

# TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 23. lipnja 2023.

- Broj zadataka: 5
- Vrijeme rješavanja: 120 min
- Ukupan broj bodova: 50
- Na kolokviju je dozvoljen isključivo pribor za pisanje, te je strogo zabranjeno posjedovanje elektroničkih uređaja, primjerice mobitela, pametnih satava i kalkulatora.

**Zadatak 1.** (10 bodova) Iskažite i dokažite teorem neprekidnosti.

# TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 23. lipnja 2023.

**Zadatak 2.** (10 bodova) Iskažite i dokažite Lévyjev centralni granični teorem.

# TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 23. lipnja 2023.

**Zadatak 3.** (10 bodova) Ako niz nezavisnih kvadratno integrabilnih slučajnih varijabli zadovoljava Ljapunovljev uvjet, mora li tada generirati *uaz* sustav? Dokažite detaljno vašu tvrdnju.

# TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 23. lipnja 2023.

**Zadatak 4.** ( $3+3+2=8$  bodova) Neka je  $\varphi$  karakteristična funkcija. Koje od sljedećih funkcija su karakteristične funkcije?

(a)  $t \mapsto e^{-2\sin^2 t}$ ;

(b)  $t \mapsto \frac{1-c}{1-c\varphi(t)}$ , za  $c \in (0, 1)$ ;

(c)  $t \mapsto (1 - |t|^\alpha)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$  za  $t \in [0, 1]$ ;

Precizno argumentirajte, a smijete koristiti (bez dokazivanja) sve tvrdnje s predavanja i vježbi tako da ih precizno iskažete.

# TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 23. lipnja 2023.

**Zadatak 5.** (12 bodova) Neka je  $\alpha \geq 1$  i neka su  $(X_n)_n$  nezavisne takve da

$$\mathbb{P}(X_n = -n^\alpha) = \mathbb{P}(X_n = n^\alpha) = \frac{1}{6n^{2(\alpha-1)}}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{3n^{2(\alpha-1)}}.$$

Dokažite da za  $(X_n)_n$  vrijedi centralni granični teorem, tj.  $\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \rightarrow N(0, 1)$  po distribuciji za  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , ako i samo ako je  $\alpha < \frac{3}{2}$ .