratimo dosadu mozgalicom)**.** Postoji li funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja je neprekidna zdesna u svakoj točki, neprekidna u gotovo svakoj točki na $\mathbb{R}$, ali ima prekid u svakoj racionalnoj točki?

4 Matematičko očekivanje

Definicija 4.1. *Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Kažemo da X ima očekivanje ako $\int_\Omega |X(\omega)| d\mathbb{P}(\omega) < \infty$. Tada označujemo očekivanje od X s*

$$\mathbb{E}X = \int_\Omega X d\mathbb{P}.$$

Napomena 4.2. (a) Primijetimo da očekivanje od X postoji ako i samo ako $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(b) Ako je $X \geq 0$, definiramo $\mathbb{E}X = \int_\Omega X d\mathbb{P} \in [0, \infty]$.

(c) Ako je $\mathbb{E}X^+ < \infty$ i $\mathbb{E}X^- < \infty$, onda očekivanje od X postoji i $\mathbb{E}X = \mathbb{E}X^+ - \mathbb{E}X^-$.

(d) Ako $\mathbb{E}X^+ < \infty$ i $\mathbb{E}X^- = \infty$ (ili $\mathbb{E}X^+ = \infty$ i $\mathbb{E}X^- < \infty$), tada možemo reći $\mathbb{E}X = -\infty$ (tj. $\mathbb{E}X = \infty$).

Napomena 4.3. (a) Očekivanje je pozitivan (pa onda i monoton) linearan funkcional na $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tj.

- (pozitivnost) ako je $0 \leq X \in L^1$, onda je i $\mathbb{E}X \geq 0$.
- (monotnost) ako su $X, Y \in L^1$ i $X \leq Y$, tada je $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$.
- (linearnost) za sve $a, b \in \mathbb{R}$ i $X, Y \in L^1$ je $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$.

(b) Obrat monotonosi općenito **ne vrijedi**! Neka je $X \sim N(0,1)$. Tada $\mathbb{E}X = 0$, a $\mathbb{E}X^2 = 1$ međutim, $X^2 < X$ na skupu $\{0 < X < 1\}$ koji ima pozitivnu vjerojatnost.

(c) Neka su $X, Y \in L^1$. Ako za svaki $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vrijedi $\mathbb{E}[X\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_A]$, tada $X = Y$ g.s.

(d) $X \leq c$ g.s. $\implies \mathbb{E}X \leq c$.

DZ 4.4. Dokažite sljedeću tvrdnju: ako je $X \geq 0$ i $\mathbb{E}X = 0$, onda je $X = 0$ g.s. Dokažite i tvrdnju (c) prethodne napomene.

Zadatak 4.5. Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takva da $\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}X^3 = \mathbb{E}X^4 = a \geq 0$. Dokažite da X ima Bernoullijevu razdiobu.

Rješenje. Za $Y = X^2(1-X)^2$ imamo $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X^2 - 2X^3 + X^4] = 0$ pa je $Y = 0$ g.s., tj. X ima Bernoullijevu razdiobu.

Kako računamo očekivanje? Znamo da za slučajnu varijblu X na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vežemo i pripadni vjerojatnosni prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ gdje je $\mathbb{P}_X$ vjerojatnost generirana s X, tj. $\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}_X(B)$. Takozvanom Lebesgueovom indukcijom lako se pokaže sljedeći teorem:

Teorem 4.6 (Osnovni teorem o transformaciji integrala)**.** *Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelova i $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Tada*

$$\int\limits_{X^{\leftarrow}(B)} g(X(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int\limits_{B} g(x)d\mathbb{P}_X(x),$$

u smislu da ako jedan integral postoji, postoji i drugi i jednaki su.

Pomoću gornjeg teorema vrlo lako pokažemo (ponovno Lebesgueovom indukcijom po g) da

(a) ako je X diskretna konventrirana na prebrojivom skupu D, onda

$$\mathbb{E}g(X) = \sum_{x \in D} g(x)\mathbb{P}(X = x),$$

(b) ako je X aps. neprekidna s gustoćom f, onda

$$\mathbb{E}g(X) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)d\lambda(x).$$

DZ 4.7. Dokažite prethodni Teorem i izvedite gornje formule za očekivanje diskretne i apsolutno neprekidne slučajne varijable.

Napomena 4.8. Ako su $(X_n)_n$ nezavisne, onda $\mathbb{E}[\prod_{k=1}^n X_k] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k]$ i $\mathrm{Var}(\sum_{k=1}^n X_k) = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k)$.
Prisjetimo se, $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$.

Zadatak 4.9. Neka je $X \sim N(0, 1)$. Izračunajte $\mathbb{E}[X^n]$.

Rješenje. Neka je $I_n = \mathbb{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$. Budući da eksponencijalna funkcija brže raste od svih potencija, lako se vidi da $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ stoga ima smisla računati I_n.

Primijetimo da je za n neparan, funkcija $x \mapsto x^n$ neparna, stoga je u tom slučaju $I_n = 0$.

Neka je $n = 2k$ paran. Imamo

$$\begin{aligned} I_n = I_{2k} = 2 \int_0^{\infty} x^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= 2x^{2k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \Big|_0^{\infty} + 2(2k-1) \int_0^{\infty} x^{2k-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= (2k-1)I_{2k-2} = (2k-1)(2k-3)\ldots 3\mathbb{E}[X^2] = (2k-1)!! \end{aligned}$$

DZ 4.10. Izračunajte $\mathbb{E}[X^n]$ za $X \sim N(0, \sigma^2)$.

Zadatak 4.11. Odredite

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + F(x)^2} dF(x)$$

gdje je F topološki neprekidna vjerojatnosna funkcija distribucije.

Rješenje. Neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije $F_X = F$.

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + F(x)^2} dF(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{1 + F(X)^2} d\mathbb{P} = \mathbb{E}\left[\frac{1}{1 + F(X)^2}\right].$$

Budući da po Zadatku 3.19 vrijedi $F(X) \sim U(0, 1)$, imamo

$$I = \mathbb{E}\left[\frac{1}{1 + U^2}\right] = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Primjer 4.12. Dokažimo da Cauchyjeva slučajna varijabla $X \sim C(0, 1)$ nema očekivanje.

$$\mathbb{E}|X| = \int_{\mathbb{R}} |x| \frac{1}{\pi(1 + x^2)} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{x}{\pi(1 + x^2)} = \ln\left(\frac{1}{\pi(1 + x^2)}\right)|_0^{\infty} = \infty.$$

4.1 Granični teoremi za matematičko očekivanje

Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli u $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- (LTMK) Neka $X_n \geq 0$ g.s., $n \in \mathbb{N}$ i $X_n \uparrow X$ (g.s.), tada $\mathbb{E}X_n \uparrow \mathbb{E}X$.
- (LTDK) Neka $|X_n| \leq Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ g.s., $n \in \mathbb{N}$ i $X_n \to X$ (g.s.), tada $\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X$.
- (Fatouova lema) Neka $X_n \geq 0$ g.s. Tada $\mathbb{E}[\liminf_n X_n] \leq \liminf_n \mathbb{E}X_n$.
- (Beppo-Levi) Neka $X_n \geq 0$ g.s. Tada $\mathbb{E}[\sum_n X_n] = \sum_n \mathbb{E}X_n$.

4.2 Važne nejednakosti

Neka su X, Y slučajne varijable na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takve da su očekivanja u kojima će se one pojavljivati konačna:

- (Kolmogorovljeva nejednakost) Neka je $g : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ parna, neopadajuća na $[0, \infty\rangle$ i Borelova. Tada za sve $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{g(\varepsilon)}.$$

- (Markovljeva nejednakost) Za $r > 0$ i svaki $\varepsilon > 0$ je

$$\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^r]}{\varepsilon^r}.$$

- (Čebiševljeva nejednakost) Za svaki $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

- (Hölderova nejednakost) Za $p, q \geq 1$ takve da $1/p + 1/q = 1$ vrijedi

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} (\mathbb{E}|Y|^q)^{1/q}.$$

- (Minkovskijeva nejednakost) Za $p \geq 1$ vrijedi

$$(\mathbb{E}|X + Y|^p)^{1/p} \leq (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p} + (\mathbb{E}|Y|^p)^{1/p}.$$

Zadatak 4.13. Neka je $X \geq 0$ slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pokažite

$$\mathbb{E}X < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(n \leq X < n+1) < \infty.$$

Rješenje. Definirajmo $A_n = X^{\leftarrow}([n, n+1\rangle)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Dakle, $\Omega = \cup_{n=0}^{\infty} A_n$ pri čemu je unija disjunktna. Imamo

$$\mathbb{E}X = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} X d\mathbb{P} = (\star).$$

Pretpostavimo $\mathbb{E}X < \infty$. Imamo

$$(\star) \implies \mathbb{E}X \geq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} n d\mathbb{P} = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(n \leq X < n+1).$$

Pretpostavimo da $\sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(n \leq X < n+1) < \infty$. Tada

$$\mathbb{E}X \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} (n+1) d\mathbb{P} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\mathbb{P}(A_n) < \infty$$

jer $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$.

Zadatak 4.14. Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\mathbb{E}[|X| \wedge 1] \leq \varepsilon + \mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon).$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X| \wedge 1] &= \mathbb{E}[|X| \wedge 1; |X| > \varepsilon] + \mathbb{E}[|X| \wedge 1; |X| \leq \varepsilon] \\ &\leq \mathbb{P}(|X| > \varepsilon) + \varepsilon.\end{aligned}$$

DZ 4.15. Pokažite da niz $(X_n)_n$ konvergira po vjerojatnosti k X ako i samo ako $\lim_n \mathbb{E}[|X_n - X| \wedge 1] = 0$.

Primjer 4.16 (Eksponencijalna brzina konvergencije u slabom zakonu velikih brojeva)**.** Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s konačnim očekivanjem. Kasnije u kolegiju pokazat će se da

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[(g.s.)]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1].$$

U praksi je bitno da znamo koliko brzo se događa konvergencija. Za velike $n \in \mathbb{N}$ pitamo se kolika je greška $\mathcal{E}_n = \left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \mathbb{E}X_1\right|$, tj. gornja ograda za grešku.

Primijetimo da je $\mathcal{E}_n = \left|\frac{\tilde{X}_1+\cdots+\tilde{X}_n}{n}\right|$, gdje je $\tilde{X}_i = X_i - \mathbb{E}X_i$. Koristeći Kolmogorovljevu nejednakost za $g(x) = e^{t|x|}$ uz pretpostavku $\mathbb{E}[e^{t|X_1|}] < \infty$ imamo

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_n \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{t(|\tilde{X}_1|+\cdots+|\tilde{X}_n|)}]}{e^{tn\varepsilon}} = \frac{\prod_{k=1}^n \mathbb{E}e^{t|\tilde{X}_k|}}{e^{tn\varepsilon}} = e^{-n(t\varepsilon - \ln m_1)},$$

gdje je $m_1 = \mathbb{E}[e^{t|\tilde{X}_1|}]$.

Zadatak 4.17. Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takva da $\mathbb{E}[X] = 0$ i $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$. Dokažite da za sve $a > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

Rješenje. Obična Čebiševljeva nejednakost neće dati dobru ocjenu. Primijetimo da ako je X simetrična, onda Čebiševljeva nejednakost daje $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{2a^2}$, tj. za male vrijednosti od $a > 0$, ocjena iz zadatka je puno bolja.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq a) &= \mathbb{P}(X + t \geq a + t) \leq \mathbb{P}(|X + t| \geq a + t) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}[(X+t)^2]}{(a+t)^2} = \frac{\sigma^2 + t^2}{a^2 + 2at + t^2}, \quad \forall t > -a.
\end{aligned}
$$

Posljednji izraz je minimalan za $t = \sigma^2/a$ čime dobivamo traženu nejednakost.

5 Konvergencija slučajnih varijabli

Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Kažemo da niz $(X_n)_n$ konvergira

- gotovo sigurno (g.s.) k X ako

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1,$$

  što označujemo s $X_n \xrightarrow{(g.s.)} X$.

- po vjerojatnosti k X ako za svaki $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0,$$

  što označujemo s $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

- u srednjem reda $p \geq 1$ (ili u $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$) k X ako

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0,$$

  što označujemo s $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

- po distribuciji k X ako

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \quad x \in C(F_X),$$

  gdje je $C(F_X)$ skup svih točaka u kojima je funkcija F_X neprekidna. Ovakvu konvergenciju označavamo s $X_n \xrightarrow{D} X$.

Napomena 5.1 (Svojstva konvergencija)**.** (a) Primijetimo da za konvergenciju po distribuciji nije nužno da su sve varijable definirane na istom vjerojatnosnom prostoru jer promatramo samo njihove funkcije distribucije.

(b) Vrijedi sljedeći odnos među konvergencijama:

$$\begin{tikzcd}
\text{(g.s.)} \arrow[dr, Rightarrow] & & L^p \arrow[dl, Rightarrow] \\
& \mathbb{P} \arrow[d, Rightarrow] & \\
& D &
\end{tikzcd}$$

(c) Limes (g.s.) je (g.s.) jedinstven te vrijedi za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$X_n \xrightarrow{(g.s.)} X,\, Y_n \xrightarrow{(g.s.)} Y \implies \alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{(g.s.)} \alpha X + \beta Y.$$

(d) Limes u L^p je jedinstven (g.s.) te vrijedi za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$X_n \xrightarrow{L^p} X,\, Y_n \xrightarrow{L^p} Y \implies \alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{L^p} \alpha X + \beta Y.$$

(e) Limes po vjerojatnosti je (g.s.) jedinstven te vrijedi za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X,\, Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y \implies \alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \alpha X + \beta Y.$$

(f) Limes po distribuciji ima jedinstvenu razdiobu, ali **nije** jedinstven čak i ako su sve varijable na istom vjerojatnosnom prostoru, tj. možemo imati niz $(X_n)_n$ na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ koji konvergira i k X i k Y na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ali $X \neq Y$.
Također, ako $X_n \xrightarrow{D} X$ i $Y_n \xrightarrow{D} Y$, tada **ne mora** $\alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{D} \alpha X + \beta Y$.

(g) Ako $X_n \xrightarrow{D} c$, tada $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$.

(h) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ ako i samo ako za svaki podniz $(X_{n_k})_k$ postoji podpodniz $(X_{n_{k_l}})_l$ koji konvergira (g.s.) prema X.

(i) $X_n \xrightarrow{(g.s.)} X$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon \geq 0$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

DZ 5.2. Dokažite tvrdnje iz prethodne napomene.

Zadatak 5.3. Neka $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna. Tada $g(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(X)$.

Rješenje. Iskoristi se Napomena 5.1(h).

Zadatak 5.4. Neka $1 \leq p \leq q < \infty$. Dokažite: $X_n \xrightarrow{L^q} X \implies X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Rješenje. Iskoristi se Hölderova nejednakost.

Zadatak 5.5. (a) Pokažite da obratna implikacija u prethodnom zadatku ne vrijedi. (**DZ**)

(b) Neka $X_n, X, Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $n \in \mathbb{N}$ i $X_n \xrightarrow{L^2} X$. Pokažite da $ZX_n \xrightarrow{L^1} ZX$, ali ne mora $ZX_n \xrightarrow{L^2} ZX$.

Rješenje. (a) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda_{|[0,1]})$ te neka su slučajne varijable definitane tako dab $X_n(\omega) = n\mathbf{1}_{[0,1/n^2]}(\omega)$. Tada $X_n \longrightarrow 0$ u L^1, ali ne i u L^2.

(b) $\mathbb{E}[|ZX_n - ZX|^2] \leq (\mathbb{E}|Z|^2)^{1/2}(\mathbb{E}|X_n - X|^2)^{1/2} \to 0$ što pokazuje prvi dio zadatka. Za drugi dio zadatka uzmimo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda_{|[0,1]})$, $X_n(\omega) = \sqrt{n}\mathbf{1}_{[0,1/n^2]}(\omega)$, $Z(\omega) = \omega^{-1/3}$. Vidimo da: $X_n \longrightarrow 0$ u L^2 i $\mathbb{E}Z^2 = \int_0^1 \omega^{-2/3} d\omega = 3$, tj. $Z \in L^2$. Ipak

$$\mathbb{E}[(ZX_n)^2] = \int_0^1 \omega^{-2/3} n\mathbf{1}_{[0,1/n^2]}(\omega) d\omega = \int_0^{1/n^2} n\,\omega^{-2/3} d\omega = 3n^{1/2} \to \infty.$$

DZ 5.6. Pokažite da sve druge implikacije iz Napomene 5.1(b) ne vrijede.

Zadatak 5.7. Neka je $(X_n)_n$ niz na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ koji je padajući (g.s.), tj. $X_{n+1} \leq X_n$ (g.s.) za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da tada vrijedi $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ ako i samo ako $X_n \xrightarrow{(g.s.)} 0$.

Rješenje. Potrebno je dokazati samo da konvergencija po vjerojatnosti povlači konvergenciju (g.s.). Neka $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, posebno postoji podniz $(X_{n_k})_k$ koji konvergira k 0 (g.s.), i neka je skup na kojem se događa konvergencija Ω'. Zbog montonosti niza X_n imamo za svaki $m \geq n_k$ i $\omega \in \Omega'$

$$0 \leq X_m(\omega) \leq X_{n_k}(\omega).$$

Dakle, $X_n \xrightarrow{(g.s.)} 0$.

DZ 5.8. Neka je $(X_n)_n$ niz na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ koji je monoton (g.s.). Dokažite da tada vrijedi $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ ako i samo ako $X_n \xrightarrow{(g.s.)} X$.

Zadatak 5.9. Neka $X_n \xrightarrow{(g.s.)} X$ i $Z \in L^1$ takva da $|X_n|^p \leq Z$. Pokažite da $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Rješenje. Lagana primjena LTDK-a.

Zadatak 5.10 (Scheffeova lema). Neka $X_n \xrightarrow{(g.s.)} X$ i $X_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Pokažite da $\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X < \infty \implies X_n \xrightarrow{L^1} X$.

Rješenje. Primijetimo $|X_n - X| = X_n - X + 2(X - X_n)^+$. Dakle

$$\mathbb{E}[|X_n - X|] = \underbrace{\mathbb{E}[X_n] - \mathbb{E}[X]}_{\to 0} + 2\mathbb{E}[(X - X_n)^+].$$

Međutim, kako je $X_n \geq 0$ imamo $(X - X_n)^+ \leq X^+ = X$ pa možemo primijeniti LTDK na drugi izraz u gornjem raspisu i dobiti tvrdnju.

Zadatak 5.11. Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Neka $X_n \sim Exp(n)$, $n \in N$. Konvergira li niz po vjerojatnosti?

(b) Neka $X_n = e^{\frac{1}{n}} \mathbf{1}_{[\frac{n-1}{2n}, 1\rangle}(U)$, $n \in \mathbb{N}$, gdje je $U \sim U(0,1)$. Konvergira li niz $(X_n)_n$ u L^p, $p \geq 1$?

(c) $X_n = \sqrt{n}\mathbf{1}_{(0,1/n)}(U)$, $n \in \mathbb{N}$, gdje je $U \sim U(0,1)$. Konvergira li niz $(X_n)_n$ po vjerojatnosti? A u L^p?

Rješenje. (a) Imamo $X_n \geq 0$ i $\mathbb{E}X_n = 1/n$ pa $X_n \longrightarrow 0$ u L^1, a time i po vjerojatnosti.

