TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 27. travnja 2023.

Zadatak 1. *(10 bodova)* Iskažite i dokažite Kolmogorovljev jaki zakon velikih brojeva.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 27. travnja 2023.

Zadatak 2. *(10 bodova)* Iskažite i dokažite teorem jedinstvenosti za karakteristične funkcije.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 27. travnja 2023.

Zadatak 3. *(10 bodova)* Iskažite i dokažite karakterizaciju slabe konvergencije pomoću otvorenih skupova.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 27. travnja 2023.

Zadatak 4. *(12 bodova)*

(a) (*7 bodova*) Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli takav da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mathbb{E}[X_n^2] \leq n^\alpha$, za uvijek isti $\alpha < 1$, te da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$|m - n| \geq k \implies X_n \text{ i } X_m \text{ su nezavisne.}$$

Dokažite da tada vrijedi slabi zakon velikih brojeva za $(X_n)_n$.

(b) (b1) (*4 boda*) Neka su $Z_1, \dots, Z_{2n}$ nezavisne slučajne varijable s eksponencijalnom distribucijom s parametrom $\lambda > 0$. Odredite gustoću slučajne varijable

$$Z = \min\left\{\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}, \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4}, \dots, \frac{Z_{2n-1}}{Z_{2n-1} + Z_{2n}}\right\}.$$

Smijete se pozivati na rezultate napravljene na Teoriji vjeorjatnosti 1 bez dokaza, a sve ostale rezultate treba dokazati.

(b2) (*1 bod*) Je li slučajna varijabla $X = \max\{Z_1, \lambda\}$ neprekidna slučajna varijabla? Svoju tvrdnju dokažite.

Rješenje.

(a) Nizovi

$$\begin{aligned}
&X_1, X_{k+1}, X_{2k+1}, X_{3k+1}, \dots \\
&X_2, X_{k+2}, X_{2k+2}, X_{3k+2}, \dots \\
&\dots \\
&X_k, X_{2k}, X_{3k}, X_{4k}, \dots
\end{aligned}$$

međusobno s nezavisni i svaki od njih zadovoljava SZVB. Naime, koristeći Čebiševljevu nejednakost

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n (X_{ik+l} - \mathbb{E}X_{ik+l})}{n}\right| \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_{ik+l}^2]}{\varepsilon^2 n^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^n (ik+l)^\alpha}{\varepsilon^2 n^2} \\
&\leq \frac{\sum_{i=1}^n k^\alpha (i+1)^\alpha}{\varepsilon^2 n^2} \leq k^\alpha \frac{n^{\alpha+1}}{\varepsilon^2 n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad l = 1, 2, \dots, k.
\end{aligned}$$

Sada se može ponoviti postupak kao u zadatku s vježbi koji kaže da onda i niz $X_1, X_2, \dots$ zadovoljava SZVB.

(b) $\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}, \frac{Z_3}{Z_3+Z_4}, \dots, \frac{Z_{2n-1}}{Z_{2n-1}+Z_{2n}}$ međusobno su nezavisne jer su tvorene od različitih dijelova niza $(Z_n)_n$. Ponavljajući rješenje zadatka s vježbi imamo da je $\frac{Z_1}{Z_1+Z_2} \overset{D}{=} U(0,1)$. Distribucija minimuma dana je s

$$F_{\min}(x) = 1 - (1 - F(x))^n,$$

a kod nas je F distribucija uniformne razdiobe. Gustoća minimuma je derivacija distribucije: $f_{\min}(x) = nf(x)(1 - F(x))^{n-1} = n(1 - \max\{\min\{x, 1\}, 0\})$.

(c) X nije neprekidna jer $\mathbb{P}(X = \lambda) = \mathbb{P}(Z_1 \geq \lambda) = e^{-\lambda^2} > 0$.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 27. travnja 2023.

Zadatak 5. *(8 bodova)*

(a) (*4 boda*) Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli takav da $\sigma^2 \coloneqq Var(X_1) < \infty$. Dokažite da

$$\lim_n \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \sigma^2 \quad g.s.$$

pri čemu je $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Argumentirajte precizno i detaljno.

(b) (*4 boda*) Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da

$$X_n \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{n} - n\log^3 n & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} + n\log^3 n \\ \frac{1}{2n\log(n+1)} & 1 - \frac{1}{n\log(n+1)} & \frac{1}{2n\log(n+1)} \end{pmatrix}.$$

Konvergira li gotovo sigurno niz $\left(\frac{S_n}{n\log n}\right)_n$ gdje je $S_n \coloneqq X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje.

(a) Lako se izračuna

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{n}{n-1}(\overline{X}_n)^2.$$

Po Kolmogorovljevom JZVB imamo $\lim_n \frac{n}{n-1}(\overline{X}_n)^2 = (\mathbb{E}X_1)^2$ g.s. Budući da je i $(X_n^2)_n$ njd. i $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$ po Kolmogorovljevom JZVB imamo

$$\lim_n \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i^2 = \mathbb{E}X_1^2, \quad g.s.$$

Dakle,

$$\lim_n \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \sigma^2 \quad g.s.$$

(b) $\mathbb{E}X_n = \frac{1}{n}$ i $\mathbb{E}S_n/(n\log n) \sim \frac{1}{n} \to 0$. Dakle, $\left(\frac{S_n}{n\log n}\right)_n$ konvergira ako i samo ako $\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n\log n}\right)_n$ konvergira. Međutim,

$$\sum_n \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}X_n| = n\log^3 n) = \sum_n \frac{1}{n\log n} = \infty \implies \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}X_n| = n\log^3 n \;\; b.m.p.) = 1,$$

pa onda i

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n - S_{n-1} + \mathbb{E}S_{n-1}}{n\log^n} = log^2 n \quad b.m.p.$$

tj. $\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n\log n}\right)_n$ ne konvergira.