TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 26. travnja 2021.

Zadatak 1. *(10 bodova)* Iskažite i dokažite teorem jedinstvenosti za karakteristične funkcije.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 26. travnja 2021.

Zadatak 2. *(10 bodova)* Iskažite i dokažite karakterizaciju konvolucije ograničenih funkcija distribucije pomoću neprekidnih, ograničenih funkcija.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 26. travnja 2021.

Zadatak 3. *(10 bodova)* Iskažite i dokažite karakterizaciju slabe konvergencije konačnih mjera pomoću zatvorenih skupova.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 26. travnja 2021.

Zadatak 4. *(10 bodova)*

(a) *(6 bodova)* Neka je (X, Y) slučajni vektor u $\mathbb{R}^2$ uniformno distribuiran na kugli oko ishodišta radijusa $\pi/2$. Jesu li X^2 i Y^2 nezavisni?

(b) *(4 boda)* Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli. Dokažite da vrijedi $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} X_n = \infty\right) = 1$ ako i samo ako $\mathbb{P}(X_1 < C) < 1$ za svaki $C < \infty$.

Rješenje.

(a) Pogledati vježbe kako riješiti ovaj podzadatak.

(b) Smjer $\Longrightarrow$ slijedi trivijalno pretpostavkom suprotnog.

Za smjer $\Longleftarrow$ uzimo bilo koji $C > 0$. Imamo

$$\infty = \sum_n \mathbb{P}(X_1 \geq C) = \sum_n \mathbb{P}(X_n \geq C)$$

pa je po Borel-Cantelliju $\mathbb{P}(X_n \geq C \text{ b.m.p.}) = 1$, tj. $\mathbb{P}(\limsup_n X_n \geq C) = 1$. Budući da je C bio proizvoljan, slijedi tvrdnja po neprekidnosti vjerojatnosti s obzirom na padajuće događaje.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 26. travnja 2021.

Zadatak 5. *(10 bodova)*

(a) *(5 bodova)* Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz slučajnih varijabli takvih da $\mathbb{E}X_n = 0$ i $\mathbb{E}[X_n^2] = \sqrt{n}$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi li slabi zakon velikih brojeva za niz $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(b) *(5 bodova)* Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takav da

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -n^2 & 0 & n^2 \\ \frac{1}{2n^2} & 1-\frac{1}{n^2} & \frac{1}{2n^2} \end{pmatrix}.$$

Vrijedi li $\frac{S_n}{n^2 \log^2 n} \to 0$ gotovo sigurno?

Rješenje. Tvrdnja u (a) ne vrijedi! Npr. uzmimo bilo koju (simetričnu) sl. varijablu B takvu da $\mathbb{E}B = 0$ i $\mathbb{E}B^2 = 1$ (npr. $B \sim N(0,1)$), te definiramo $X_k = k^{1/4}B$, $k \in \mathbb{N}$. Uočimo da zbog $\mathbb{E}B^2 = 1$ vrijedi $\mathbb{P}(B = 0) < 1$. Tada

$$\mathbb{P}(|S_n/n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|B| \geq \varepsilon/n^{1/4}) \to \mathbb{P}(|B| > 0) > 0,$$

tj. SZVB ne vrijedi. Ipak, ako je niz nezavisan, onda tvrdnja vrijedi: iskoristi se Čebiševljeva nejednakost te vrijedi $Var(X_1 + \cdots + X_n) \leq n^{3/2}$. (Takvo rješenje nosi 1 bod).

Za (b) iskoristi se Kolmogorovljev dovoljan uvjet.