(b) Promatramo konvergenciju (g.s.) da naslutimo koji bi bio kandidat za limes.

$$X_n(\omega) = e^{\frac{1}{n}} \mathbf{1}_{[\frac{n-1}{2n}, 1\rangle}(U(\omega)) \longrightarrow \mathbf{1}_{[1/2, 1\rangle}(U(\omega)), \quad n \to \infty.$$

Pokažimo sada konvergenciju u L^p prema $X = \mathbf{1}_{[1/2,1\rangle}(U)$.

$$\begin{aligned}
(\mathbb{E}[|X_n - X|^p])^{1/p} &= (\mathbb{E}[|e^{\frac{1}{n}} \mathbf{1}_{[\frac{n-1}{2n}, 1\rangle}(U) - \mathbf{1}_{[1/2,1\rangle}(U)|^p])^{1/p} \\
&= (\mathbb{E}[|e^{\frac{1}{n}} \mathbf{1}_{[\frac{n-1}{2n}, 1/2\rangle}(U) + (e^{\frac{1}{n}} - 1)\mathbf{1}_{[1/2,1\rangle}(U)|^p])^{1/p} \\
&= e^{1/n}\frac{1}{2n} + (e^{1/n} - 1)\frac{1}{2} \to 0.
\end{aligned}$$

(c) Očito niz konvergira k 0 (g.s.), a onda i po vjerojatnosti. Što se tiče konvergencije u L^p imamo

$$\mathbb{E}[|X_n|^p] = n^{p/2}\frac{1}{n} = n^{p/2-1},$$

tj. $X_n \xrightarrow{L^p} 0$ samo ako je $p < 2$.

Zadatak 5.12. Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takav da $X_n \sim N(\mu, \sigma_n^2)$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažite:

(a) ako $\sigma_n \to 0$, onda niz $(X_n)_n$ konvergira u L^1;

(b) ako $\sigma_n \to \sigma > 0$, tada $(X_n)_n$ konvergira po distribuciji;

(c) ako $\sum_n \sigma_n^2 < \infty$, tada $(X_n)_n$ konvergira (g.s.)

Rješenje. (a) Dokazat ćemo konvergenciju u L^2 koja će povlačiti konvergenciju u L^1. Budući da niz standardnih devijacija konvergira u 0, logičan kandidat za limes bit će μ. Imamo

$$E[(\underbrace{X_n - \mu}_{\sim N(0,\sigma_n^2)})^2] = \sigma_n^2 \longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

čime smo pokazali tvrdnju.

(b) Kandidat za limes bi bio $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. $C(F_X) = \mathbb{R}$ pa uzmimo $x \in \mathbb{R}$ i pogledajmo

$$F_{X_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma_n^2}}\, dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt = F_X(x).$$

po LTDK.

(c) Prisjetimo se $\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(X_n) = \mathbb{E}[(X_n - \mu)^2]$ pa je po Beppo-Levijevom teoremu

$$\infty > \sum_n \sigma_n^2 = \sum_n \mathbb{E}[(X_n - \mu)^2] = \mathbb{E}\left[\sum_n (X_n - \mu)^2\right],$$

čime smo dobili da je $\sum_n (X_n - \mu)^2 < \infty$ (g.s.), a to po nužnom uvjetu konvergencije reda to povlači $\lim_n (X_n - \mu)^2 = 0$ (g.s.), tj. $X_n \xrightarrow{(g.s.)} \mu$.

DZ 5.13. Neka $X_n \xrightarrow{D} X$ i neka je $c \in \mathbb{R}$. Dokažite da $cX_n \xrightarrow{D} cX$ i $X_n + c \xrightarrow{D} X + c$. Kako izgledaju skupovi $C(F_{X+c})$ i $C(F_{cX})$ u odnosu na $C(F_X)$?

Zadatak 5.14 (Slutskyjeva lema)**.** Neka $X_n \xrightarrow{D} X$ i $Y_n \xrightarrow{D} c \in \mathbb{R}$. Dokažite:

(a) $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + c$,

(b) $X_n Y_n \xrightarrow{D} cX$.

Rješenje. (a) Dovoljno je pokazati tvrdnju za $c = 0$. Neka su $x \in C(F_X)$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni. Imamo $\mathbb{P}(X_n + Y_n \le x) = \mathbb{P}(X_n + Y_n \le x, |Y_n| < \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n + Y_n \le x, |Y_n| \ge \varepsilon)$. Stoga

$$\mathbb{P}(X_n \le x - \varepsilon) - \mathbb{P}(|Y_n| \ge \varepsilon) \le \mathbb{P}(X_n + Y_n \le x) \le \mathbb{P}(X_n \le x + \varepsilon) + \mathbb{P}(|Y_n| \ge \varepsilon)$$

iz čega slijedi tvrdnja.

(b) Ponovno je dovoljno pokazati tvrdnju za $c = 0$. Primijetimo da je tada $X_n Y_n \xrightarrow{D} 0$ pa je dovoljno pokazati konvergenciju po mjeri. Neka su $\varepsilon, \widetilde{\varepsilon} > 0$ proizvoljni. Dokazat ćemo $\lim_n \mathbb{P}(|X_n Y_n| \ge \varepsilon) = 0$. Neka je $x_M \in C(F_X)$ takav da $\mathbb{P}(-x_M \le X \le x_m) > 1 - \widetilde{\varepsilon}$. Neka je $\delta > 0$ takav da $\varepsilon/\delta > x_M$. Imamo

$$\begin{aligned} 0 &\le \mathbb{P}(|X_n Y_n| \ge \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n Y_n| \ge \varepsilon, |Y_n| < \delta) + \mathbb{P}(|X_n Y_n| \ge \varepsilon, |Y_n| \ge \delta) \\ &\le \mathbb{P}(|X_n| \ge \varepsilon/\delta) + \mathbb{P}(|Y_n| \ge \delta) \le \mathbb{P}(|X_n| \ge x_M) + \mathbb{P}(|Y_n| \ge \delta) \\ &\le \widetilde{\varepsilon} + \mathbb{P}(|Y_n| \ge \delta). \end{aligned}$$

Uzimanjem limesa dobijamo tvrdnju.

Napomena 5.15. Prethodni zadatak pokazuje da ako $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{D} c \in \mathbb{R}$ i $Z_n \xrightarrow{D} d \in \mathbb{R}$, tada $X_n Y_n + Z_n \xrightarrow{D} cX + d$.

Zadatak 5.16. Neka je $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $A \in \mathcal{F}$ sa svojstvom $\mathbb{P}(A) < \delta$ vrijedi $\int_A |X| d\mathbb{P} < \varepsilon$.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta_n := \frac{1}{n}$ postoji $A_n \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(A_n) < \frac{1}{n}$ i $\int_{A_n} |X| d\mathbb{P} \ge \varepsilon$. Tada $\mathbf{1}_{A_n} \longrightarrow 0$ u L^1, te postoji njegov podniz koji konvergira (g.s.) Neka je $(A_{n_k})_k$ takav podniz. Budući da onda vrijedi i $|X|\mathbf{1}_{A_{n_k}} \xrightarrow{(g.s.)} 0$, iz LTDK imamo

$$0 = \lim_k \int_{A_{n_k}} |X| d\mathbb{P} \ge \varepsilon,$$

što je kontradikcija.

Zadatak 5.17 (LTDK s konvergencijom po mjeri)**.** Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnostni prostor te neka su na njemu dane slučajne varijable Y, X, X_n, $n \in \mathbb{N}$ takve da $|X_n| \le Y$ i $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Dokažite: ako $Y \in L^p$, onda $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Rješenje. Primijetimo da iz pretpostavki slijedi i da $|X| \le Y$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada je

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] &= \mathbb{E}[|X_n - X|^p; |X_n - X| < \varepsilon] + \mathbb{E}[|X_n - X|^p; |X_n - X| \ge \varepsilon] \\ &\le \varepsilon^p + 2^p \int_{|X_n - X| \ge \varepsilon} Y^p d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Sada Zadatak 5.16 povlači tvrdnju.

DZ 5.18 (Theorem 3.2.2 u [2]). Pretpostavimo da $X_n \xrightarrow{D} X$. Nađite vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ na kojem su sve varijable $(X_n)_n$ i X dobro definirane te da na tom vjerojatnosnom prostoru vrijedi $X_n \xrightarrow{(g.s.)} X$.

6 Nezavisnost i funkcije slučajnih varijabli

6.1 Nezavisnost

Definicija 6.1. *Kažemo da je familija* $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ *nezavisna ako* $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \mathcal{I})$ *i proizvoljne* $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_{i_1} \in B_1, \dots, X_{i_n} \in B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_{i_k} \in B_k). \tag{1}$$

Pokazano je na predavanjima da je (1) ekvivalentno s

$$F_{X_{i_1},\dots,X_{i_n}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_{i_k}}(x_k), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Ako su $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$ neprekidne, tada je (1) također ekvivalentno s

$$f_{X_{i_1},\dots,X_{i_n}}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_{i_k}}(x_k), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Uočimo da je (1) $\iff$ (2) u slučaju i kada su $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$ diskretne uz oznaku $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$.

Napomena 6.2 (Svojstva nezavisnih varijabli)**.** Neka su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne.

(a) Ako su funkcije $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ i $h : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}$ Borelove, tada su nezavisne i slučajne varijable $g(X_1, \dots, X_k)$ i $h(X_{k+1}, \dots, X_n)$.

(b) Vrijedi $\mathbb{E}[\prod_{k=1}^n X_k] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}X_k$.

(c) Vrijedi $\mathrm{Var}(\sum_{k=1}^n X_k) = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}X_k$.

Zadatak 6.3. Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable. Izrazite distribucije slučajnih varijabli $X + Y$ i X/Y (uz $\mathbb{P}(Y \leq 0) = 0$) preko funkcija distribucija od X i Y.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
F_{X+Y}(z) = \mathbb{P}(X + Y \leq z) &= \int\limits_{\{\omega \in \Omega : X(\omega) + Y(\omega) \leq z\}} d\mathbb{P} = \iint\limits_{x+y \leq z} \mathbb{P}_{X,Y}(dx, dy) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\langle -\infty, z-x]} d\mathbb{P}_Y(y) d\mathbb{P}_X(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} F_Y(z - x) \mathbb{P}_X(dx) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z - x) F_X(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z - y) F_Y(dy).
\end{aligned}$$

$$F_{X/Y}(z) = \mathbb{P}(X/Y \leq z) = \iint\limits_{x/y \leq z} F_{X,Y}(dx, dy)$$

$$\overset{(y \geq 0)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{yz} dF_Y(y) dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(yz) F_Y(dy).$$

Zadatak 6.4. Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable i $r > 0$. Pokažite da $\mathbb{E}[|X+Y|^r] < \infty$ ako i samo ako $\mathbb{E}[|X|^r] < \infty$ i $\mathbb{E}[|Y|^r] < \infty$.

Rješenje. Smjer ($\Longleftarrow$) je trivijalan jer slijedi direktno iz Minkowskijeve nejednakosti te za taj smjer nije potrebna pretpostavka nezavisnosti.

Dokažimo smjer ($\Longrightarrow$). Primijetimo

$$\mathbb{E}\big[|X+Y|^r\big] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |x+y|^r \mathbb{P}_X(dx) \mathbb{P}_Y(dy) = \int_{\mathbb{R}} h(y) \mathbb{P}_Y(dy) < \infty,$$

pri čemu je $h(y) = \int_{\mathbb{R}} |x+y| \mathbb{P}_X(dx)$. Po Fubinijevom teoremu h je izmjeriva te postoji $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da $h(y_0) < \infty$. Time smo pokazali

$$\mathbb{E}|X|^r \leq 2^r \left(\mathbb{E}[|X+y_0|^r] + |y_0|^r\right) < \infty.$$

Zbog simetrije isto vrijedi i za Y.

Zadatak 6.5. Neka su slučajne varijable X i Y nezavisne i takve da $\mathbb{P}$-g.s. vrijedi $XY = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dokažite da su tada i X i Y degenerirane (tj. $\mathbb{P}$-g.s. konstante),

Rješenje. Računamo

$$1 = \mathbb{P}(XY = c) = \iint_{xy=c} \mathbb{P}_X(dx) \mathbb{P}_Y(dy) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_X\left(\left\{\frac{c}{y}\right\}\right) \mathbb{P}_Y(dy).$$

Time smo dobili da $\mathbb{P}_X(\{\frac{c}{y}\}) = 1$ za $\mathbb{P}_Y$-g.s. $y \in \mathbb{R}$, tj. $\mathbb{P}_X(\{\frac{c}{Y}\}) = 1$ $\mathbb{P}$-g.s. Preciznije, postoji $\Omega' \subseteq \Omega$ takav da $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ sa svojstvom da za svaki $\omega \in \Omega'$ vrijedi $\mathbb{P}_X(\{\frac{c}{Y(\omega)}\}) = 1$. Kada bi postojali $\omega_1, \omega_2 \in \Omega'$ takvi da $Y(\omega_1) \neq Y(\omega_2)$, dobili bismo $\mathbb{P}_X(\{\frac{c}{Y(\omega_1)}, \frac{c}{Y(\omega_2)}\}) = 2$. Dakle, Y je degenirarna.

DZ 6.6. Probajte riješiti prethodni zadatak elementarnim tehnikama, tj. koristeći samo funkcije distribucije (tj. prva tri poglavlja ovih vježbi). Ako ne uspijete, rješenje možete naći ovdje. (Stranici zadnji put pristupljeno 29.12.2020.)

Zadatak 6.7. Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne jednakodistribuirane slučajne varijable s funkcijom distribucije F. Odredite F_X i F_Y ako je

$$X = \max\{X_1, \ldots, X_n\}, \quad Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Također, odredite funkciju distribucije F_k slučajne varijable $X_{(k)}$ (k-ta po veličini slučajna varijabla, tj. $X_{(1)} \leq \ldots X_{(k-1)} \leq X_{(k)} \leq X_{(k+1)} \leq \ldots X_{(n)}$).

Rješenje. Primijetimo da je $X = X_{(n)}$ i $Y = X_{(1)}$.

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \le x) = \mathbb{P}(X_1 \le x, \ldots, X_n \le x) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \le x) = F(x)^n, \\
F_Y(x) &= \mathbb{P}(\min\{X_1, \ldots, X_n\} \le x) = 1 - \mathbb{P}(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > x) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, \ldots, X_n > x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > x) = 1 - (1 - F(x))^n.
\end{aligned}$$

Za k-tu po redu varijablu primijetimo

$$\begin{aligned}
\{X_{(k)} \le x\} &= \{\text{barem } k \text{ sl. var. od } X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ je manje od } x\} \\
&= \bigcup_{m=k}^{n} \underbrace{\{\text{točno } m \text{ sl. var. od } X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ je manje od } x\}}_{=:A_m}
\end{aligned}$$

Uočimo da su $(A_m)_{m=k}^n$ međusobno disjunktni i da je A_m unija $\binom{n}{m}$ različitih događaja oblika

$$\{X_{i_1} \le x, X_{i_2} \le x, \ldots, X_{i_m} \le x, X_{i_{m+1}} > x, X_{i_{m+2}} > x, \ldots, X_{i_n} > x\} \in \mathcal{F}, \tag{3}$$

gdje je $(i_1, \ldots, i_n)$ neka permutacija od $(1, \ldots, n)$. Dakle, A_m je izmjeriv skup pa je $X_{(k)}$ zaista slučajna varijabla. Također, svi događaji iz (3) su jednakovjerojatni te vrijedi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_1 \le x, \ldots, X_m \le x, X_{m+1} > x, \ldots, X_n > x) = F(x)^m (1 - F(x))^{n-m} \\
&\implies \mathbb{P}(A_m) = \binom{n}{m} F(x)^m (1 - F(x))^{n-m} \\
&\implies \mathbb{P}(X_{(k)} \le x) = \sum_{m=k}^{n} \mathbb{P}(A_m) = \sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m} F(x)^m (1 - F(x))^{n-m}.
\end{aligned}$$

DZ 6.8. Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne jednakodistribuirane slučajne varijable s funkcijom gustoće f. Odredite funkciju gustoće f_k slučajne varijable $X_{(k)}$ (k-ta po veličini slučajna varijabla, tj. $X_{(1)} \le \ldots X_{(k-1)} \le X_{(k)} \le X_{(k+1)} \le \ldots X_{(n)}$).

Napomena 6.9. Kažemo da su dvije slučajne varijable s konačnim varijancama X i Y **nekorelirane** ako je $Cov(X, Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = 0$. Primijetimo da je $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ te da imamo

$$X, Y \text{ nezavisne} \implies X, Y \text{ nekorelirane}$$

dok obrat ne vrijedi. Naime,

(a) Za $(X,Y) \sim U(B(0,1))$ imamo $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_{B(0,1)}(x,y)$ pa je $f_X(t) = f_Y(t) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-t^2}\,\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ pa X i Y nisu nezavisne jer $f_X \cdot f_Y \neq f_{X,Y}$, ali su nekorelirane jer

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= \int_{B(0,1)} \frac{xy}{\pi} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r\cos\varphi r \sin\varphi r}{\pi} drd\varphi \\ &= \frac{1}{3\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\varphi}{2} d\varphi = 0. \end{aligned}$$

(b) Za $X \sim N(0,1)$ i $Y = X^2$ očito imamo da su X i Y nekorelirane, ali zavisne.

6.2 Zakoni 0-1

Prisjetimo se da za niz događaja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiramo događaj

$$\limsup_n A_n := \{A_n \text{ b.m.p.}\} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

pri čemu oznaka dolazi iz činjenice da $\omega \in \{A_n \text{ b.m.p.}\}$ ako i samo ako se ω nalazi u beskonačno mnogo skupova A_n, $n \in \mathbb{N}$.

Teorem 6.10 (Borel-Cantellijev zakon 0-1)**.** *Neka je $(A_n)_n$ niz događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ako je $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, tada je $\mathbb{P}(A_n \text{ b.m.p.}) = 0$. Ako su k tome događaji i nezavisni, tada ako je $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, onda je $\mathbb{P}(A_n \text{ b.m.p.}) = 1$.*

Teorem 6.11 (Kolmogorovljev zakon 0-1)**.** *Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli te neka je $A \in \mathcal{F}_\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ repni događaj ($\mathcal{F}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$). Tada je $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$. Također, ako je je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $(\mathcal{F}_\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-izmjeriva, onda je $X = c$ (g.s.).*

Zadatak 6.12. Dokažite da za svaki niz slučajnih varijabli $(X_n)_n$ postoji niz konstanti $(c_n)_n$ takav da $c_n \to \infty$ i $\frac{X_n}{c_n} \to 0$ (g.s.).

Rješenje. Koristit ćemo Borel-Cantelli lemu. Uzmimo padajući niz $(\varepsilon_n)_n$ pozitivnih brojeva takav $\varepsilon_n \to 0$. Možemo uzeti npr. $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Neka je $c_1 = 1$, te induktivno definiramo $c_n > 0$ takav da $c_n \geq c_{n-1} + 1$ i tako da

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{c_n}\right| \geq \varepsilon_n\right) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Sada po Borel-Cantellijevoj lemi za skupove $A_n = \left\{ \left| \frac{X_n}{c_n} \right| \geq \varepsilon_n \right\}$ imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

što povlači da je $\mathbb{P}(A_n \text{ b.m.p.}) = 0$, tj. za gotovo svaki $\omega \in \Omega$, postoji $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ imamo $\frac{X_n(\omega)}{c_n} < \varepsilon_n$. Time smo dobili da za gotovo svaki $\omega \in \Omega$ vrijedi $\frac{X_n(\omega)}{c_n} \to 0$.

