TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 28. lipnja 2021.

Zadatak 1. *(10 bodova)* Iskažite i dokažite teorem neprekidnosti za krakteristične funkcije.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 28. lipnja 2021.

Zadatak 2. *(10 bodova)* Dokažite da svaka pozitivno semidefinitna funkcija koja je neprekidna u nuli, mora biti neprekidna na cijelom skupu realnih brojeva.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 28. lipnja 2021.

Zadatak 3. *(10 bodova)* Iskažite Lindebergov teorem. Iskažite Ljapunovljev teorem. Dokažite da Ljapunovljev teorem slijedi iz Lindebergovog teorema.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 28. lipnja 2021.

Zadatak 4. *(8 bodova)*

(a) (*4 boda*) Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da $X_n \sim \Gamma(n^\alpha, 1)$. Za koje $\alpha \in \mathbb{R}$ red $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ kovergira po distribuciji?

(b) (*4 boda*) Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq 2$. Dokažite da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n \cos(tx)dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

nenegativna.

Rješenje. Upute:

(a) Primjeniti teorem neprekidnosti.

(b) Primjeniti Teorem inverzije na integrabilnu karakterističnu funkciju $\varphi(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n$, što je karakteristična funkcija sume n nezavisnih slučajnih varijabli s distribucijom $U(-1, 1)$, čime vidimo da je f gustoća, a time i nenegativna.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 28. lipnja 2021.

Zadatak 5. *(12 bodova)* Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli na njemu tako da $Var(X_1 + \cdots + X_n) =: s_n^2 > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) (*6 bodova*) Dokažite tvrdnje.

- (a1) Ako Lindebergov uvjet vrijedi, onda $s_n^2 \to \infty$.
- (a2) Ako je niz $(X_n)_n$ uniformno omeđen i $s_n^2 \to \infty$, onda vrijedi Lindebergov uvjet.

(b) (*6 bodova*) Neka

$$X_n \sim \begin{pmatrix} n^\alpha & 3n^\alpha \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$. Vrijedi li centralni granični teorem za niz $(X_n)_n$?

Rješenje.

(a1) Pretpostavimo suprotno što zbog nenegativnosti i monotonosti znači $s_n^2 \to c \in (0, \infty)$. Za velike $n \in \mathbb{N}$ tada vrijedi $c/2 \le s_n^2 \le 2c$. Tada za izraz iz Lindebergovog uvjeta imamo

$$\begin{aligned}
\liminf_n \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n & \mathbb{E}[(X_k - \mathbb{E}X_k)^2 : |X_k - \mathbb{E}X_k| \ge \varepsilon s_n] \\
&\ge \frac{1}{2c} \liminf_n \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(X_k - \mathbb{E}X_k)^2 : |X_k - \mathbb{E}X_k| \ge \varepsilon c/2] \\
&\ge \frac{1}{2c} \liminf_n \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\varepsilon^2 c/2 : |X_k - \mathbb{E}X_k| \ge \varepsilon\sqrt{c/2}] \\
&\ge \frac{\varepsilon^2}{4} \liminf_n \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(|X_k - \mathbb{E}X_k| \ge \varepsilon\sqrt{c/2}) > 0
\end{aligned}$$

jer za dovoljno male $\varepsilon > 0$ imamo $\mathbb{P}(|X_1 - \mathbb{E}X_1| \ge \varepsilon\sqrt{c/2}) > 0$. Dakle, Lindebergov uvjet ne vrijedi što je kontradikcija.

(a2) Neka je niz $(X_n)_n$ omeđen s $M > 0$. Tada je $(X_k - \mathbb{E}X_k)^2 \le 4M^2$ pa je primjenom Čebiševljeve nejednakosti

$$\begin{aligned}
\limsup_n \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n & \mathbb{E}[(X_k - \mathbb{E}X_k)^2 : |X_k - \mathbb{E}X_k| \ge \varepsilon s_n] \\
\limsup_n &\le \frac{4M^2}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(|X_k - \mathbb{E}X_k| \ge \varepsilon s_n) \\
&\le \limsup_n \frac{4M^2}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \frac{Var(X_k)}{\varepsilon^2 s_n^2} = \limsup_n \frac{4M^2}{\varepsilon^2 s_n^2} = 0.
\end{aligned}$$

(b) $\mathbb{E}X_k = 2k^\alpha$ pa je $Var(X_k) = k^{2\alpha}$, tj.

$$s_n^2 \sim \begin{cases} n^{2\alpha+1}, & \alpha > -\frac{1}{2} \\ \log n, & \alpha = -\frac{1}{2} \\ 1, & \alpha < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Lako se pokaže pomoću Ljapunovljevog uvjeta da za $\alpha > -\frac{1}{2}$ imamo CGT.

Ako je $\alpha = -\frac{1}{2}$, onda po (a2) dijelu zadatka zaključujemo da vrijedi CGT.

Ako je $\alpha < -\frac{1}{2}$, onda iz (a1) dijela vidimo da Lindebergov uvjet ne vrijedi. S druge strane, iz dovoljnog uvjeta za konvergenciju redova vidimo da $\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - \mathbb{E}X_n)$ konvergira g.s. Sada treba provjeriti da limes nije normalno distribuiran. To se lako vidi iz teorema neprekidnosti jer $\varphi_{X_k}(t) = \cos(tk^\alpha)$ pa je

$$\varphi_{\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - \mathbb{E}X_n)}(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \cos(tn^\alpha).$$

Međutim, $\varphi_{\sum_{n=1}^{\infty}(X_n - \mathbb{E}X_n)}$ može poprimiti vrijednost 0 (jer za $n = 1$ funkcija $\cos(t)$ poprima 0), dok $\varphi_{N(0,\sigma^2)}$ ne poprima 0.