TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 24. lipnja 2022.

Zadatak 1. *(10 bodova)* Iskažite Lindeberg-Fellerov teorem precizno definirajući pojmove (koji nisu elementarni) koji se koriste u njemu. Također, pokažite da Ljapunovljev uvjet povlači Lindebergov uvjet.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 24. lipnja 2022.

Zadatak 2. *(10 bodova)* Iskažite i dokažite teorem neprekidnosti.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 24. lipnja 2022.

Zadatak 3. *(10 bodova)*

(a) (4 boda) Precizno iskažite Polyin teorem i Bochner-Hinčinov teorem.

(b) (6 bodova) Je li $\varphi(t) = (1 - |t|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$ karakteristična funkcija? A funkcija $\varphi(t) = (1 - t^2)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)$?

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 24. lipnja 2022.

Zadatak 4. *(10 bodova)*

(a) (3 boda) Neka je X vrijeme prvog uspjeha u nizu nezavinsih jednakodistribuiranih pokusa gdje svaki ima vjerojatnost uspjeha $p \in (0,1)$, uz oznaku $X \sim G(p)$. Odredite karakterističnu funkciju slučajne varijable X.

(b) (7 bodova) Neka je $0 < \lambda < N$ za neki $N \in \mathbb{N}$ i $X_n \sim G(\frac{\lambda}{n})$, $n \geq N$. Dokažite da niz $\left(\frac{X_n}{n}\right)_{n \geq N}$ konvergira po distribuciji i odredite razdiobu granične slučajne varijable.

Rješenje.

(a) $\varphi_X(t) = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} e^{itk}(1-p)^{k-1}p = pe^{it} \sum\limits_{k \in \mathbb{N}_0} e^{itk}(1-p)^k = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$.

(b) Vrijedi $\varphi_{\frac{X_n}{n}}(t) = \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{\frac{\lambda}{n}e^{i\frac{t}{n}}}{1-(1-\frac{\lambda}{n})e^{i\frac{t}{n}}}$. Kako je

$$\frac{\frac{\lambda}{n}e^{i\frac{t}{n}}}{1-(1-\frac{\lambda}{n})e^{i\frac{t}{n}}} = \frac{\lambda e^{i\frac{t}{n}}}{n-(n-\lambda)e^{i\frac{t}{n}}} = \frac{\lambda e^{i\frac{t}{n}}}{t\frac{1-\cos\left(\frac{t}{n}\right)}{\frac{t}{n}} + \lambda\cos\left(\frac{t}{n}\right) - it\frac{sin\left(\frac{t}{n}\right)}{\frac{t}{n}} + i\lambda\sin\left(\frac{t}{n}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

slijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{\frac{X_n}{n}}(t) = \varphi_{Exp(\lambda)}(t)$, pa po teoremu neprekidnosti i jedinstvenosti slijedi $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{D} \mathrm{Exp}(\lambda)$.

,

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 24. lipnja 2022.

Zadatak 5. *(10 bodova)*

(a) (8 bodova) Neka je (X_n) niz nezavisnih jednako distribuiranih Bernoullijevih slučajnih varijabli $B(p)$, $p \in (0,1)$. Pokažite da niz $(n^\alpha \cdot X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava centralni granični teorem, $\alpha > -\frac{1}{2}$.

(b) (2 boda) Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}X_n = 0$ i $0 < Var(X_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da $\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{n}} \to \infty$ g.s.

Rješenje.

(a) Prolazi Ljapunovljev teorem za dovoljno mali $\delta > 0$. (Ako je $\alpha > 0$, onda je svaki $\delta > 0$ dobar, a inače se mora odabrati povoljan.)

(b) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $Var(X_n) = 1$.

Primjena Kolmogorovljevog zakona 0-1 i CGT-a kako bi se pokazalo da je nemoguće da $\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{n}} \to c \in \mathbb{R}$ g.s. Naime, ako $\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{n}} \to c \in \mathbb{R}$ g.s., onda

$$0 = \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} > c+1\right\} \ b.m.p.\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{\frac{S_k}{\sqrt{k}} > c+1\right\}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{\frac{S_k}{\sqrt{k}} > c+1\right\}\right) \geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > c+1\right) = 1 - \Phi(c+1) > 0.$$