Zadatak 6.13. Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli. Dokažite da $\sup_n X_n < \infty$ (g.s.) ako i samo ako $\sum_n \mathbb{P}(X_n > A) < \infty$ za neki $A > 0$.

Rješenje. Pretpostavimo da postoji $A > 0$ takav da $\sum_n \mathbb{P}(X_n > A) < \infty$. Borel-Cantellijeva lema povlači da $\mathbb{P}(X_n > A \text{ b.m.p.}) = 0$, tj. za gotovo svaki $\omega \in \Omega$ postoji $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n > n_0$ vrijedi $X_n(\omega) < A$. Označimo s $M := \max\{X_1(\omega), \ldots, X_{n_0}(\omega)\}$. Tada je $\sup_n X_n(\omega) \leq \max\{A, M\} < \infty$, tj. ono što smo pokazali je da $\sup_n X_n < \infty$ (g.s.).

Obratno, neka je $\sup_n X_n < \infty$ (g.s.) i pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi, tj. da za sve $A > 0$ imamo $\sum_n \mathbb{P}(X_n > A) = \infty$. Zbog nezavisnosti za sve $A > 0$ vrijedi $\mathbb{P}(X_n > A \text{ b.m.p.}) = 1$. Sada ćemo iskoristiti svojevrsni Cantorov dijagonalni postupak. Uzmimo niz $(A_m)_m = (m)_m$ za koji ćemo iskoristi ovo što smo dosad pokazali. Neka je Ω_1 t.d. $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ i neka je $(X_{1k})_k$ podniz od $(X_n)_n$ takav da

$$\begin{aligned} X_{1k} &> 1, \quad \forall \omega \in \Omega_1, k \in \mathbb{N}, \\ X_n &\leq 1, \quad \text{za sve ostale članove niza.} \end{aligned}$$

Neka je Ω_2 t.d. $\mathbb{P}(\Omega_2) = 1$ i neka je $(X_{2k})_k$ podniz od $(X_{1k})_k$ takav da

$$\begin{aligned} X_{2k} &> 2, \quad \forall \omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2, k \in \mathbb{N}, \\ X_n &\leq 1, \quad \text{za sve ostale članove niza } (X_{1k})_k. \end{aligned}$$

Primijetimo da je $\mathbb{P}(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 1$. Induktivno nastavljamo dalje. Definiramo $\tilde{\Omega} = \cap_k \Omega_k$ (te vrijedi $\mathbb{P}(\tilde{\Omega})) = 1$) te odabiremo dijagonalni podniz $(X_{kk})_k$. Za njega vrijedi da za svaki $\omega \in \tilde{\Omega}$ vrijedi $X_{kk}(\omega) > k$ čime smo dobili da $\sup_n X_n = \infty$ (g.s.) što je kontradikcija.

Napomena 6.14 (VAŽNO!). Uočite da $\sup_n X_n < \infty$ (g.s.) NE ZNAČI da postoji $M > 0$ takav da $\sup_n X_n < M$ (g.s.), tj. da za gotovo svaki $\omega \in \Omega$ vrijedi $\sup_n X_n(\omega) < M$, već da poredak kvantifikatora ide u drugom redoslijedu: za gotovo svaki $\omega \in \Omega$ postoji $M = M(\omega) > 0$ takav da $\sup_n X_n(\omega) < M$.

Zadatak 6.15. Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli. Pokažite da niz $(X_n)_n$ konvergira (g.s.) ako i samo ako je niz degeneriran, tj. ako i samo ako postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $X_1 = c$ (g.s.) (a onda i $X_n = c$ (g.s.), $n \in \mathbb{N}$).

Rješenje. Iskoristit ćemo Kolmogorovljev zakon 0-1. Pretpostavimo da imamo niz koji konvergira (g.s.). Budući da je niz n.j.d., a (g.s.) konvergencija povlači konvergenciju po distribuciji, limes mora imati istu distribuciju kao i početni niz. Međutim, iz Kolmogorovljevog zakona 0-1 slijedi da je $\lim_n X_n$ $\mathcal{F}_\infty$-izmjeriva funkcija. Naime, $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \lim\limits_{n\geq k, n\to\infty} X_n$ pa je $\lim_n X_n$ $\mathcal{F}_k$-izmjeriva, za svaki $k \in \mathbb{N}$. To po definiciji od $\mathcal{F}_\infty$ povlači da je $\lim_n X_n$ $\mathcal{F}_\infty$-izmjeriva, stoga limes mora biti degenerirana slučajna varijabla. Time smo dokazali tvrdnju jer je obrat trivijalan.

DZ 6.16. Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli koji konvergira po vjerojatnosti. Dokažite da je limes degenerirana slučajna varijabla.

DZ 6.17. Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli i neka je $(b_n)_n \subset (0, \infty)$ takav da $b_n \to \infty$. Dokažite da je tada $\limsup_n \frac{S_n}{b_n}$ degenerirana, pri čemu je $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Napomena 6.18 (za one koji žele znati više*)**.** Nađite iskaz Hewitt–Savageovog zakona 0-1 te proučite kako kako se on primjenjuje na rezultate o povratnosti i prolaznosti općenite slučajne šetnje (v. [2, Poglavlje 4]).

6.3 Funkcije slučajnih varijabli

Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelova. Znamo da je $Y = g(X)$ također slučajna varijabla i da ima funkciju distribucije

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \in g^{\leftarrow}(\langle -\infty, y])) = \int_{g^{\leftarrow}(\langle -\infty, y])} dF_X(x).$$

Želimo neke opće uvjete na funkciju g tako da imamo

$$X \text{ neprekidna} \implies Y \text{ neprekidna}.$$

Napomena 6.19. (a) X diskretna $\implies$ Y diskretna.

(b) X neprekidna i $g(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ $\implies$ Y neprekidna.

(c) X neprekidna i $g(x) = c$ $\implies$ Y diskretna (degenerirana).

Teorem 6.20 (Teorem 11.8 u [3]). *Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Neka je $L = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$ te neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da*

(a) $g : L \to T \coloneqq g(L)$ je bijekcija,

(b) $g^{-1} \in C^1(T)$ i $\frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y) \neq 0, \forall y \in T$.

Tada je Y neprekidna slučajna varijabla s gustoćom

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))|\frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y)|\mathbf{1}_T(y).$$

Napomena 6.21. Iako je poprilično elementarna, $g(x) = x^2$ ne zadovoljava uvjete gornjeg teorema. S druge strane, znamo da ako je $X \sim N(0,1)$, onda je $X^2 \sim \chi^2(1)$. Srećom, gornji teorem se može modificirati pa ako postoji konačna ili prebrojiva particija $\{L_i\}_{i\in I}$ od L takva da $g_i = g|_{L_i}$ zadovoljavaju uvjete teorema, onda je

$$f_Y(y) = \sum_{i\in I} f_X(g_i^{-1}(y))|\frac{\partial}{\partial y} g_i^{-1}(y)|\mathbf{1}_{T_i}(y),$$

uz $g_i(L_i) = T_i$.
Također, iz skupa L možemo izbaciti točke $E \subset L$ ako s točkama u E ne vrijede pretpostavke Teorema 6.20 i ako $\mathbb{P}(X \in E) = 0$, npr. uvijek možemo izbaciti prebrojivo mnogo točaka.

Zadatak 6.22. X neprekidna slučajna varijabla s gustoćom f_X takvom da $f_X > 0$ na $\mathbb{R}$. Nađite gustoću slučajne varijble $Y = g(X)$ ako je

(a) $g(x) = \operatorname{arctg}(x)$,

(b) $g(x) = x^2$,

(c) $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$,

(d) $g(x) = \operatorname{tg}(x)$.

Rješenje. (a) $T = g(L) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, $g : L \to T$ je bijekcija te je $g^{-1}(x) = \operatorname{tg}(x) \in C^1(\mathbb{R})$. Vrijedi i $\frac{\partial}{\partial x} g^{-1}(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \neq 0$, za sve $x \in T$. Dakle,

$$f_Y(y) = f_X(\operatorname{tg}(y))\frac{1}{\cos^2(y)}\mathbf{1}_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}(y).$$

(b) g nije injekcija, ali na $L_1 = \langle -\infty, 0\rangle$ i $L_2 = \langle 0, \infty\rangle$ jest (i pritom izbacujemo 0 jer će ona kasnije stvoriti problem, ali to uvijek možemo i naknadno). Definiramo $g_i = x^2$, $g_i : L_i \to \langle 0, \infty\rangle =: T_i$, $i = 1, 2$. Dakle, $L_1 \cup L_2 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, te imamo $g_1^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ i $g_2^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Nadalje,

$$\frac{\partial}{\partial x} g_i^{-1}(x) = \frac{(-1)^i}{2\sqrt{x}} \neq 0, \quad x \in T_i = \langle 0, \infty\rangle.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} \mathbf{1}_{\langle 0,\infty\rangle}(y) + f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} \mathbf{1}_{\langle 0,\infty\rangle}(y) \\ &= (f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})) \frac{1}{2\sqrt{y}} \mathbf{1}_{\langle 0,\infty\rangle}(y), \end{aligned}$$

što je rezultat koju smo negdje već možda i vidjeli.

(c) **DZ**

(d) g nije injekcija i moramo je razbiti na prebrojivo podintervala na kojima je injekcija. Definiramo $L_n = \langle -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\rangle$, $g_n : L_n \to T = \mathbb{R}$, $g_n = \mathrm{tg}_{|L_n}$, $n \in \mathbb{Z}$. Kod inverza treba biti oprezan da pogodimo interval iz kojeg smo došli, stoga imamo $g_n^{-1}(x) = \mathrm{arctg}(x) + n\pi$, a vrijedi i $\frac{\partial}{\partial x} g_n^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2} \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Dakle,

$$f_Y(y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_X(\mathrm{arctg}(y) + n\pi) \frac{1}{1+x^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(y).$$

Zadatak 6.23. Neka je $X \sim U(0, 1)$ i $Y \sim Exp(\lambda)$. Ako je $Y \overset{D}{=} g(X)$, nađite funkciju g.

Rješenje. Nude se dva rješenja.

(1) Y je neprekidna sl. var. pa joj je funkcija distribucije neprekidna funkcija. Stoga

$$F_Y(Y) \sim U(0, 1),$$

po Zadatku 3.19. Dakle,

$$\begin{aligned} X &\overset{D}{=} F_Y(Y) = 1 - e^{-\lambda Y} \\ \implies -\frac{1}{\lambda} &\ln(1 - X) \overset{D}{=} Y. \end{aligned}$$

Dakle $g(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x)$.

(2) Pretpostavimo da postoji takva funkcija g i da zadovoljava uvjete Teorema 6.20, tj. $g : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, \infty\rangle$ je bijekcija, $g \in C^1$, te onda

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))|\frac{\partial}{\partial y}g^{-1}(y)|\mathbf{1}_{\langle 0,\infty\rangle}(y).$$

Međutim, mi znamo kako izgleda f_Y. Također, g je bijekcija pa stoga mora biti ili rastuća ili padajuća, a onda je takva i g^{-1}. Stoga, derivacija od g^{-1} ima stalan predznak pa pretpostavimo da je g rastuća. Dakle,

$$\lambda e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{\langle 0,\infty\rangle}(y) = \frac{\partial}{\partial y}g^{-1}(y)\mathbf{1}_{\langle 0,\infty\rangle}(y).$$

Riješimo ovu običnu diferencijalnu jednadžbu. Naravno, znamo da je rješenje $g^{-1}(y) = -e^{-\lambda y} + C$. Kako je g^{-1} rastuća slijedi da je $C = 1$. Dakle, $g(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - x)$.

6.4 Funkcije slučajnih vektora

Teorem 6.20 se relativno lako generalizira na višedimenzionalni slučaj. Ponovimo, ako je $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ n-dimenzionalni slučajni vektor, i $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Borelova, tada je i $Y := g(X) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ m-dimenzionalni slučajni vektor. Primijetimo da je u sljedećem Teoremu funkcija $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tj. i X i Y su n-dimenzionalni slučajni vektori . Razlog leži u teoremu o zamjeni varijabli u višedimenzionalnom integralu (znanje s INTRAF-a). Označimo $g(y) = (g_1(y), g_2(y), g_3(y), \ldots, g_n(y))$. Vrijedi:

Teorem 6.24 (Teorem 11.9 u [3]). *Neka je $X = (X_1, \ldots, X_n)$ neprekidni slučajni vektor s funkcijom gustoće f_X. Neka je $L = \{x \in \mathbb{R}^n : f_X(x) > 0\}$ te neka je $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takva da*

(a) $g : L \to T := g(L)$ je bijekcija,

(b) $g^{-1} \in C^1(T)$ i $Dg^{-1}(y) \neq 0, \forall y \in T$,

gdje je

$$\begin{aligned} Dg^{-1}(y) &= \det\left(\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}g_i^{-1}(y)\right\}_{ij}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1}g_1^{-1}(y) & \frac{\partial}{\partial y_2}g_1^{-1}(y) & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n}g_1^{-1}(y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_1}g_n^{-1}(y) & \frac{\partial}{\partial y_2}g_n^{-1}(y) & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n}g_n^{-1}(y). \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

Tada je Y neprekidna slučajna varijabla s gustoćom $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))|Dg^{-1}(y)|\mathbf{1}_T(y)$.

Poopćenje Teorema 6.24 ide isto kao i za Teorem 6.20, tj. ako postoji najviše prebrojiva particija $(L_i)_{i\in I}$ skupa L i ako funkcije $g_i \coloneqq g|_{L_i}$ zadovoljavaju uvjete Teorema 6.24, tada je Y neprekidni slučajni vektor s gustoćom

$$f_Y(y) = \sum_{i\in I} f_X(g_i^{-1}(y))|Dg_i^{-1}(y)|\mathbf{1}_{T_i}(y),$$

uz $g_i(L_i) = T_i$. Također, isto kao i prije, iz skupa L možemo izbaciti neke točke ako s njima ne vrijede pretpostavke Teorema 6.24 uz uvjet da imaju vjerojatnost 0 s obzirom na $\mathbb{P}_X$.

Zadatak 6.25. Neka je (X, Y) neprekidan slučajan vektor s gustoćom f i $L = \mathbb{R}^2$. Nađite gustoću od $(X + Y, X - Y)$.

Rješenje. Očito $L = \mathbb{R}^2$ i $g(x, y) = (x+y, x-y)$ te je tada $T = \mathbb{R}^2$ (uočite da je g zapravo regularni linearni operator). Očito je g i bijekcija. To možemo zaključiti ili opet po svojstvu linearnog operatora, ali možda je u općenitoj situaciji bolje krenuti računati što bi bio inverz pa iz toga zaključiti kada on postoji i koji su skupovi L i T u igri. Idemo, dakle, izračunati inverz od g.

$$\begin{aligned} g(x, y) &= (x + y, x - y) \eqqcolon (u, v) \\ \implies &\begin{cases} x + y = u, \\ x - y = v \end{cases} = \begin{cases} x = \frac{u+v}{2}, \\ y = \frac{u-v}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Dakle, $g^{-1}(u, v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$. Sada lakše vidimo da je $T = \mathbb{R}^2$ i da je $g^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Imamo i

$$Dg^{-1}(u, v) = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial u} & \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial u} & \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial v} \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) = f_{X+Y,X-Y}(u, v) &= f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)\left|-\frac{1}{2}\right|\mathbf{1}_{\mathbb{R}^2}(u, v) \\ &= \frac{1}{2} f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Zadatak 6.26. Neka je (X, Y) neprekidan slučajan vektor s gustoćom f i $L = \mathbb{R}^2$. Nađite gustoću njegovih polarnih koordinata (R, Φ).

Rješenje. Očito $L = \mathbb{R}^2$. Znamo da je poveznica Kartezijevih koordinata i polarnih sljedeća $(x, y) = (r \sin\phi, r \cos\phi)$, gdje je r udaljenost (x, y) do 0, a

ϕ kut koji vektor s početkom u ishodištu, a s krajem u (x, y) zatvara s x-osi. Dakle, možemo pisati

$$(X, Y) = (R \sin \Phi, R \cos \Phi)$$

uz ista značenja kao gore (jedino što su R i Φ sada slučajne varijable).
Uočimo, ako je $g : \mathbb{R}^2 \to R^2$ takva da je $g(x, y) = (r, \phi)$, tada je funkcija $(r, \phi) \to (r \cos \phi, r \sin \phi)$ upravo njen inverz.

$$\begin{aligned} g^{-1}(r, \phi) &= (\overbrace{r \cos \phi}^{g_1^{-1}}, \overbrace{r \sin \phi}^{g_2^{-1}}), \\ g^{-1} &: \underbrace{(0, \infty) \times [0, 2\pi)}_{T} \to \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}}_{L}. \end{aligned}$$

Primijetimo: da bi g bila bijekcija, moramo izbaciti točku $(0, 0)$ iz L s početka zadatka koja je $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ vjerojatnosti 0.
Očito je $g^{-1} \in C^1(T)$ ako iz za novi T proglasimo $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$. To rezultira izbacivanjem pozitivnog dijela x-osi iz L što i dalje ima $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ vjerojatnost 0. Također,

$$Dg^{-1}(r, \phi) = \det \left(\begin{bmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{bmatrix} \right) = r \neq 0, \quad (r, \phi) \in T.$$

Iz Teorema 6.24 slijedi da je

$$f_{R,\Phi}(r, \phi) = f_{X,Y}(r \cos \phi, r \sin \phi) r \mathbf{1}_{(0,\infty)}(r) \mathbf{1}_{[0,2\pi)}(\phi).$$

Zadatak 6.27. Neka je $(X, Y) \sim N(0, I)$. Odredite gustoće f_R i f_Φ.

Rješenje. Iskoristit ćemo prethodni zadatak, a prije toga se prisjetimo da je gustoća vektora (X, Y) dana s

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Sada po prethodnom zadatku vidimo da je

$$\begin{aligned} f_{R,\Phi}(r, \phi) &= f_{X,Y}(r \cos \phi, r \sin \phi) r \mathbf{1}_{(0,\infty)}(r) \mathbf{1}_{(0,2\pi)}(\phi) \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(r \cos \phi)^2 + (r \sin \phi)^2}{2}} r \mathbf{1}_{(0,\infty)}(r) \mathbf{1}_{(0,2\pi)}(\phi) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{(0,2\pi)}(\phi) \right) \left(r e^{-\frac{r^2}{2}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(r) \right). \end{aligned}$$

Iz prethodnog vidimo da su slučajne varijable R i Φ nezavisne (jer im se zajednička gustoća da napisati kao produkt marginalnih gustoća) te da je

$$f_R(r) = re^{-\frac{r^2}{2}}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(r),$$
$$f_\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{(0,2\pi)}(\phi).$$

tj. udaljenost R ima tzv. Rayleigh distribuciju, a kut Φ uniformnu distribuciju na $(0, 2\pi)$.

