TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 29. travnja 2022.

Zadatak 1. *(10 bodova)* Iskažite i dokažite Kolmogorovljev jaki zakon velikih brojeva.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 29. travnja 2022.

Zadatak 2. *(10 bodova)* Definirajte karakterističnu funkciju, te iskažite i dokažite njezina osnovna svojstva.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 29. travnja 2022.

Zadatak 3. *(10 bodova)* Iskažite i dokažite karakterizaciju slabe konvergencije pomoću zatvorenih skupova.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 29. travnja 2022.

Zadatak 4. *(10 bodova)*

(a) (5 bodova) Za nezavisne slučajne varijable $X, Y \sim N(0,1)$ odredite funkciju gustoće slučajnog vektora (U, V) dobivenog rotacijom vektora (X, Y) za kut $\alpha \in [0, 2\pi)$,

$$\begin{aligned} U &= X\cos\alpha + Y\sin\alpha \\ V &= -X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \end{aligned}$$

Jesu li U i V nezavisne slučajne varijable?

(b) (5 bodova) Neka su $X, Y \sim U(0,1)$ nezavisne slučajne varijable. Odredite funkciju distribucije slučajnog vektora $(\max\{X,Y\}, \min\{X,Y\})$. Jesu li $\max\{X,Y\}$ i $\min\{X,Y\}$ nezavisne slučajne varijable?

Rješenje.

(a) Budući da rotiramo, inverz je rotacija za kut $-\alpha$, tj. $g^{-1}(u,v) = (u\cos\alpha - v\sin\alpha, u\sin\alpha + v\cos\alpha)$, a $Dg^{-1} = 1$. Stoga

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{2\pi}e^{-(u^2+v^2)/2}$$

što je gustoća jediničnog normalnog vektora čije su koordinate naravno nezavisne.

(b) Koristi se raspis

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max\{X,Y\} \leq u, \min\{X,Y\} \leq v) &= \mathbb{P}(X \leq u, Y \leq u, X \leq v, Y > v) + \mathbb{P}(X \leq u, Y \leq u, X > v, Y \leq v) \\ &\quad + \mathbb{P}(X \leq u, Y \leq u, X \leq v, Y \leq v) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \min\{u,v\})\mathbb{P}(v < Y \leq u) + \mathbb{P}(v < X \leq u)\mathbb{P}(Y \leq \min\{u,v\}) \\ &\quad + \mathbb{P}(X \leq \min\{u,v\})\mathbb{P}(Y \leq \min\{u,v\}), \end{aligned}$$

itd. Za nezavinsost odmah vidimo da za $0 < u < v < 1$ vrijedi $0 = \mathbb{P}(\max\{X,Y\} \leq u, \min\{X,Y\} > v)$. Međutim, $\mathbb{P}(\max\{X,Y\} \leq u)\mathbb{P}(\min\{X,Y\} > v) = u^2(1-v)^2 > 0$, stoga $\max\{X,Y\}$ i $\min\{X,Y\}$ nisu nezavisne.

,

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 29. travnja 2022.

Zadatak 5. *(10 bodova)* Neka je dan niz nezavisnih slučajnih varijabli $(X_n)_n$ takav da $X_1 = \pi$ i

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{4n \log n}, \quad \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{4n \log n}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{2n \log n}.$$

(a) (5 bodova) Vrijedi li slabi zakon velikih brojeva za $(X_n)_n$?

(b) (5 bodova) Vrijedi li jaki zakon velikih brojeva za $(X_n)_n$?

Rješenje.

(a) Da. Vrijedi $\mathbb{E}X_n = 0$ i $Var X = \frac{n}{2\log n}$. Stoga

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2\log k} &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n_0}\frac{k}{2\log k} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{k}{2\log k} \\ &\leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n_0}\frac{k}{2\log k} + \frac{1}{n^2\log n_0}\sum_{k=n_0+1}^{n} k \lesssim \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n_0}\frac{k}{2\log k} + \frac{1}{\log n_0} \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

za dovoljno veliki n_0 i sve $n \geq n_0$.

(b) Ne. Kolmogorovljev dovoljan uvjet daje $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Var(X_n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\log n} = \infty$ po integralnom kriteriju. Dakle, time ne možemo ništa zaključiti.

Ipak, vrijedi i $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(|X_n| = n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\log n} = \infty$ pa Borel-Cantelli implicira $\mathbb{P}(|X_n| = n \text{ b.m.p}) = 1$. Dakle,

$$\left|\frac{S_n - S_{n-1}}{n}\right| = \left|\frac{X_n}{n}\right| = 1, \quad b.m.p.$$

što implicira da $\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n}$ ne konvergira g.s.