Napomena 6.28. Prethodni zadatak nam daje ideju kako vrlo lako generirati standardnu dvodimenzionalnu normalnu razdiobu. Naime, prvo možemo generirati radijus R po Rayleigh distribuciji, zatim kut Φ po uniformnoj na $(0, 2\pi)$, te naposlijetku izračunati $(X, Y) = (R\cos\Phi, R\sin\Phi)$. Posebno, fiksiranjem jedne koordinate dobijamo standardnu jednodimenzionalnu normalnu razdiobu.
Napomenimo da je obično "trivijalno" generirati uniformnu razdiobu pa Φ lako generiramo. Ostaje pitanje kako lako generirati R. Međutim, to smo davno riješili! Naime, funkcija distribucije Rayleighjeve distribucije je

$$F_R(x) = \int_0^x re^{-\frac{r^2}{2}}dr = 1 - e^{-x^2}, \quad x > 0.$$

što je naravno topološki neprekidna funkcija. Po Zadatku 3.19 imamo $F_R(R) = 1 - e^{-R^2} \stackrel{D}{=} U \sim U(0, 1)$. Dakle, da bismo generirali R treba generirati $U \sim U(0, 1)$ i izračunati $F_R^{-1}(U) = -\sqrt{\ln(1 - U)}$ što ima Rayleigh distribuciju.

Zadatak 6.29. Neka je $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija, (X, Y) neprekidan slučajan vektor s gustoćom f. Neka je $Z = \Psi(X, Y)$. Odredite gustoću od Z ako postoji.

Rješenje. Ovaj zadatak je preoćenito zadan, ali pogledajmo što se može napraviti s ovime što znamo.
Ideja je sljedeća: definirajmo funkciju $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s

$$g(x, y) = (\Psi(x, y), x).$$

Pretpostavimo da g zadovoljava Teorem 6.24 (ako ne zadovoljava, trebamo promijeniti drugu koordinatu funkcije g u nešto drugo).

$$g(x, y) = (z, w) \implies \begin{cases} \Psi(x, y) = z, \\ x = w \end{cases} \iff \begin{cases} x = w, \\ y = \varphi(z, w). \end{cases}$$

gdje je φ neka funkcija koju ne možemo u općenitom slučaju točno odrediti, ali ako g zadovoljava uvjete Teorema 6.24, onda znamo da takva postoji. Dakle, $g^{-1}(z,w) = (w, \varphi(z,w))$. Budući da smo pretpostavili da g zadovoljava Teorem 6.24, to znači da je $g^{-1} \in C^1(T)$, tj. postoje i parcijalne derivacije $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ i $\frac{\partial\varphi}{\partial w}$ te imamo

$$Dg^{-1}(z,w) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial w} \end{bmatrix}\right) = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,w).$$

Sada po Teoremu 6.24 imamo

$$\begin{aligned} f_{Z,X}(z,w) &= f_{X,Y}(w,\varphi(z,w))\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,w)\right| \\ \implies f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z,X}(z,w)dw = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(w,\varphi(z,w))\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,w)\right| dw. \end{aligned}$$

Napomena 6.30. Metodu iz prošlog zadatka možemo poopćiti na slučaj kada je $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m < n$, tako da dodefiniramo preostalih $n-m$ koordinata funkcije g do funkcije $\overline{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_m, g_{m+1}, \ldots, g_n)$ koja zadovoljava uvjete Teorema 6.24 te dobijemo

$$\begin{aligned} \overline{Y} = \overline{g}(X) &= (g_1(X), g_2(X), \ldots, g_m(X), g_{m+1}(X), \ldots, g_n(X)) \\ &= (\underbrace{Y_1, \ldots, Y_m}_{Y}, Y_{m+1}, \ldots, Y_n). \end{aligned}$$

Tada je

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} f_{\overline{Y}}(y,z)dz.$$

DZ 6.31. Neka je $f_{X,Y}$ gustoća slučajnog vektora (X,Y). Odredite gustoću slučajne varijable Z ako je

(a) $Z = X + Y$,

(b) $Z = X - Y$,

(c) $Z = X \cdot Y$,

(d) $Z = X/Y$.

Ovo je dokazano na Statistici, ali probajte iskoristiti tehniku iz prethodne napomene.

Zadatak 6.32. Neka je $(X,Y) \sim N(0,I)$. Jesu li $X+Y$ i Y/X nezavisne?

Rješenje. Koristeći npr. prethodni zadatak koji je ostavljen za domaću zadaću možemo dobiti gustoće od $X+Y$ i Y/X, ali nam to neće ništa reći o tome jesu li $X+Y$ i Y/X nezavisne ili ne. Za nezavisnost moramo izračunati zajedničku gustoću od $X+Y$ i Y/X, tj. moramo provjeriti je li

$$f_{Y/X,X+Y}(u,v) = f_{Y/X}(u) f_{X+Y}(v), \quad \text{za gotovo svaki } (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Definirajmo $g(x,y) = (y/x, x+y)$. Vidimo da je g definirana na $L = \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$, a znamo da je $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} > 0$, za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ali nema veze što smo izbacili izbacili skup $\mathbb{R} \times \{0\}$ jer je on $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ vjerojatnosti 0.
Imamo $g^{-1}(u,v) = (\frac{v}{u+1}, \frac{uv}{u+1})$ te vidimo da je $g^{-1} \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{-1\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\})$. Dakle, moramo promijeniti L još jednom da bi g postala bijekcija pa je sada $L = (\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}) \setminus \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$ (u ne smije biti -1, a to je upravo slučaj kada je $y = -x$ što je sporedna dijagonala). Tim izbacivanjem također nismo ništa izgubili jer je i dalje skup $\mathbb{R}^2 \setminus L$ $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ vjerojatnosti 0.
Lako vidimo da je $Dg^{-1}(u,v) = \frac{-v}{(u+1)^2} \neq 0$ na T pa je

$$f_{Y/X,X+Y}(u,v) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{v^2(u^2+1)}{(u+1)^2}} \frac{|v|}{(u+1)^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\{-1\}\times\mathbb{R}\setminus\{0\}}(u,v).$$

Sada integriranjem lako možemo dobiti

$$f_{Y/X}(u) = \frac{1}{\pi(1+u^2)}$$

što je Cauchyjeva distribucija, a još sa Statistike znamo da je $X+Y \sim N(0,2)$ pa je

$$f_{X+Y}(v) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v^2}{4}}.$$

Zaključujemo da Y/X i $X+Y$ nisu nezavisne.

DZ 6.33. Neka su X,Y nezavisne slučajne varijable takve da $X,Y \sim Exp(\lambda)$. Jesu li $X+Y$ i X/Y nezavisne?

Zadatak 6.34. Neka su X,Y nezavisne slučajne varijable takve da $X,Y \sim Exp(\lambda)$. Odredite razdiobu od $Z = \frac{X}{X+Y}$.

Rješenje. Prva opcija je da izračunamo $f_{X,X+Y}$ pa iskoristimo DZ 6.31 da dobijemo gustoću od $f_{X/(X+Y)}$, a možemo i izračunati $f_{\frac{X}{X+Y},X}$ pa integranjem

dobiti $f_{X/(X+Y)}$. Tako ćemo i napraviti.
Primijetimo da je $f_{X,Y}(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\mathbf{1}_{(0,\infty)^2}(x,y)$ pa je $L = (0,\infty)^2$. Neka je $g(x,y) = (x/(x+y), x)$. Zbog $(x,y) \in L$ vidimo da je $T = (0,1) \times (0,\infty)$ te da je $g^{-1}(u,v) = (v, \frac{v}{u} - v) \in C^1(T)$,

$$Dg^{-1}(u,v) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-v}{u^2} & \frac{1}{u} - 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{v}{u^2} \neq 0.$$

Slijedi

$$\begin{aligned} & f_{\frac{X}{X+Y},X}(u,v) = \lambda^2 e^{-\lambda\frac{v}{u}}\frac{v}{u^2}\mathbf{1}_{(0,1)}(u)\mathbf{1}_{(0,\infty)}(v) \\ \implies & f_{\frac{X}{X+Y}} = \mathbf{1}_{(0,1)}(u)\frac{\lambda}{u}\underbrace{\int_0^\infty \frac{\lambda}{u}e^{-\frac{\lambda}{u}v}v\,dv}_{\mathbb{E}[Exp(\frac{\lambda}{u})]} = \mathbf{1}_{(0,1)}(u)\frac{\lambda}{u}\frac{u}{\lambda} = \mathbf{1}_{(0,1)}(u), \end{aligned}$$

tj. $\frac{X}{X+Y} \sim U(0,1)$.

Zadatak 6.35. Neka je $f_{X,Y}$ gustoća slučajnog vektora (X,Y). Nađite gustoću slučajne varijable $Z = \max\{X,Y\}$.

Rješenje. $F_Z(z) = \mathbb{P}(\max\{X,Y\} \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z, Y \leq z) = \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{z} f_{X,Y}(x,y)dxdy$.
Definirajmo

$$\begin{aligned} \rho(z,y) &:= \int_{-\infty}^{z} f_{X,Y}(x,y)dx \\ \implies F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{z} \rho(z,y)dy. \end{aligned}$$

Znamo da $f_Z(z) = \frac{\partial}{\partial z}F_Z(z)$ pa stoga trebamo samo derivirati gornji integral. Sjetimo se da je (uz određene pretpostavke koje istražite za **DZ**)

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx = \int_{g(y)}^{h(y)} \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx + h'(y)f(h(y),y) - g'(y)f(g(y),y). \quad (4)$$

Prihvatimo za sada da je derivacija od $-\infty$ jednaka 0 (shvatimo $-\infty$ kao konstatnu). Tada imamo

$$f_Z(z) = \frac{\partial}{\partial z} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{\partial}{\partial z} \rho(z,y)dy + 1 \cdot \rho(z,z) - \underbrace{0 \cdot \rho(z,-\infty)}_{=0,\text{ objasnit ćemo kasnije}}$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \frac{\partial}{\partial z} \rho(z,y)dy + \rho(z,z).$$

Primijetimo da istom argumentacijom kao i za F imamo

$$\frac{\partial}{\partial z} \rho(z,y) = \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{z} f(x,y)dx = f(z,y)$$

pa je

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f(z,y)dy + \int_{-\infty}^{z} f(x,z)dx.$$

Napomena 6.36. Komentar na derivaciju od $-\infty$ iz prethodnog zadatka. Primijetimo

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \rho(z,y)dy = \int_{a}^{z} \rho(z,y)dy + \int_{-\infty}^{a} \rho(z,y)dy.$$

Sada prvi integral ima konačne granice pa možemo iskoristiti (4) i dobiti

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{a}^{z} \rho(z,y)dy = \int_{a}^{z} \frac{\partial}{\partial z} \rho(z,y)dy + 1 \cdot \rho(z,z) - 0 \cdot \rho(z,0) = \int_{a}^{z} \frac{\partial}{\partial z} \rho(z,y)dy + \rho(z,z).$$

Za drugi integral naprosto iskoristimo LTDK da bismo dobili (vidite predavanja iz Mjere i integrala, ili pogledajte [3, Korolar 10.2] s istim dokazom za mjeru dy umjeto $d\mathbb{P}(\omega)$):

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{a} \rho(z,y)dy = \int_{-\infty}^{a} \frac{\partial}{\partial z} \rho(z,y)dy.$$

Kombinirajući ova dva izračuna, imamo

$$f_Z(z) = \frac{\partial}{\partial z} F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{\partial}{\partial z} \rho(z,y)dy + \rho(z,z).$$

Napomena 6.37. Iz prethodnog zadatka slijedi da ako su X i Y nezavisne, onda je $f_Z(z) = f_X(z)F_Y(z) + F_X(z)f_Y(z)$, a ako su X i Y nezavisne i jednakodistribuirane, onda je $f_Z(z) = 2f_X(z)F_X(z)$ kao što smo i pokazali u DZ 6.8.

7 Zakoni velikih brojeva

U ovom poglavlju promatramo rezultate koji za niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ daju uvjete pod kojima niz

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \tag{5}$$

konvergira prema konstanti za neki niz realnih brojeva $(a_n)_n$. Najzanimljivije konvergencije koje ćemo promatrati su konvergencija (g.s.) i konvergencija po vjerojatnosti.
Srodan problem ovom problemu je i problem nalaženja uvjeta na niz slučajnih varijabli $(X_n)_n$ tako da red slučajnih varijabli $\sum_n X_n$ konvergira (ovdje najčešće gledamo konvergenciju (g.s.), vidi Napomenu 7.17(c)).

7.1 Slabi zakon velikih brojeva

Promatramo kada niz iz (5) konvergira po vjerojatnosti.

Napomena 7.1. Kada se u zadacima pita vrijedi li slabi zakon velikih brojeva za niz $(X_n)_n$, misli se izričito na to konvergira li niz $(\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{n})_n$ po vjerojatnosti.

Napomena 7.2 (Bernoullijev SZVB)**.** Neka je $(Z_n)_n$ niz slučajnih varijabli takav da $Z_n \sim B(n,p)$, $p \in (0,1)$. Tada $\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} p$. Obzirom da za niz $(Z_n)_n$ postoji vjerojatnostni prostor i na njemu nezavisne jednakodistribuirane slučajne varijable $(X_n)_n$ takve da X_1 ima Bernoullijevu distribuciju s parametrom p i takve da $Z_n \overset{D}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i$, rezultat je zapravo ekvivalentan tome da

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} p.$$

Ovaj rezultat dokazao je Jacob Bernoulli još u 17. stoljeću, ali mu je trebalo 20-ak godina dok ga nije rigorozno pokazao što je uspio 1713. Ovaj rezultat lako se pokaže pomoću Čebiševljeve nejednakosti. Naime

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} X_i)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{npq}{n^2\varepsilon^2} \to 0.$$

Ideja za generalizaciju Bernoullijevog SZVB bila bi poopćiti Bernoullijev rezultat za proizvoljne nezavisne slučajne varijable koristeći slične nejednakosti.

Napomena 7.3 (verzije SZVB)**.** Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te neka je $S_n \coloneqq \sum_{k=1}^n X_k$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Ako su $(X_n)_n$ nezavisne (ili nekorelirane), tada vrijedi

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \mathrm{Var} X_k \to 0 \implies \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

(b) (Čebiševljev SZVB) Neka su $(X_n)_n$ nezavisne i neka postoji $\gamma \in (0, \infty)$ takva da $\mathrm{Var} X_n \le \gamma$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tada

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

(c) Neka su $(X_n)_n$ nezavisne takve da $\mathbb{E}X_n = \mu$ i $\mathrm{Var} X_n = \sigma^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tada

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu.$$

DZ 7.4. Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, neka je $S_n \coloneqq \sum_{k=1}^n X_k$, $n \in \mathbb{N}$. Neka je $\sigma_n^2 = \mathrm{Var} S_n$ i $(b_n)_n$ niz nenegativnih brojeva takav da $b_n \to \infty$. Ako vrijedi $\frac{\sigma_n^2}{b_n^2} \to 0$, tada

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{b_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

DZ 7.5. Neka je $r > 0$ i $(Y_n)_n$ niz slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, te neka je $S_n \coloneqq \sum_{k=1}^n Y_k$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažite:

(a)

$$Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \iff \mathbb{E}\left[\frac{|Y_n|^r}{1 + |Y_n|^r}\right] \to 0.$$

(b)

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \iff \mathbb{E}\left[\frac{|S_n - \mathbb{E}S_n|^2}{n^2 + |S_n - \mathbb{E}S_n|^2}\right] \to 0.$$

Teorem 7.6 (Hinčinov SZVB, 1929.)**.** *Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}X_1 = \mu$. Tada*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu.$$

Zadatak 7.7. Neka je $(X_n)_n$ niz njd. sl. var. i $(Y_n)_n$ također niz njd. sl. var. tako da vrijedi $\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}Y_1 = \mu$. Definiramo niz $(Z_n)_n$ tako da $Z_{2n-1} = X_n$, $Z_{2n} = Y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da $(Z_n)_n$ zadovoljava slabi zakon velikih brojeva. *(Napomena: nizovi $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$ ne moraju biti međusobno nezavisni.)*

Rješenje. Hinčinov SZVB povlači

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu,$$
$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu.$$

Uočimo da je $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n$, $n \in \mathbb{N}$, pa imamo

$$\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n} - \mu = \frac{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}{n} \left(\frac{X_1 + \cdots + X_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} - \mu \right) + \\ + \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} \left(\frac{Y_1 + \cdots + Y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - \mu \right).$$

Dakle, za $\varepsilon > 0$ imamo

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right) \leq \mathbb{P}\left(\left| \frac{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}{n} \left(\frac{X_1 + \cdots + X_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} - \mu \right) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) + \\ + \mathbb{P}\left(\left| \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} \left(\frac{Y_1 + \cdots + Y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - \mu \right) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

što je zbog $1/2 \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor / n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor / n \leq 1$ manje ili jednako od

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{X_1 + \cdots + X_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} - \mu \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) + \mathbb{P}\left(\left| \frac{Y_1 + \cdots + Y_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - \mu \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) \to 0.$$

Dakle, niz $(\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n})_n$ isto konvergira prema μ.

Napomena 7.8. Pretpostavka $\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}Y_1$ nije bila nužna. Istim računom može se pokazati da ako je $\mathbb{E}X_1 = \mu$ i $\mathbb{E}Y_1 = \lambda$, onda $\frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{\mu + \lambda}{2}$.

Zadatak 7.9. Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli takvih da $X_1 \sim U(0, 1)$. Definiramo $Y_n = \cos \frac{X_n}{X_{n+1}}$. Dokažite da $(Y_n)_n$ zadovoljava slabi zakon velikih brojeva.

Rješenje. Uočimo da $(Y_n)_n$ nije niz nezavisnih slučajnih varijabli, ali da su $(Y_{2k})_k$ i $(Y_{2k-1})_k$ nezavisni jednakodistribuirani nizovi pa za rješenje ovog zadatka možemo iskoristiti prethodni zadatak. Ono što je preostalo pokazati je da očekivanje $\mathbb{E}Y_1$ postoji, a to je očito jer je $|Y_1| \leq 1$.
Dakle,

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu := \mathbb{E}Y_1 = \cdots = \int_0^1 y \sin \frac{1}{y} dy.$$

Zadatak možemo riješiti i na drugi način, tj. koristeći Čebiševljevu nejednakost:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{\mathrm{Var}(Y_1 + \cdots + Y_n)}{n^2\varepsilon^2} \\ &= \frac{n\mathrm{Var}(Y_1) + (n-1)Cov(Y_1, Y_2)}{n^2\varepsilon^2} \to 0.\end{aligned}$$

Napomena 7.10 (VAŽNA NAPOMENA)**.** Za $\alpha > -1$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1},$$

što kraće označavamo s $\sum_{k=1}^n k^\alpha \sim n^{\alpha+1}$ jer nas konstanta u beskonačnosti često ne zanima.
Također, za $\alpha = -1$ vrijedi $\sum_{k=1}^n k^\alpha = \sum_{k=1}^n k^{-1} \sim \log n$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\log n} = 1.$$

Očito, za $\alpha < -1$ niz $(\sum_{k=1}^n k^\alpha)_n$ konvergira pa $\sum_{k=1}^n k^\alpha \sim 1$.

DZ 7.11 (Ne pretežak, ali ne ni lagan zadatak.)**.** Dokažite prethodnu Napomenu. Uputa: jedan od mogućih načina je da koristite konvergenciju Darbouxovih suma, tj. promatrajte integrale oblika $\int_0^1 x^\alpha dx$.

Zadatak 7.12. Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih sl. var. takvih da $X_n \sim N(0, c\,n^\alpha)$ gdje je $c > 0, \alpha \in \mathbb{R}$. Pokažite da $(X_n)_n$ zadovoljava slabi zakon velikih brojeva za $\alpha < 1$.

Rješenje. Provjeravamo uvjet iz Napomene 7.3(a).

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}X_k = c \cdot \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k^\alpha \sim \begin{cases} n^{\alpha+1-2}, & \alpha > -1, \\ \frac{\log n}{n^2}, & \alpha = -1, \\ \frac{1}{n^2}, & \alpha < -1. \end{cases}$$

Iz prethodnog vidimo da za $\alpha < 1$ imamo da $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}X_k \to 0$ pa imamo

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

DZ 7.13. Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih sl. var. tako da $\mathbb{E}X_n = 0$, $\mathrm{Var}X_n = \sigma^2$, $n \in \mathbb{N}$. Zadovoljava li niz $(Z_n)_n$ slabi zakon velikih brojeva ako je $Z_n = X_n + X_{n+1}$?

Primjer 7.14 (Zabava na kraju)**.** Motivacija za problem koji ćemo promatrati je sljedeća: skupljamo sličice za album koji ukupno ima n sličica. Zanima nas koliko sličica trebamo kupiti da bismo skupili cijeli album.

Neka je $X_1, X_2, \ldots$ njd. niz slučajnih varijabli s uniformnom distribucijom na $\{1, \ldots, n\}$. Sl. var. X_i označava i-tu sličicu koju smo otvorili. Neka je $\tau_k^n = \inf\{m : |\{X_1, \ldots, X_m\}| = k\}$, tj. vrijeme u kojem smo prvi put imali k različitih sličica. Zanima nas asimptotsko ponašanje niza $T_n = \tau_n^n$, tj. prvog vremena kada imamo sve sličice. Očito je da je $\tau_1^n = 1$ te definirajmo $\tau_0^n = 0$. Za $1 \leq k\ len$ definirajmo $X_{n,k} = \tau_k^n - \tau_{k-1}^n$, tj. vrijeme koje nam je potrebno da iz $k-1$ različite sličice dođemo do k različitih. Vidimo da $X_{n,k}$ ima geometrijsku distribuciju na $\mathbb{N}$ s parametrom $p = 1 - \frac{k-1}{n}$, stoga

$$\mathbb{E}X_{n,k} = \frac{1}{p} = \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^{-1}, \quad \mathrm{Var}X_{n,k} = \frac{q}{p^2} \leq \frac{1}{p^2} = \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^{-2}.$$

Također, $(X_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$ su međusobno nezavisne. Intuitivno je to jasno jer nas ne zanima koje sličice imamo, a koje ne, već nas zanima koliko ih ima različitih, te zbog toga što je distribucija sličica uniformna. Koristeći teleskopsko sumiranje imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}T_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}X_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^{-1} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim n \log n, \\
\mathrm{Var}T_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}X_{n,k} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^{-2} = n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{n^2\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

Koristeći Čebiševljevu nejednakost imamo (v. DZ (7.4))

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_n - n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{n \log n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\pi^2}{6 \log^2 n} \to 0.$$

Dakle, $\frac{T_n - n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n\log n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, tj. $\frac{T_n}{n \log n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.

Konkretno, ako album ima 200 sličica, trebat će nam oko $200 \log 200 \approx 1059.66$ sličica da skupimo cijeli album, što je oko 5 puta više nego što je potrebno za cijeli album.

Slično, ako nas zanima koliko bi otprilike osoba trebalo okupiti tako da za svaki dan u godini imamo osobu kojoj je to rođendan, onda je taj broj oko $365 \log 365 \approx 2153.46$.

7.2 Konvergencija redova

Napomena 7.15 (Konvergencija redova)**.** Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}X_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{n}(X_n - \mathbb{E}X_n)$ konvergira (g.s.).

(b) (Kolmogorovljev teorem o dva reda) Neka $|X_n| \leq c$, $n \in \mathbb{N}$. Tada $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergira (g.s.) ako i samo ako $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}X_n$ konvergira i $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}X_n < \infty$.

(c) (Kolmogorovljev teorem o tri reda) Neka je $c > 0$. Tada

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ konvergira (g.s.)} \iff \begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq c) < \infty, \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{|X_n|<c\}}) \text{ konvergira}, \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_n \mathbf{1}_{\{|X_n|<c\}}) < \infty. \end{aligned}$$

Zadatak 7.16. Neka je $(X_n)_n$ niz njd. slučajnih varijabli takvih da $X_1 \sim N(1,1)$ te neka je $a > 1$. Dokažite da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a^n}$ konvergira (g.s.).

Rješenje. Koristit ćemo Napomenu 7.15 za rješenje. Imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}\left(\frac{X_n}{a^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{2n}} < \infty, \quad \forall a > 1.$$

Dakle, iz Napomene 7.15(a) vidimo da $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{X_n}{a^n} - \frac{\mathbb{E}X_n}{a^n}\right)$ konvergira gotovo sigurno. Primijetimo da imamo i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}X_n}{a^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} < \infty, \quad \forall a > 1$$

pa iz toga zaključujemo da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a^n}$ konvergira g.s. jer je razlika dva g.s. konvergentna reda. ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{X_n}{a^n} - \frac{\mathbb{E}X_n}{a^n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}X_n}{a^n}$.)

Napomena 7.17 (Za one koje žele znati više!)**.** Na prvoj godini analize proučavali smo konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Dokazano je da ako red konvergira apsolutno, onda konvergira i obično, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} x_n$

konvergira. Identično kao i na analizi, može se dokazati da isto vrijedi i za red slučajnih varijabli.
Također, na analizi se proučavala tzv. bezuvjetna konvergencija reda, tj. red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira bezuvjetno ako za svaku permutaciju $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} x_{p(n)}$. Dokazalo se da je bezuvjetna konvergencija ekvivalentna apsolutnoj konvergenciji. Međutim, kod reda slučajnih varijabli to nije istina. Naime, po Kolmogorovljevom teoremu o tri reda vidimo da

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ konvergira apsolutno (g.s.)} \iff \exists c > 0 \text{ td. } &\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq c) < \infty,\\ &\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(|X_n| \mathbf{1}_{\{|X_n|<c\}}) < \infty,\\ &\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(|X_n| \mathbf{1}_{\{|X_n|<c\}}) < \infty.\end{aligned}$$

(Dakle, samo smo zamijenili X_n s $|X_n|$.) Međutim, može se pokazati

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ konvergira bezuvjetno (g.s.)} \iff \exists c > 0 \text{ td. } &\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq c) < \infty,\\ &\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_{\{|X_n|<c\}})| < \infty,\\ &\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_n \mathbf{1}_{\{|X_n|<c\}}) \text{ konvergira}\end{aligned}$$

iz čega vidimo da apsolutna i bezuvjetna konvergencija nisu ekvivalentne.

Zanimljivo je da red slučajnih varijabli konvergira (g.s.) ako i samo ako konvergira po vjerojatnosti. Ako dodatno pretpostavimo da je niz varijabli nezavisan, onda se može pokazati da red konvergira po distribuciji ako i samo ako konvergira (g.s.)! Za dokaz posljednje tvrdnje potrebno je znanje karakterističnih funkcija (pogledajte [3, Teorem 13.19, str. 483]).

7.3 Jaki zakon velikih brojeva

Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, te neka je $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Kolmogorovljev dovoljan uvjet: Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli i neka je $(b_n)_n \subset (0, \infty)$ rastući niz takav da $b_n \to \infty$. Tada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}X_n}{b_n^2} < \infty \implies \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{b_n} \xrightarrow{(g.s.)} 0.$$

Teorem 7.18 (Kolmogorov, 1930. i 1933.). *Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli. Tada $\frac{S_n}{n}$ konvergira (g.s.) ako i samo ako $\mathbb{E}|X_1| < \infty$, te u tom slučaju $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{(g.s.)} \mathbb{E}X_1$.*

Napomena 7.19. Kada se u zadacima pita vrijedi li jaki zakon velikih brojeva za niz $(X_n)_n$, misli se izričito na to konvergira li niz $(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n})_n$ gotovo sigurno.

Zadatak 7.20. Neka je $(X_n)_n$ nezavisan niz takav da

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -\sqrt{\ln n} & \sqrt{\ln n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Vrijedi li jaki zakon velikih brojeva za $(X_n)_n$?

Rješenje. U ovakvim zadacima gotovo uvijek ćemo ispitivati Kolmogorovljev dovoljan uvjet za JZVB. Imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}X_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} < \infty$$

pa po Kolmogorovljevom dovoljnom uvjetu imamo

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{(g.s.)} 0.$$

Zadatak 7.21. Neka je $(X_n)_n$ nezavisan niz takav da

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -n\alpha & 0 & n\alpha \\ \frac{1}{2n^2} & 1 - \frac{1}{n^2} & \frac{1}{2n^2} \end{pmatrix}.$$

Vrijedi li jaki zakon velikih brojeva za $(X_n)_n$?

Rješenje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}X_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{n^2} < \infty$$

pa po Kolmogorovljevom dovoljnom uvjetu imamo

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{(g.s.)} 0.$$

Zadatak 7.22. Neka je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Odredite

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{\text{n puta}} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) dx_1 \ldots dx_n.$$

Rješenje. Neka je $(U_n)_n$ niz njd. sl. var. tako da $U_1 \sim U(0,1)$. Tada po Kolmogorovljevom JZVB imamo

$$\frac{U_1+\cdots+U_n}{n} \xrightarrow{(g.s.)} \mathbb{E}U_1 = \frac{1}{2},$$

a jer je f neprekidna imamo onda i $f(\frac{U_1+\cdots+U_n}{n}) \xrightarrow{(g.s.)} f(1/2)$. Također,

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{U_1+\cdots+U_n}{n}\right)\right] = \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{\text{n puta}} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) dx_1 \ldots dx_n.$$

f je neprekidna na kompaktu $[0,1]$ pa je uniformno omeđena, tj. $|f(x)| \leq M$, $x \in [0,1]$. Sada po LTDK

$$\underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{\text{n puta}} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) dx_1 \ldots dx_n \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[f(1/2)] = f(1/2).$$

Zadatak 7.23. Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli, neka je $Y_n = n^\alpha e^{-X_n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, te $\alpha < 1/2$. Konvergira li niz $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k)_n$ (g.s.)?

Rješenje. Neka je $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.
Primijetimo da $\mathrm{Var}(Y_n) = n^{2\alpha}\mathrm{Var}(e^{-X_n^2})$ te da $\mathrm{Var}(e^{-X_n^2}) \leq \mathbb{E}[(e^{-X_n^2})^2] = \mathbb{E}[e^{-2X_n^2}] \leq 1$ jer $e^{-x^2} \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Imamo

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\mathrm{Var}Y_n}{n^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{n^{2\alpha}\mathrm{Var}(e^{-X_n^2})}{n^2} \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{n^{2\alpha}}{n^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{2(1-\alpha)}} < \infty, \quad \text{jer } \alpha < 1/2.$$

pa po Kolmogorovljevom dovoljnom uvjetu imamo

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k\right) - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}Y_k\right) \xrightarrow{(g.s.)} 0. \qquad (✠)$$

Iz ovoga vidimo da niz $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k)_n$ konvergira (g.s.) ako i samo ako konvergira $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}Y_k\right)_n$. (Naime, ako konvergira $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}Y_k\right)_n$, tada iz (✠) vidimo da konvergira i $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k)_n = \left[\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}Y_k\right)\right]_n + \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}Y_k\right)_n$. Slično, ako konvergira $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k)_n$ te pretpostavimo da ne konvergira $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}Y_k\right)_n$, imamo kontradikciju s (✠).)
Potrebno je još vidjeti kada $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}Y_k\right)_n$ konvergira i imamo tvrdnju zadatka. Zbog nenegativnosti niza $(Y_n)_n$ imamo

$$0 \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \mathbb{E}[e^{-X_k^2}] \leq c \cdot \frac{n^{\alpha+1}}{n} = n^\alpha$$

što konvergira u 0 ako i samo ako je $\alpha < 0$. Dakle, samo za $\alpha < 0$ smo sigurni da $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k)_n$ konvergira. Ako je $\alpha \geq 0$, za njd. niz $(X_n)_n$ niz $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k)_n$ neće konvergirati gotovo sigurno jer će posljednja ocjena biti oštra.

Napomena 7.24 (Primjena JZVB u Monte Carlo simulacijama)**.** Neka je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Pitamo se koliko iznosi $\int_0^1 f(x)dx$.
Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da $X_1 \sim U(0,1)$. Tada vrijedi da je niz $(f(X_n))_n$ njd. niz s očekivanjem $\mathbb{E}[f(X_1)] = \int_0^1 f(x)dx$ pa po JZVB imamo

$$\frac{f(X_1) + \cdots f(X_n)}{n} \xrightarrow{(g.s.)} \mathbb{E}[f(X_1)] = \int_0^1 f(x)dx.$$

Dakle, da bismo približno izračunali vrijednost integrala, možemo generirati uniformne slučajne varijable $(X_n)_n$ i onda računati njihov prosjek.
Možemo napravit i sljedeći trik s integralom: neka je $g : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ gustoća neke slučajne varijable Y takva da $g|_{[0,1]} > 0$. Tada je

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} g(x)dx = \mathbb{E}\left[\frac{f(Y)}{g(Y)}\mathbf{1}_{\{Y\in[0,1]\}}\right]$$

pa vrijednost integrala možemo dobiti tako da nezavisno generiramo slučajne varijable $(Y_n)_n$ s distribucijom Y, izračunamo $\frac{f(Y_k)}{g(Y_k)}\mathbf{1}_{\{Y_k\in[0,1]\}}$ te po JZVB imamo

$$\frac{\frac{f(Y_1)}{g(Y_1)}\mathbf{1}_{\{Y_1\in[0,1]\}} + \cdots \frac{f(Y_n)}{g(Y_n)}\mathbf{1}_{\{Y_n\in[0,1]\}}}{n} \xrightarrow{(g.s.)} \mathbb{E}\left[\frac{f(Y)}{g(Y)}\mathbf{1}_{\{Y\in[0,1]\}}\right] = \int_0^1 f(x)dx.$$

Ovaj trik je jako često korišten zato što pogodnim odabiranjem gustoće g možemo značajno ubrzati konvergenciju.

7.4 Dodatno o slabom zakonu velikih brojeva*

Neka je $(X_n)_n$ nezavisan jednakodistribuiran niz i $S_n = X_1+\cdots+X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Vidjeli smo na početku poglavlja da je Hinčin dokazao ako postoji očekivanje $\mathbb{E}X_1 = \mu$, onda vrijedi $S_n/n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$. Nedugo nakon toga je Kolmogorov dokazao da je konvergencija zapravo tipa gotovo sigurno. Sada bismo željeli ukratko vidjeti koja je razlika između ova dva zakona, tj. željeli bismo dobiti nužne i dovoljne uvjete za slabi zakon velikih brojeva nezavisnog jednakodistribuiranog niza.

Prvi korak je dokazati sljedeći rezultat.

Teorem 7.25. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je $(X_{n,k})_{1\le k\le n}$ nezavisan niz slučajnih varijabli. Neka je $(b_n)_n$ niz pozitivinih brojeva takav da $b_n \to \infty$ i neka je $\overline{X}_{n,k} := \mathbf{1}_{\{|X_{n,k}|\le b_n\}}$. Pretpostavimo da kada $n \to \infty$ vrijedi*

(i) $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(|X_{n,k}| > b_n) \to 0$,

(ii) $b_n^{-2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\overline{X}_{n,k}^2 \to 0$.

Neka je $S_n = X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}$ i $a_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\overline{X}_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}$, tada

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Dokaz. Neka je $\overline{S}_n = \overline{X}_{n,1} + \cdots + \overline{X}_{n,n}$. Vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right) \le \mathbb{P}(S_n \ne \overline{S}_n) + \mathbb{P}\left(\left|\frac{\overline{S}_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right).$$

Vrijedi za prvi izraz

$$\mathbb{P}(S_n \ne \overline{S}_n) \le \mathbb{P}(\cup_{k=1}^n\{\overline{X}_{n,k} \ne X_{n,k}\}) \le \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(|X_{n,k}| > b_n) \to 0.$$

Za drugi izraz po Čebiševljevoj nejednakosti vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\overline{S}_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right) \le \frac{1}{b_n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}\overline{X}_{n,k} \le \frac{1}{b_n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\overline{X}_{n,k}^2 \to 0.$$

$\square$

Sada smo došli do rezultata koji nas zanima.

Teorem 7.26 (William Vilim Vilibald Srećko Feller). *Neka je $(X_n)_n$ nezavisan jednakodistribuiran niz i neka je $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada postoji niz realnih brojeva $(a_n)_n$ takav da*

$$\frac{S_n - a_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

ako i samo ako

$$n\mathbb{P}(|X_1| > n) \to 0,$$

te u tom slučaju možemo odabrati $a_n := n\mathbb{E}[X_1 \mathbf{1}_{|X_1| \le n}]$.

Prije nego dokažemo jedan smjer Teorema, prisjetimo se da ako $\mathbb{E}|X_1| < \infty$, onda $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(|X_1| > n) = 0$ što slijedi po dominiranoj konvergenciji. Ipak, obrat ne vrijedi, što ćemo pokazati u Zadatku 7.27. Time ćemo se konačno uvjerili da SZVB nije ekvivalentan JZVB.

Dokaz Teorema 7.26. Dokazat ćemo samo dovoljnost uvjeta $n\mathbb{P}(|X_1| > n) \to 0$ jer nam za nužnost trebaju tzv. Lévyjeve nejednakosti koje nismo obradili. Za puni dokaz možete pogledati [1, Theorem 4 u Sekciji 5.2].

Pretpostavimo da $n\mathbb{P}(|X_1| > n) \to 0$. Iskoristit ćemo Teorem 7.25. Neka je $b_n = n$ i neka je $X_{n,k} := X_k$, stoga $\overline{X}_{n,k} = X_k \mathbf{1}_{\{|X_k| \le n\}}$. Sada treba pokazati da vrijede uvjeti (i) i (ii) iz Teorema 7.25.

Očito da uvjet (i) vrijedi jer

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(|X_{n,k}| > n) = n\mathbb{P}(|X_1| > n) \to 0.$$

Za uvjet (ii) treba vrijediti

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\overline{X}_{n,k}^2] = \frac{1}{n} \mathbb{E}[\overline{X}_{n,1}^2] \to 0.$$

Da bismo to dokazali, prisjetimo se da za nenegativnu varijblu Y vrijedi

$$\mathbb{E}Y^p = \int_0^\infty p y^{p-1} \mathbb{P}(Y > y) dy.$$

Stoga imamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\mathbb{E}[\overline{X}_{n,1}^2] &= \frac{1}{n}\int_0^\infty 2y\mathbb{P}(|\overline{X}_{n,1}| > y)dy \le \frac{1}{n}\int_0^n 2y\mathbb{P}(|X_1| > y)dy \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{n_0} 2y\mathbb{P}(|X_1| > y)dy + \frac{1}{n}\int_{n_0}^{n} 2y\mathbb{P}(|X_1| > y)dy \to 0,
\end{aligned}$$

jer $\lim_{y\to\infty} y\,\mathbb{P}(|X_1| > y) \to 0$. □

Zadatak 7.27. Neka je $(X_n)_n$ nezavisan jednakodistribuiran niz takav da $\mathbb{P}(X_1 = k) = \mathbb{P}(X_1 = -k) = \frac{C}{k^2 \log k}$, $k \geq 2$, gdje je $C > 0$ koji osigurava da je distribucija vjerojatnostna. Dokažite da za $(X_n)_n$ vrijedi SZVB, ali da ne vrijedi JZVB.

Rješenje. Imamo

$$\mathbb{E}[|X_1|] = 2\sum_{k=2}^{\infty} k \frac{C}{k^2 \log k} \leq 2C \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log x} = \infty$$

pa JZVB ne vrijedi.

S druge strane, slično kao gore

$$n\mathbb{P}(|X_1| > n) \leq 2C\, n \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2 \log x} \leq \frac{2Cn}{\log n} \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{2C}{\log n} \to 0$$

kada $n \to \infty$ pa SZVB vrijedi. Također, zbog simetričnosti od X_1 imamo da je $a_n = n\mathbb{E}[X_1 \mathbf{1}_{\{|X_1| \leq n\}}] = 0$, stoga

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

8 Karakteristične funkcije i centralni granični teoremi

8.1 Karakteristične funkcije

Karakteristične funkcije su iznimno moćan alat u teoriji vjerojatnosti pomoću kojeg se mogu dokazati iznimno bitne tvrdnje, ali i neke ne tako bitne, ali zanimljive. Više u nastavku.

Definicija 8.1. *Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.* ***Karakteristična funkcija od*** *X je funkcija $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definirana s*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int e^{itx} d\mathbb{P}_X(x) = \int e^{itx} dF_X(x).$$

U analizi karakteristična funkcija od X zove se Fourierova transformacija vjerojatnosne mjere $\mathbb{P}_X$.
Svojstva karakteristične funkcije su:

- φ_X je uniformno neprekidna,
- $|\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0) = 1$, $t \in \mathbb{R}$,
- $\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t)$, $t \in \mathbb{R}$,
- $X \stackrel{D}{=} Y \iff \varphi_X = \varphi_Y$,
- X, Y nezavisne $\implies \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$,
- $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt} \cdot \varphi_X(at)$.

Karakteristične funkcije nekih poznatih diskretnih razdioba

- $X = c$ g.s. $\implies \varphi_X(t) = e^{ict}$,
- $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix} \implies \varphi_X(t) = q + pe^{it}$,
- $X \sim B(n, p) \implies \varphi_X(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{itk} p^k q^{n-k} = (q + pe^{it})^n$,
- $X \sim P(\lambda) \implies \varphi_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{itn} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$,
- $X \sim G(p)$, tj. $\mathbb{P}(X = k) = q^{k-1}p, k \in \mathbb{N} \implies \varphi_X(t) = pe^{it} \frac{1}{1-qe^{it}}$.

Karakteristične funkcije nekih poznatih neprekidnih razdioba

- $X \sim U(a,b) \implies \varphi_X(t) = \int_a^b \frac{e^{itx}}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it}$,
  $X \sim U(-b,b) \implies \varphi_X(t) = \frac{\sin(tb)}{tb}$,
- $Z \sim N(0,1) \implies \varphi_Z(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = e^{-\frac{t^2}{2}}$,

  $X \sim N(\mu,\sigma^2) \overset{X \overset{D}{=} \sigma Z+\mu}{\Longrightarrow} \varphi_X(t) = \varphi_{\sigma Z+\mu}(t) = e^{i\mu t}\varphi_Z(\sigma t) = e^{i\mu t - \frac{(\sigma t)^2}{2}}$,
- $X \sim Exp(\lambda) \implies \varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$,
- $X \sim DExp(\lambda) \implies \varphi_X(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}$,
- $X \sim \Gamma(\alpha,\beta) \implies \varphi_X(t) = (1-i\beta t)^{-\alpha}$,
- $X \sim C(1,0)$, tj. standardna Cauchyjeva s gustoćom $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ $\implies \varphi_X(t) = e^{-|t|}$,
  $X \sim C(a,b)$, tj. Cauchyjeva s parametrima a i b čija je gustoća $f_X(x) = \frac{a}{\pi(a^2+(x-b)^2)} \implies \varphi_X(t) = e^{ibt-|at|}$ jer $\frac{X-b}{a} \sim C(0,1)$.

DZ 8.2. Neka je $(Y_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da $Y_n \sim \Gamma(\alpha_n,\beta)$. Tada je $Y_1 + \cdots + Y_n \sim \Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \beta)$, $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 8.3. Dokažite da je $\varphi(t) = \frac{\sin(2t)}{2t(1-it)} + i\frac{\sin^2(t)}{t(1-it)}$ karakteristična funkcija.

Rješenje. Ideja zadatka je zapisati funkciju φ kao produkt karakterističnih funkcija i onda iskoristiti činjenicu da je karakteristična funkcija zbroja nezavisnih varijabli zapravo produkt pripadnih karakterističnih funkcija.
Možemo odmah uočiti da u $\varphi(t) = \frac{\sin(2t)}{2t(1-it)} + i\frac{\sin^2(t)}{t(1-it)}$ u oba pribrojnika vidimo $\frac{1}{1-it} = \varphi_{Exp(1)}(t)$ pa ćemo to izlučiti i nadati se da od ostaloga možemo nešto sklepati. Imamo

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{\sin(2t)}{2t(1-it)} + i\frac{\sin^2(t)}{t(1-it)} = \frac{1}{1-it}\left(\frac{\sin(2t)}{2t} + i\frac{\sin^2(t)}{t}\right) \\
&= \frac{1}{1-it}\left(\frac{\sin t \cos t}{t} + i\frac{\sin t \sin t}{t}\right) = \frac{1}{1-it}\cdot\frac{\sin t}{t}(\cos t + i \sin t) \\
&= \frac{1}{1-it}\cdot\frac{\sin t}{t}\cdot e^{it} = \varphi_{Exp(1)}(t)\cdot\varphi_{U(-1,1)}(t)\cdot\varphi_1(t).
\end{aligned}$$

Dakle, ako su $X \sim Exp(1)$, $Y \sim U(-1,1)$ i $Z = 1$ nezavisne, onda $\varphi = \varphi_{X+Y+Z}$.

Napomena 8.4. Iz $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y$ ne slijedi da su X i Y nezavisne. Pogledajte Primjer 13.3. na 445. stranici u [3].

Definicija 8.5. *Kažemo da je X* ***beskonačno djeljiva*** *slučajna varijabla (tj. distribucija od X je beskonačno djeljiva) ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje nezavisne jednakodistribuirane slučajne varijable $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ takve da $X \overset{D}{=} X_1^{(n)} + X_2^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)}$.*

Uočite da za različite $n \in \mathbb{N}$ varijable $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ iz prethodne definicije mogu imati različite "tipove" distribucija, tj. $X_1^{(n)}$ ne mora imati "nikakve veze" s $X_1^{(m)}$.

Zadatak 8.6. Dokažite da je Cauchyjeva distribucija $C(1,0)$ beskonačno djeljiva.

Rješenje. Znamo $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$ i znamo da za nezavisne jednakodistribuirane varijable $X_1, \dots, X_n$ vrijedi $\varphi_{X_1+\cdots+X_n} = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t) = [\varphi_{X_1}(t)]^n$. Dakle,

$$\begin{aligned} X \text{ je beskonačno djeljiva} &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists X_1^{(n)}, t.d.\, \varphi_X(t) = \left[\varphi_{X_1^{(n)}}(t)\right]^n \\ &\iff e^{-|t|} = \left[\varphi_{X_1^{(n)}}(t)\right]^n. \end{aligned}$$

Ključno pitanje je smijemo li uzeti n-ti korijen. Znamo da kod kompleksnih brojeva imamo n različitih n-tih korijena stoga moramo biti iznimno oprezni kada korjenujemo. Ipak, ne moramo nužno uzeti n-ti korijen, nego ako pokažemo da je funkcija $\varphi_{X_1^{(n)}}(t) := e^{-|t|/n}$ dobro definirana karakteristična funkcija, onda ćemo zaista dobiti da je $e^{-|t|} = \left[\varphi_{X_1^{(n)}}(t)\right]^n$.

U svrhu toga, primijetimo da je $e^{-|t|/n} = \varphi_{Y/n}(t)$ gdje je $Y \sim C(1,0)$ pa je $e^{-|t|/n}$ zaista karakteristična funkcija te je X beskonačno djeljiva.

U ovom zadatku zapravo smo pokazali: ako su $X_1, \dots, X_n$ njd. s $C(1,0)$ distribucijom, onda je

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \sim C(1,0).$$

Napomena 8.7. Slučajna varijabla X je stabilna (tj. distribucija od X je stabilna) ako $\forall n \in \mathbb{N}$ postoje nezavisne jednakodistribuirane slučajne varijable $X_1, \dots, X_n$ takve da $X \overset{D}{=} X_1$ i brojevi a_n, b_n takvi da je $X \overset{D}{=} \frac{\sum_{i=1}^n X_i - a_n}{b_n}$.

Stabilne distribucije su poseban slučaj beskonačno djeljivih i za stabilne vrijedi važan teorem:

Teorem 8.8. *X je stabilna ako i samo ako postoji njd. niz $(X_n)_n$ slučajnih varijabli i nizovi realnih brojeva $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$, $b_n > 0$, takvih da $\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{D} X$, gdje je $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.*

Dakle, stabilne distribucije su jedini limesi nezavisnih jednakodistribuiranih nizova u centralnom graničnom teoremu. Opće je poznato da je u klasičnom centralnon graničnom teoremu distribucija limesa jedinična normalna distribucija. Iz prethodnog zadatka vidimo da je i Cauchyjeva distribucija stabilna pa po prethodnom teoremu zaključujemo da i Cauchyjevu distribuciju možemo dobiti kao limes u centralnom graničnom teoremu.

Propozicija 8.9. *$X_1, \ldots, X_n$ su nezavisne ako i samo ako*

$$\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(t_i).$$

Zadatak 8.10. Neka su X i Y nezavisne i simetrične slučajne varijable takve da su $X - Y$ i $X + Y$ nezavisne. Dokažite da je tada $X \stackrel{D}{=} Y$.

Rješenje. Dovoljno je pokazati da je $\varphi_X = \varphi_Y$.
Znamo da je X simetrična ako i samo ako $\varphi_X = \varphi_{-X}$. Označimo s $W = X + Y$ i $Z = X - Y$. Tada su $X = \frac{W+Z}{2}$ i $Y = \frac{W-Z}{2}$. Uočimo da su i W i Z simetrične, npr. za W imamo $\varphi_W(t) = \varphi_{X+Y}(t) \stackrel{nez.}{=} \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \varphi_{-X}(t)\varphi_{-Y}(t) = \varphi_{-W}(t)$. Konačno

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \varphi_{W+Z}(t/2) \stackrel{nez.}{=} \varphi_W(t/2)\varphi_Z(t/2) \\
\varphi_Y(t) &= \varphi_{W-Z}(t/2) \stackrel{nez.}{=} \varphi_W(t/2)\underbrace{\varphi_{-Z}(t/2)}_{\varphi_Z(t/2)} = \varphi_X(t).
\end{aligned}$$

Zadatak 8.11. Neka su X i Y nezavisne i jednakodistribuirane. Dokažite

(a) φ_{X-Y} je parna, realna i nenegativna. Posebno, $X - Y$ je simetrična.

(b) $X - Y$ nije uniformno distribuirana.

Rješenje. (a) Računamo:

$$\begin{aligned}
\varphi_{X-Y}(t) &= \varphi_X(t)\varphi_{-Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(-t) = \varphi_X(t)\varphi_X(-t) \\
&= \varphi_X(t)\overline{\varphi_X(t)} = |\varphi_X(t)|^2.
\end{aligned}$$

Iz ovoga vidimo da je φ_{X-Y} parna, nenegativna i realna, te da je $X - Y$ simetrična.

(b) Budući da je $X - Y$ simetrična, jedini mogući kandidati među uniformnim distribucijama su distribucije oblika $U(-b, b)$, za $b > 0$, čije su karakteristične funkcije $\varphi_{U(-b,b)} = \frac{\sin(bt)}{bt}$. Međutim, za $t_b = \frac{3\pi}{2b}$ je $\varphi_{U(-b,b)}(t_b) = \frac{-2}{3\pi} < 0$ što je kontradikcija jer smo u prvom dijelu zadatka pokazali da je φ_{X-Y} nenegativna.

Propozicija 8.12 (Veza momenata i derivacija karakterističnih funkcija). *Neka je X slučajna varijabla i φ_X njena karakteristična funkcija, te neka je $k \in \mathbb{N}$.*

(a) Ako je $\mathbb{E}|X|^r < \infty$, onda $\varphi_X^{(n)}(t)$ postoji za $n \in \{0, 1, 2, \ldots, \lfloor r \rfloor\}$ i $\varphi_X^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}[X^n]$.

(b) $\varphi_X^{(2k)}(0)$ postoji i konačna je ako i samo ako $\mathbb{E}|X|^{2k} < \infty$.

Zadatak 8.13. Neka je $X \sim N(0, \sigma^2)$. Odredite $\mathbb{E}X^4$.

Rješenje. $\varphi_X(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \in C^\infty$. Budući da se radi o eksponencijalnoj funkciji, možemo je zapisati kao red:

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)^k \frac{1}{k!}.$$

Također, $\varphi_X^{(4)}(0) = i^4 \mathbb{E}[X^4] = \mathbb{E}[X^4]$. Da bismo izračunali četvrtu derivaciju od φ_X u $t = 0$, dovoljno je promatrati samo što stoji uz potenciju t^4 u zapisu preko reda, tj. dovoljno je promatrati četvrtu derivaciju izraza $p_4(t) = \left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)^2 \frac{1}{2!} = \frac{\sigma^4}{4 \cdot 2} t^4$, a ona iznosi $p_4^{(4)}(0) = 3\sigma^4$. Dakle, $\mathbb{E}[X^4] = 3\sigma^4$.

Zadatak 8.14. Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takve da je $X + Y \stackrel{D}{=} X$. Dokažite da je $Y = 0$ $\mathbb{P}$-g.s.

Rješenje. Zbog nezavisnosti od X i Y vrijedi $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$ za sve $t \in \mathbb{R}$, a zbog pretpostavke o jednakoj distribuiranosti imamo $\varphi_X(t) = \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$, za sve $t \in \mathbb{R}$. Budući da je φ_X neprekidna u 0 i $\varphi_X(0) = 1$, postoji $\varepsilon > 0$ takav da za sve $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ vrijedi $\varphi_X(t) \neq 0$. Dakle, za sve $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ vrijedi $\varphi_Y(t) = 1$. Iz ovoga vidimo da je $\varphi_Y''(t) = 0$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ pa po propoziciji o vezi parne derivacije karakteristične funkcije i parnog momenta slučajne varijable zaključujemo da $\mathbb{E}(Y^2)$ postoji i vrijedi $\mathbb{E}(Y^2) = -\varphi_Y''(0) = 0$ pa je $Y = 0$ $\mathbb{P}$-g.s.

Teorem 8.15 (Teorem neprekidnosti). *Neka je $(F_n)_n$ niz vjerojatnosnih funkcija distribucija i neka je $(\varphi_n)_n$ niz pripadnih karakterističnih funkcija.*

(a) Ako je F vjerojatnosna funkcija distribucije i $F_n(x) \longrightarrow F(x), \forall x \in C(F)$, onda $\varphi_n(t) \longrightarrow \varphi_F(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

(b) Ako $\varphi_n(t) \to \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}$ i φ je neprekidna u 0, tada je φ karakteristična funkcija neke vjerojatnosne funkcije distribucije F i vrijedi $F_n(x) \to F(x), \forall x \in C(F)$.

Zadatak 8.16. Neka je $(X_n)_n$ niz njd. sl. var. td. $X_n \sim N(0, cn^\alpha)$, $c > 0, \alpha \in \mathbb{R}$. Vrijedi li SZVB za $(X_n)_n$?

Rješenje. U Zadatku 7.12 pokazali smo da SZVB vrijedi kada je $\alpha < 1$. Preostaje ispitati što se događa kada je $\alpha \geq 1$.
Sjetimo se da za $a \in \mathbb{R}$ vrijedi $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} a \iff \frac{S_n}{n} \xrightarrow{D} a$. Računamo

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t) &:= \varphi_{S_n/n}(t) = \varphi_{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}}(t) = \varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t/n) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_i}(t/n) = \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{ck^\alpha (t/n)^2}{2}} = e^{-\frac{c}{2n^2} t^2 \sum_{k=1}^n k^\alpha} \\
&\overset{Nap.7.10}{\approx} e^{-\frac{c}{(\alpha+1)2n^2} t^2 n^{(\alpha+1)}} = e^{-\frac{c}{\alpha+1} t^2 n^{(\alpha-1)}}
\end{aligned}$$

Sada vidimo da je

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \begin{cases} e^{-\frac{c}{2}t^2}, & \alpha = 1 \\ \mathbf{1}_{\{0\}}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Dakle, po Teoremu neprekidnosti za $\alpha = 1$ niz $(S_n/n)_n$ konvergira po distribuciji k $N(0, c)$, a za $\alpha > 1$ niz $(S_n/n)_n$ ne konvergira po distribuciji, tj. u oba slučaja ne vrijedi SZVB.
Zaključak zadatka je da SZVB vrijedi ako i samo ako je $\alpha < 1$.

DZ 8.17 (*)**.** Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijbli s karakterističnom funkcijom φ. Dokažite

$$\exists a \in \mathbb{R}, \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} a \iff \varphi'(0) = ia.$$

(Napomena: derivacija u drugim točkama ne mora postojati.) Primijetite da ovaj rezultat daje još jednu karakterizaciju kada za njd. niz vrijedi SZVB, v. Teorem 7.26.

DZ 8.18. Nađite slučajnu varijablu X koja nema očekivanje, ali $\varphi'_X(0)$ postoji i konačna je.

Zadatak 8.19 (*)**.** Neka je $(X_n)_n$ njd. takav da $X_n \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Konvergira li $\sum_{k=1}^\infty \frac{X_k}{2^k}$ g.s.? Ako da, koja je distribucija limesa?

Rješenje. Imamo $\sum_{n=1}^\infty \mathrm{Var}\left(\frac{1}{2^n} X_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4^n} < \infty$ iz čega slijedi da $\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{2^n} X_n - \mathbb{E}\left[\frac{1}{2^n} X_n\right]\right) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} X_n$ konvergira g.s.

Ostaje pitanje distribucije limesa. Poslužimo se Teoremom neprekidnosti. Neka je $Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} X_k$, te neka je $\varphi_n = \varphi_{Y_n}$. Imamo

$$\varphi_n(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\frac{1}{2^k}X_k}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(\frac{t}{2^k}) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}e^{-i\frac{t}{2^k}} + \frac{1}{2}e^{i\frac{t}{2^k}}\right) = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right).$$

Sada ćemo iskoristiti jedan trik sličan teleskopiranju. Dakle,

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t) &= \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \cos(t/2)\cdot\cos(t/4)\cdots\cos(t/2^{n-1})\cdot\cos(t/2^n)\\
&= \{\text{ubacimo } \frac{2\sin(t/2^n)}{2\sin(t/2^n)}\}\\
&= \cos(t/2)\cdot\cos(t/4)\cdots\cos(t/2^{n-1})\cdot\underbrace{\cos(t/2^n)\cdot 2\sin(t/2^n)}_{\sin(t/2^{n-1})}\cdot\frac{1}{2\sin(t/2^n)}\\
&= \cos(t/2)\cdot\cos(t/4)\cdots\cos(t/2^{n-2})\cdot\underbrace{\cos(t/2^{n-1})\cdot \sin(t/2^{n-1})}_{\frac{1}{2}\sin(t/2^{n-2})}\cdot\frac{1}{2\sin(t/2^n)}\\
&= \cos(t/2)\cdot\cos(t/4)\cdots\cos(t/2^{n-2})\cdot\sin(t/2^{n-2})\cdot\frac{1}{2^2\sin(t/2^n)}\\
&= \cdots = \frac{\sin t}{2^n\sin(t/2^n)}.
\end{aligned}$$

Koristeći $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ imamo

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin t}{2^n\sin(t/2^n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin t}{t}\frac{t/2^n}{\sin(t/2^n)} = \frac{\sin t}{t}.$$

Dakle, $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}X_n \stackrel{D}{=} U(-1,1)$ što je nekako i bilo za očekivati.

DZ 8.20. U prethodnom zadatku koristile su se karakteristične funkcije kako bi se dokazalo da $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}X_n \stackrel{D}{=} U(-1,1)$ i račun definitivno nije lagan, niti se očekuje od studenata takva spretnost. Probajte dokazati ovu tvrdnju bez karakterističnih tvrdnji, tj. koristeći neke elementarnije račune. (Uputa: jedan od mogućih načina je da odredite kako izgleda funkcija distribucije slučajne varijable $Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}X_k$.)

Zadatak 8.21. Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli tako da $X_n \sim N(0,\sigma_n^2)$. Dokažite

$$X_n \xrightarrow{D} X \iff \sigma_n^2 \to \sigma^2 \geq 0 \text{ i limes je } X \sim N(0,\sigma^2),$$

gdje $N(0,0)$ označava konstantu 0.

Rješenje. $\Longleftarrow$ $\varphi_{X_n}(t) = e^{-\frac{\sigma_n^2 t^2}{2}} \to e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \varphi_{N(0,\sigma^2)}(t)$. Dakle, $X_n \xrightarrow{D} X \sim N(0,\sigma^2)$.

$\Longrightarrow$ Pretp. $X_n \xrightarrow{D} X$. Tada $\varphi_{X_n} \to \varphi_X$ po točkama te zapravo

$$\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t),\ \forall t \in \mathbb{R} \iff e^{-\frac{\sigma_n^2 t^2}{2}} \to \varphi_X(t),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Međutim, primijetimo da $e^{-\frac{\sigma_n^2 t^2}{2}} \in (0,1]$ pa je i limes realan i nenegativan, tj. $\varphi_X(t) \in [0,1]$, stoga možemo gornje izraze logaritmirati (čak i onda ako je $\varphi_X(t) = 0$ gdje onda smatramo da je $\log 0 = -\infty$). Dakle,

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\sigma_n^2 t^2}{2}} \to \varphi_X(t),\ \forall t \in \mathbb{R} &\iff -\frac{\sigma_n^2 t^2}{2} \to \log(\varphi_X(t)),\ \forall t \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow \sigma_n^2 \to -\frac{2}{t^2}\log(\varphi_X(t)),\ \forall t \neq 0, \end{aligned}$$

tj. σ_n^2 konvergira. Primijetimo da je nemoguće da $\sigma_n^2 \to \infty$ jer bi to značilo da je $\varphi_X(t) = 0, \forall t \neq 0$, tj. $\varphi_X = \mathbf{1}_{\{0\}}$ što nije karakteristična funkcija. Dakle, $\sigma^2 \coloneqq \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = -\frac{2}{t^2}\log(\varphi_X(t))$, $\forall t \neq 0$, iz čega vidimo da je $\varphi_X(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}, \forall t \in \mathbb{R}$ (jer jednakost trivijalno vrijedi i za $t = 0$).

Zadatak 8.22. Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli takav da $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ te neka je slučajna varijabla Y nezavisna od niza $(X_n)_n$. Dokažite da su tada X i Y nezavisne.

Rješenje. Zbog nezavisnosti od $(X_n)_n$ i Y imamo

$$\varphi_{(X_n,Y)}(t_1,t_2) = \varphi_{X_n}(t_1)\varphi_Y(t_2) \underset{tm.nepr.}{\xrightarrow{n\to\infty}} \varphi_X(t_1)\varphi_Y(t_2)$$

jer konvergencija po vjerojatnosti povlači konvergenciju po distribuciji. Primijetimo također da ako $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, tada i vektori $(X_n, Y) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X,Y)$. Zaista, za $\varepsilon > 0$ imamo

$$\mathbb{P}(||(X_n,Y)-(X,Y)||_2 \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(||(X_n - X, 0)||_2 \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon).$$

Ponovo iz činjenicec da konvergencija po vjerojatnosti povlači konvergenciju po distribuciji imamo $(X_n,Y) \xrightarrow{D} (X,Y)$ pa po teoremu neprekidnosti

$$\varphi_{(X_n,Y)}(t_1,t_2) \to \varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2), \quad \forall (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Zbog računa s početka sada dobijemo $\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) = \varphi_X(t_1)\varphi_Y(t_2), \forall (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$, tj. X i Y su nezavisne.

Zadatak 8.23. Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da $X_n \sim P(\frac{1}{2^n})$. Konvergira li red $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ (g.s.) i ako konvergira, čemu konvergira? ($P(\lambda)$ je Poissonova distribucija s parametrom λ.)

Rješenje. Vidimo da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var} X_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$ pa zaključujemo da $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(X_n - \mathbb{E}X_n)$ konvergira (g.s.). Također, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}X_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ pa onda imamo i da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergira (g.s.)
Preostaje vidjeti koja je distribucija limesa. Neka je $\varphi_n := \varphi_{\sum_{k=1}^n X_k}$. Zbog nezavisnosti od $(X_n)_n$ imamo

$$\varphi_n(t) = \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{2^k}(e^{it}-1)} = e^{(e^{it}-1)\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} \longrightarrow e^{e^{it}-1} = \varphi_{P(1)}(t),$$

tj. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n \sim P(1)$.

8.2 Kriteriji za karakteristične funkcije

U uvodu ovog poglavlja nabrojali smo neka svojstva karakterističnih funkcija, tj. neke nužne uvjete da bi funkcija bila karakteristična funkcija neke distribucije:

- φ_X je uniformno neprekidna,
- $|\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0) = 1$, $t \in \mathbb{R}$,
- $\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t) = \varphi_{-X}(t)$, $t \in \mathbb{R}$,
- $X \stackrel{D}{=} Y \iff \varphi_X = \varphi_Y$.

Sada ćemo navesti i teoreme koji govore i o dovoljnim uvjetima.

Teorem 8.24 (Bochner-Hinčinov teorem)**.** $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *je karakteristična funkcija ako i samo ako je* $\varphi(0) = 1$, φ *je neprekidna u 0 i* φ *je pozitivno definitna, tj.* $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R})$ $(\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C})$ $\sum_{i,j=1}^n \varphi(t_i - t_j)a_i\overline{a_j} \geq 0$.

Iako prethodni teorem daje karakterizaciju karakterističnih funkcija, često ga je teško iskoristiti u praksi na konkretnoj funkciji. Međutim, sljedeći teorem daje dovoljne uvjete za karakterističnu funkciju čija je klasa dosta bogata.

Teorem 8.25 (Polyin teorem). *Neka je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je*

- $\varphi(0) = 1$,
- *φ je parna, tj. $\varphi(t) = \varphi(-t)$,*
- *φ je konveksna na $(0, \infty)$,*
- $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.

Tada je φ karakteristična funkcija neke neprekidne slučajne varijable.

Napomena 8.26. Iz dokaza Polyinog teorema slijedi da gustoća slučajne varijable čija je karakteristična funkcija φ zadovoljava jednakost $f(x) = \int e^{-itx}\varphi(t)dt$ mada može biti i da je $\int |\varphi(t)|dt = \infty$. Za više detalja pogledati [3, Teorem 12.23] i komentar nakon teorema te Primjer 13.10 koji slijedi neposredno nakon komentara nakon teorema.

Zadatak 8.27. Koje su od sljedećih funkcija karakteristične funkcije?

(a) $\varphi(t) = \frac{1}{1-i|t|}$,

(b) $\varphi(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & t \geq 0, \\ \frac{1}{1+t^2}, & t < 0 \end{cases}$,

(c) $\varphi(t) = \frac{1}{1+|t|}$,

(d) $\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$,

*(e) $\varphi(t) = e^{\psi(t)-1}$, ako je ψ karakteristična funkcija.

Rješenje. Najbolja taktika kod ovakvih zadataka je prvo provjeriti nužne uvjete s početka poglavlja pa ako svi budu zadovoljeni, onda pristupiti zadatku na neki drugi način, npr. pokušati s Polyinim teoremom ili pokušati pogoditi slučajnu varijablu čija bi to bila distribucija. Ako ništa od toga ne uspije, preostaje Bochnerov teorem gdje onda treba nanjušiti je li funkcija stvarno karakteristična ili ne.

(a) Provjeravamo nužna svojstva. Imamo $f(0) = 1$ te $|\varphi(t)| = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \leq 1$. Međutim, $\varphi(-t) \neq \overline{\varphi(t)}$ za npr. $t = 1$ pa φ nije karakteristična funkcija.

(b) Očito $f(0) = 1$ te $|\varphi(t)| \leq 1$. Međutim, $\varphi(-t) \neq \varphi(t) = \overline{\varphi(t)}$, za $t > 0$.

(c) Lako je provjeriti da φ zadovoljava sve nužne uvjete. Sljedeći pokušaj je s Polyinim teoremom. Očito je da je $\varphi(0) = 1$ te da je φ neprekidna i parna. Za $t > 0$ je $\varphi'(t) = \frac{-1}{(1+t)^2}$ te $\varphi''(t) = \frac{2}{(1+t)^3} > 0$ pa je φ konveksna na $(0, \infty)$. Konačno, $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$ pa zaključujemo da su uvjeti Polyinog teorema zadovoljeni. Dakle, φ je karakteristična funkcija.

(d) Ostaje za DZ.

(e)

$$\varphi(t) = e^{\psi(t)-1} = \frac{1}{e}e^{\psi(t)} = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi(t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi(t)^n}{en!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\psi(t)^n,$$

gdje $a_n = \frac{1}{en!}$. Budući da je ψ karakteristična funkcija, ψ^n je karakteristična funkcija sume n nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli s karakterističnom funkcijom ψ. Takkođer, $a_n > 0$ i $\sum_n a_n = 1$ pa je φ beskonačna konveksna kombinacija karakterističnih funkcija pa je i sama karakteristična funkcija. Posljednju tvrdnju ćemo sada dokazati. Neka je $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\varphi_n(t)$, gdje su φ_n, $n \in \mathbb{N}$, karakterstične funkcije, a $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, t.d. $\sum_n \lambda_n = 1$. Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je φ_n karakteristična funkcija od X_n, te neka je A slučajna varijabla nezavisna od niza $(X_n)_n$ takva da

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \dots \end{pmatrix}.$$

Definirajmo slučajnu varijablu $Y = \sum_{n=0}^{\infty} X_n\mathbf{1}_{\{A=n\}}$, tj. na $\{A = n\}$ vrijedi $Y = X_n$. Računamo karakterističnu funkciju od Y:

$$\mathbb{E}[e^{itY}] = \mathbb{E}[e^{itY}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{1}_{\{A=n\}}}_{=1}] = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}[e^{itX_n}\mathbf{1}_{\{A=n\}}] = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}[e^{itX_n}|A=n]\mathbb{P}(A=n)$$

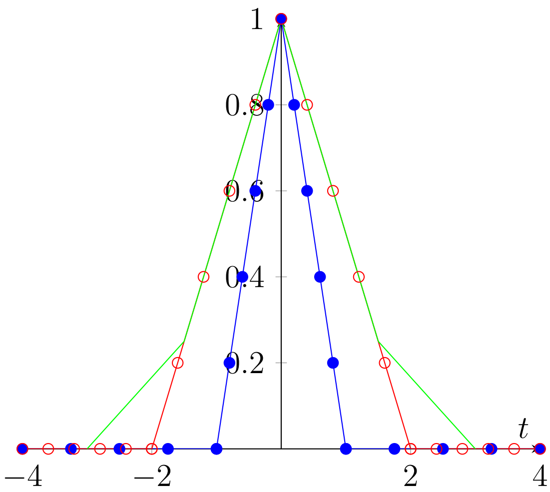
$$\overset{nezavisnost}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}[e^{itX_n}]\mathbb{P}(A=n) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(t)\lambda_n = \varphi(t).$$

Dakle, φ je karakteristična funkcija.

Zadatak 8.28. Nađite slučajne varijable X, Y i Z takve da je $X + Y \overset{D}{=} X + Z$, ali $Y \overset{D}{\neq} Z$.

Rješenje. Neka su X, Y i Z nezavisne. Tada je $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_{X+Z}(t)$, tj. zbog nezavisnosti $\varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \varphi_X(t)\varphi_Z(t)$. Sada je izuzetno bitno primijetiti da

iz ovoga NE SLIJEDI $\varphi_Y(t) = \varphi_Z(t)$ zato što može biti da je $\varphi_X(t) = 0$. To nam je i nit vodilja za nalaženje pogodnih X, Y i Z.
Neka je $\varphi_X(t) = (1 - |t|)_+$ (na slici to je krivulja plave boje s punim točkicama), $\varphi_Y(t) = (1 - |t|/2)_+$ (na slici to je krivulja crvene boje s praznim točkicama) i $\varphi_Z(t) = (1 - |t|/2)\mathbf{1}_{\{|t|\leq 1.5\}} + (1/2 - |t|/6)_+\mathbf{1}_{\{|t|>1.5\}}$ (na slici to je krivulja zelene boje bez točkica). Po Polyinom teoremu to su sve karakteristične funckije.



Sada je očito da je $\varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \varphi_X(t)\varphi_Z(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ali $\varphi_Y(t) \neq \varphi_Z(t)$, za $1.5 \leq |t| \leq 3$, pa $Y \overset{D}{\neq} Z$.
Ovaj zadatak najlakše je bilo riješiti vizualno (uz poznavanje Polyinog teorema), a onda ovo definiranje karakterističnih funkcija koje smo imali ide iznimno lako.

DZ 8.29. Neka je φ karakteristična funkcija. Jesu li

(a) $|\varphi|^2$,

(b) $Re(\varphi)$,

(c) $|\varphi|$

nužno karakteristične funkcije? Dokažite. (Odgovori: da, da, ne.)

8.3 Centralni granični teoremi

Još s druge godine studija znamo za sljedeći centralni granični teorem.

De Moivre - Laplaceov CGT: Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli takvih da $X_n \sim B(n,p)$, $p \in (0,1)$, te neka je $q = 1-p$. Tada

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Prisjetimo se da se $X_n \sim B(n,p)$ može zapisati kao suma n nezavisnih slučajnih varijabli takvih da sve imaju Bernoullijevu distribuciju s parametrom p. Tvrdnja prošlog teorema može se dokazati i za općenit slučaj sume nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli, tj. vrijedi:

Lévyjev CGT: Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih i jednakodistribuiranih slučajnih varijabli takvih da $\mathbb{E}X_1 = \mu$ i $\mathrm{Var}X_1 = \sigma^2 \in (0,\infty)$. Neka je $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}S_n}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n/n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Ukoliko želimo izbjeći uvjet da je niz $(X_n)_n$ jednako distribuiran, onda nije dovoljno imati samo konačne varijance varijabli $(X_n)_n$ već moramo zahtjevati neka dodatna svojstva. Npr. možemo imati uvjet s konačnim "$2+\delta$" momentima:

Ljapunovljev CGT: Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da $s_n^2 := \mathrm{Var}\, S_n \in (0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, te neka postoji $\delta > 0$ takav da $\mathbb{E}|X_n|^{2+\delta} < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Ako vrijedi

$$\frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|X_k - \mathbb{E}X_k|^{2+\delta}\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0, \tag{6}$$

onda $\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}S_n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$.

Također, imamo i jedan jači teorem koji čak ne zahtjeva konačnost "$2+\delta$" momenata, ali čiji je uvjet teže provjeriti nego onaj u Ljapunovljevom teoremu:

Lindebergov CGT: Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da $s_n^2 := \mathrm{Var}\, S_n \in (0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(X_k - \mathbb{E}X_k)^2; |X_k - \mathbb{E}X_k| \geq \varepsilon s_n\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0, \tag{7}$$

onda $\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}S_n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$.

Napomena 8.30.
- Ako vrijedi Ljapunovljev uvjet (6), onda vrijedi i Lindebergov uvjet (7), tj. uvjet (7) je jači od uvjeta (6) (jer se može dogoditi da uvjet (7) vrijedi, a (6) ne).
- Uvjet (7) je ekvivalentan s
$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[(X_k-\mathbb{E}X_k)^2; |X_k-\mathbb{E}X_k|\geq \varepsilon s_k\right]\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}0. \tag{8}$$
Uočite da je jedina promjena unutar očekivanja (" $\geq \varepsilon s_n$" $\leftrightarrow$ " $\geq \varepsilon s_k$"). (Oni koji ne žele probati dokazati ovu tvrdnju sami, a zanima ih dokaz neka pogledaju početak 9. poglavlja u [1].)

Sada ćemo riješiti nekoliko šablonskih zadataka. U svakom od njih kada pitamo vrijedi li CGT, mislimo na to vrijedi li $\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}S_n}}\xrightarrow{D}N(0,1)$.

Zadatak 8.31. Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da
$$X_n\sim\begin{pmatrix}-\sqrt{n} & 0 & \sqrt{n}\\ \frac{1}{2\sqrt{n}} & 1-\frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{2\sqrt{n}}\end{pmatrix},\quad n\in\mathbb{N}.$$
Vrijedi li CGT?

Rješenje. U principu najbolji recept kod zadataka kada imamo samo nezavisan niz je prvo probati s Ljapunovljevim uvjetom, a ako to ne prođe, onda vidjeti što se može učiniti s Lindebergovim.
Ispitujemo Ljapunovljev uvjet. Kao prvo: $\mathbb{E}X_n=0$, $\mathrm{Var}X_n=\mathbb{E}X_n^2=\sqrt{n}<\infty$, te $s_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\sim n^{1/2+1}$, tj. $s_n\sim n^{3/4}$, za sve $n\in\mathbb{N}$,.
Neka je sada $\delta>0$. Tada očito $\mathbb{E}|X_n|^{2+\delta}=\frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{n})^{2+\delta}=\sqrt{n}^{1+\delta}<\infty$, $n\in\mathbb{N}$.
Ljapunovljev uvjet je tada zadovoljen:
$$\frac{1}{s_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[|X_k-\mathbb{E}X_k|^{2+\delta}\right]=\underbrace{\frac{1}{s_n^{2+\delta}}}_{\sim n^{(2+\delta)\cdot 3/4}}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}^{1+\delta}}_{\sim n^{3/2+\delta/2}}\sim\frac{n^{3/2+\delta/2}}{n^{(2+\delta)\cdot 3/4}}=\frac{1}{n^{\delta/4}}\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Dakle, po Ljapunovljevom teoremu zaključujemo da CGT vrijedi, tj. $\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}S_n}}=\frac{S_n}{s_n}\xrightarrow{D}N(0,1)$.

Napomena 8.32.
- Na ispitu i kada budete vježbali pokušajte prikazati $\frac{S_n-\mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}S_n}}$ u što zatvorenijoj formi, tj. da ima što manje nepoznatih "znakova". Dakako, ne treba pretjerivati. Npr. u prošlom zadatku smo vidjeli da je $s_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\sim n^{3/2}$, a po Napomeni 7.10 znamo da je pripadna konstanta jednaka $3/2$, tj. mogli smo napisati i $\frac{S_n}{n^{3/4}}\sqrt{\frac{3}{2}}\xrightarrow{D}N(0,1)$, ali takva preciznost nije potrebna na ispitu.

- **Česta greška** je da se svakakvim čudima zamjenjuje broj $s_n^{2+\delta}$. Ponovimo, $s_n^2 = \text{Var}S_n$, zatim korjenujemo taj izraz da bismo dobili $s_n = \sqrt{\text{Var}S_n}$ te ga nakon toga dižemo na "$2+\delta$" potenciju, tj. $s_n^{2+\delta} = \sqrt{\text{Var}S_n}^{2+\delta}$.
  To **nije** isto kao $\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_k|^{2+\delta}]$!

Zadatak 8.33. Neka je $(X_n)_n$ niz njd. slučajnih varijabli takvih da $X_n \sim \begin{pmatrix} -\pi & \pi \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Definiramo $Y_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$. Odredite limes po distribuciji niza $(Y_n)_n$.

Rješenje. Imamo njd. niz $(X_n)_n$ pa ćemo iskoristiti Lévyjev teorem. Očito $\mathbb{E}X_n = 0$ i $\text{Var}X_n = \pi^2$. Po Lévyjevom teoremu imamo da

$$\frac{X_1+\cdots+X_n - n\cdot 0}{\sqrt{n\pi^2}} \xrightarrow{D} N(0,1),$$

tj. $\frac{Y_n}{\pi} \xrightarrow{D} N(0,1)$. Sad smo već veliki pa znamo da $Y_n \xrightarrow{D} N(0,\pi^2)$, ali mislim da to dosad još nismo dokazali direktno. Prvi način je po Slutskyjevoj lemi (Zadatak 5.14), a možemo i po teoremu neprekidnosti, tj. $\varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{Y_n/\pi}(\pi t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-(\pi t)^2/2} = \varphi_{N(0,\pi^2)}(t)$.

Zadatak 8.34 (*)**.** Pomoću CGT-a nađite

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-x}dx.$$

Rješenje.

$$I_n := \int_0^n \underbrace{\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-x}}_{\text{gustoća s.v. } X_n\sim\Gamma(n,1)}\,dx$$
$$\Longrightarrow I_n = \mathbb{P}(X_n \le n).$$

Neka je $(Y_n)_n$ niz njd. slučajnih varijabli takvih da $Y_n \sim \Gamma(1,1)$. Tada je $X_n \overset{D}{=} Y_1+\cdots+Y_n$, $n\in\mathbb{N}$, što se pokaže trivijalnim računom preko karakterističnih funkcija (ili se pozovemo na tvrdnju dokazanu na Statistici). Budući da je $\mathbb{E}Y_n = \text{Var}X_n = 1$, $n\in\mathbb{N}$, po Lévyjevom teoremu imamo

$$\begin{aligned} I_n &= \mathbb{P}(X_n\le n) = \mathbb{P}(Y_1+\cdots+Y_n\le n)\\ &= \mathbb{P}\left(\frac{Y_1+\cdots+Y_n-n}{\sqrt{n}} \le \frac{n-n}{\sqrt{n}}\right)\\ &= \mathbb{P}(\underbrace{\frac{Y_1+\cdots+Y_n-n}{\sqrt{n}}}_{\xrightarrow{D}N(0,1)} \le 0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(0) = 1/2, \end{aligned}$$

gdje je Φ funkcija distribucije od $N(0,1)$.
Ovaj zadatak je označen sa zvjezdicom samo zato što se ne očekuje od studenata da znaju očekivanje i varijancu Γ-distribucije.
Primijetimo da je ovaj zadatak bilo nemoguće riješiti pomoću dominirane konvergencije jer za svaki $x \in (0,\infty)$ imamo $f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-x} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pa ako bismo mogli nekako uvući limes unutar integrala, konačni rezultat trebao bi biti 0 što je kontradikcija. Dakle, ne postoji integrabilna funkcija koja dominira niz $(f_n)_n$.

DZ 8.35. (a) Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\lfloor np\rfloor}\binom{n}{k}p^k(1-q)^{n-k},$$

za $p \in (0,1)$ i $q = 1-p$.

(b) Neka su $x, t > 0$. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} e^{-nt}\sum_{k=0}^{\lfloor nx\rfloor}\frac{(nt)^k}{k!}.$$

Zadatak 8.36. Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da $X_n \sim \begin{pmatrix}\sqrt{n} & 3\sqrt{n}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Vrijedi li CGT?

Rješenje. Probat ćemo s Ljapunovljevim teoremom.
Imamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X_n &= 2\sqrt{n},\\
\mathbb{E}X_n^2 &= \frac{n}{2}+\frac{9n}{2} = 5n,\\
\implies \mathrm{Var}X_n &= 5n-4n = n,\\
\implies s_n^2 &= \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}X_k = \sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Za $\delta > 0$ je $\mathbb{E}[|X_n - \mathbb{E}X_n|^{2+\delta}] = 2\frac{|\sqrt{n}|^{2+\delta}}{2} = n^{1+\delta/2}$ pa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[|X_k-\mathbb{E}X_k|^{2+\delta}] &= \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^{1+\delta/2}\sum_{k=1}^{n}k^{1+\delta/2}\\
&\sim \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^{1+\delta/2} n^{2+\delta/2} \sim \frac{1}{n^{\delta/2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Dakle, Ljapunovljev uvjet je zadovoljen pa CGT vrijedi, tj.

$$\frac{S_n - 2\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Zadatak 8.37. Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da

(a) $X_n \sim N(1,1)$,

(b) $X_n \sim N(1,n)$.

Neka je $Y_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ i $Z_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Odredite konvergiraju li po distribuciji nizovi $(Y_n)_n$ i $(Z_n)_n$.

Rješenje. (a) $(X_n)_n$ je njd. niz pa po JZVB znamo da $\lim_{n\to\infty} Y_n \xrightarrow{(g.s.)} \mathbb{E}X_1 = 1$.

Za $(Z_n)_n$ imamo:

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \stackrel{D}{=} \frac{N(n,n)}{\sqrt{n}} \stackrel{D}{=} N(\sqrt{n},1).$$

Također, po Lévyjevom CGT-u je

$$Z_n - \sqrt{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Štoviše, čak je $Z_n - \sqrt{n} \stackrel{D}{=} N(0,1)$. Znači li to da $Z_n \stackrel{D}{\not\to}$? Kako to možemo strogo matematički argumentirati?
Jedan od načina je preko karakterističnih funkcija jer $\varphi_{Z_n}(t) = \varphi_{N(\sqrt{n},1)}(t) = e^{i\sqrt{n}t}e^{-\frac{t^2}{2}}$. Sada moramo dokazati da $(e^{i\sqrt{n}t})_n = (\cos(\sqrt{n}t) + i\sin(\sqrt{n}t))_n$ ne konvergira. Kako se to pokaže? Znamo da niz kompleksnih brojeva konvergira ako i samo ako mu konvergiraju i realni dio i kompleksni dio. Uzmimo samo realni dio za $t = \pi$. Tada je izraz $\cos(\sqrt{n}\pi)$ beskonačno mnogo puta jednak -1 i beskonačno mnogo puta jednak 1. Dakle, $(e^{i\sqrt{n}t})_n$ ne konvergira za svaki $t \in \mathbb{R}$ pa onda ne konvergira ni $(\varphi_{Z_n})_n$, tj. imamo $Z_n \stackrel{D}{\not\to}$.
Drugi način je intuitivniji. Osjećamo da Z_n "bježi" u beskonačno jer mu je očekivanje $\sqrt{n}$. Pretpostavimo da ipak postoji sl. var. X td. $Z_n \xrightarrow{D} X$. Tada za $M \in C(F_X)$ imamo $\mathbb{P}(Z_n \leq M) = \mathbb{P}(X \leq M)$. Za $\varepsilon > 0$ neka je $n_0 \in \mathbb{N}$ td. za sve $n \geq n_0$ vrijedi $\Phi(M - \sqrt{n}) = F_{N(0,1)}(M - \sqrt{n}) < \varepsilon$. Imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq M) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq M) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n - \sqrt{n} \leq M - \sqrt{n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Phi(M - \sqrt{n}) \leq \Phi(M - \sqrt{n_0}) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{P}(X \leq M) = 0$, $\forall M \in C(F_X)$. Kontradikcija jer funkcija distribucije treba težiti u 1 u beskonačnosti. Dakle, ne postoji sl. var. X td. $Z_n \xrightarrow{D} X$.

(b) Za $(Y_n)_n$ imamo

$$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \overset{D}{=} \frac{N(n, \sum_{k=1}^n k)}{n} \overset{D}{=} N(1, \frac{n+1}{2n}) \xrightarrow{D} N(1, 1/2),$$

gdje konvergenciju možemo dokazati npr. teoremom neprekidnosti.
Za $(Z_n)_n$ imamo

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \overset{D}{=} \frac{N(n, \sum_{k=1}^n k)}{\sqrt{n}} \overset{D}{=} N(\sqrt{n}, \frac{n+1}{2}),$$

iz čega vidimo da $(Z_n)_n$ ne konvergira po distribuciji jer npr. po teoremu neprekidnosti

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_{Z_n}(t)| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{|e^{it\sqrt{n}}|}_{=1} e^{-\frac{n+1}{4}t^2} = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Dakle, $\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}$ nije neprekidna u 0 pa $(Z_n)_n$ ne može konvergirati po distribuciji.

Lindeberg-Fellerov teorem: Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli s konačnim varijancama i neka je $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $s_n^2 = \mathrm{Var} S_n$. Tada Lindebergov uvjet

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[(X_k - \mathbb{E}X_k)^2; |X_k - \mathbb{E}X_k| \geq \varepsilon s_n\right] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

vrijedi **ako i samo ako** $\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{s_n} \xrightarrow{D} N(0,1)$ i ako je $(\frac{X_k - \mathbb{E}X_k}{s_n})_{k,n}$ unifmorno asimptotski zanemariv, tj. ako je

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{n\to\infty} \max_{k=1,\ldots,n} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_k - \mathbb{E}X_k}{s_n}\right| \geq \varepsilon\right) = 0. \tag{9}$$

Zadatak 8.38 (s kolokvija)**.** Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli na njemu tako da je za sve $n \in \mathbb{N}$

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -(n+1)^\alpha & 0 & (n+1)^\alpha \\ \frac{1}{(n+1)^\beta} & 1 - \frac{2}{(n+1)^\beta} & \frac{1}{(n+1)^\beta} \end{pmatrix},$$

gdje su $\alpha > 0$ i $\beta > 1$ takvi da $2\alpha + 1 > \beta$. Vrijedi li centralni granični teorem za niz $(X_n)_n$?

Rješenje. 1. način: Lako se dobije $s_n \sim n^{\alpha-\beta/2+1/2}$ i $\mathbb{E}|X_n|^{2+\delta} \sim n^{(2+\delta)\alpha-\beta}$ što dovodi do

$$\frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k|^{2+\delta} \sim n^{\delta/2(\beta-1)} \to \infty$$

pa Ljapunovljev uvjet nije zadovoljen. Nadalje, Lindebergov uvjet također ne vrijedi jer za dovoljno male $\varepsilon > 0$ imamo (jer je $\beta > 1$)

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k^2; |X_k| \geq \varepsilon s_k] &\geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k^2; |X_k| \geq c\varepsilon k^{\alpha-\beta/2+1/2}] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k^2] = 1,\end{aligned}$$

gdje je $c \in \mathbb{R}$ konstanta takva da je $\lim_n \frac{s_n}{n^{\alpha-\beta/2+1/2}} = c$. Konačno, pomoću Čebiševljeve nejednakosti dobivamo da je

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \max_{k=1,\dots,n} \mathbb{P}\left(\frac{|X_k|}{s_n} \geq \varepsilon\right) &\leq \limsup_{n\to\infty} \max_{k=1,\dots,n} \frac{\mathbb{E}[X_k^2]}{\varepsilon^2 s_n^2} \\ &\sim \limsup_{n\to\infty} \max_{k=1,\dots,n} \frac{k^{2\alpha-\beta}}{n^{2\alpha-\beta+1}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \to 0.\end{aligned}$$

pa imamo uniformnu asimptotsku zanemarivost. Sada po Lindeberg-Fellerovom teoremu imamo da $\frac{S_n}{s_n} \overset{D}{\not\to} N(0,1)$.

2. način: Budući da je $\beta > 1$, imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \neq 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)^\beta} < \infty,$$

što po Borel-Cantelli lemi znači da je $\mathbb{P}(X_n \neq 0 \text{b.m.p.}) = 0$, tj. za g.s. $\omega \in \Omega$ postoji $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ takav da $S_k(\omega) = S_{n_0}(\omega)$, $k \geq n_0$. Nadalje, prisjetimo se, $s_n \sim n^{\alpha-\beta/2+1/2} \to \infty$, $n \to \infty$, što povlači

$$\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{(g.s.)} 0,$$

tj. ne vrijedi CGT. Ovaj trik s Borel-Cantellijem zna biti koristan.

Zadatak 8.39 (*Ubijačina za kraj: drugi dio zadatka je malo zahtjevniji)**.** Neka je $(Y_n)_n$ niz njd. sl. var. td. $\mathbb{E}Y_n = 0$, $\mathbb{E}Y_n^2 = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Neka je $(Z_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli, nezavisan od $(Y_n)_n$ i takav da $\mathbb{P}(Z_n = n) = \mathbb{P}(Z_n = -n) = \frac{1}{2n^2}$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Neka je $X_n = Y_n + Z_n$, $n \in \mathbb{N}$, i $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Dokažite da vrijedi $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$, ali da ne vrijedi Lindebergov uvjet.

Rješenje. Da bismo dokazali $S_n/\sqrt{n} \to N(0,1)$, napravit ćemo dvije stvari. Neka $S_n^Y = Y_1 + \cdots + Y_n$, i $S_n^Z = Z_1 + \cdots + Z_n$. Prvo, po Lévyjevom CGT-u $S_n^Y/\sqrt{n} \xrightarrow{D} N(0,1)$. Druga stvar koja nam koristi, tj. koju ćemo pokazati je $S_n^Z/\sqrt{n} \xrightarrow{(g.s.)} 0$. Budući da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n \neq 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

po Borel-Cantelli lemi znamo $\mathbb{P}(Z_n \neq 0 \text{ b.m.p.}) = 0$. Iz toga slijedi da $S_n^Z/\sqrt{n} \xrightarrow{(g.s.)} 0$ jer gotovo svaki $\omega \in \Omega$ postoji $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ imamo $Z_n(\omega) = 0$. Dakle, $S_n/\sqrt{n} = S_n^Y/\sqrt{n} + S_n^Z/\sqrt{n} \xrightarrow{D} N(0,1)$ (koristeći Slutskyjevu lemu, tj. Zadatak 5.14). Time smo dokazali prvi dio zadatka.

Sad ćemo dokazati da Lindebergov uvjet ne vrijedi. Koristimo sljedeću verziju uvjeta, tj. (8):

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - m_k)^2; |X_k - m_k| \geq \varepsilon s_k],$$

gdje $m_k = \mathbb{E}X_k$ i $s_n^2 = Var(X_1 + \cdots + X_n)$. Očito, kod nas $m_k = \mathbb{E}Y_k + \mathbb{E}Z_k = 0$, a također zbog $Var(Z_k) = 1$ imamo $s_n^2 = 2n$, $\forall n \geq 1$. Sada računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_k - m_k)^2; &|X_k - m_k| \geq \varepsilon s_k] = \mathbb{E}[(Y_k + Z_k)^2; |Y_k + Z_k| \geq \varepsilon s_k] \\
&= \mathbb{E}[(Y_k + k)^2; |Y_k + k| \geq \varepsilon s_k, Z_k = k] \\
&\quad + \mathbb{E}[(Y_k + 0)^2; |Y_k + 0| \geq \varepsilon s_k, Z_k = 0] \\
&\quad\quad + \mathbb{E}[(Y_k - k)^2; |Y_k - k| \geq \varepsilon s_k, Z_k = -k] \\
&\overset{nez.}{\geq} \mathbb{E}[(Y_k + k)^2; |Y_k + k| \geq \varepsilon s_k] \frac{1}{2k^2} \\
&\quad\quad + \mathbb{E}[(Y_k - k)^2; |Y_k - k| \geq \varepsilon s_k] \frac{1}{2k^2} \\
&\overset{jed.distr.}{\geq} \mathbb{E}[(Y_1 + k)^2; |Y_1 + k| \geq \varepsilon s_k] \frac{1}{2k^2} \\
&\quad\quad + \mathbb{E}[(Y_1 - k)^2; |Y_1 - k| \geq \varepsilon s_k] \frac{1}{2k^2}.
\end{aligned} \tag{$\maltese$}$$

Pomoću Fatouove leme zaključujemo da

$$\begin{aligned}
\liminf_{k \to \infty} \mathbb{E}[(Y_1 \pm k)^2; |Y_1 \pm k| \geq \varepsilon s_k] \frac{1}{2k^2} &\geq \mathbb{E}\left[\liminf_{k \to \infty} \left(\frac{(Y_1 \pm k)^2}{2k^2} \mathbb{1}_{\{|Y_1 \pm k| \geq \varepsilon \sqrt{2k}\}} \right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Dakle, za dovoljno velik $n_0 \in \mathbb{N}$ imamo da za sve $k > n_0$ vrijedi

$$\mathbb{E}[(Y_1 \pm k)^2; |Y_1 \pm k| \geq \varepsilon s_k] \frac{1}{2k^2} \geq \frac{1}{3}.$$

Konačno, sada iz ($\maltese$) slijedi

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - m_k)^2; |X_k - m_k| \geq \varepsilon s_k] \geq \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \left(\sum_{k=n_0+1}^{n} \mathbb{E}[(Y_1 + k)^2; |Y_1 + k| \geq \varepsilon s_k] \frac{1}{2k^2} \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \sum_{k=n_0+1}^{n} \mathbb{E}[(Y_1 - k)^2; |Y_1 - k| \geq \varepsilon s_k] \frac{1}{2k^2} \right) \\
&\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \cdot \left((n - n_0) \cdot \frac{1}{3} + (n - n_0) \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Dakle, Lindebergov uvjet nije zadovoljen.

Napomena 8.40. Rješenje prošlog zadatka remek-djelo je vašeg asistenta te tko ima account na stackexchangeu slobodno mu "upvotea" rješenje na `https://math.stackexchange.com/questions/717181/showing-that-lindeberg-condition-do` `2842300#2842300`.

Literatura

[1] Y. S. Chow and H. Teicher. *Probability theory: independence, interchangeability, martingales*. Springer Science & Business Media, 2012.

[2] R. Durrett. *Probability: theory and examples*, volume 49. Cambridge university press, 2019.

[3] N. Sarapa. *Teorija vjerojatnosti*. Školska knjiga, 2002.