

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Ponovljena završna provjera znanja – 7. rujna 2020.

- Broj zadataka: 5
- Vrijeme rješavanja: 120 min
- Ukupan broj bodova: 100
- Na kolokviju je dozvoljen isključivo pribor za pisanje

Zadatak 1. (20 bodova) Definirajte karakterističnu funkciju i dokažite njena osnovna svojstva.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Ponovljena završna provjera znanja – 7. rujna 2020.

Zadatak 2. (20 bodova) Iskažite i dokažite teorem neprekidnosti za karakteristične funkcije.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Ponovljena završna provjera znanja – 7. rujna 2020.

Zadatak 3. (20 bodova) Iskažite Lindebergov teorem i Ljapunovljev centralni granični teorem, te dokažite da je Ljapunovljev teorem posljedica Lindebergovog teorema.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Ponovljena završna provjera znanja – 7. rujna 2020.

Zadatak 4. (10+10=20 bodova)

- (a) Neka je $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da $X_n \sim N(0, \frac{n^2+1}{n})$. Konvergira li za $\alpha > 1$ niz

$$\left(n^{-\alpha} \sum_{k=1}^n X_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

gotovo sigurno?

- (b) Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable takve da $X \sim \text{Exp}(1)$ i $Y \sim U(0, 1)$. Dokažite ili opovrgnite tvrdnju: slučajne varijable XY i Y^2 su nezavisne.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Ponovljena završna provjera znanja – 7. rujna 2020.

Zadatak 5. (15+5=20 bodova)

- (a) Neka je $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli takvih da $\mathbb{E}X_1 = 0$ te $\text{Var}(X_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Dokažite da niz

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{(\sum_{k=1}^n X_k^2)^{1/2}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergira po distribuciji. Odredite mu limes.

- (b) Neka je $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz nenegativnih brojeva takvih da $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$, te neka je $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz karakterističnih funkcija. Dokažite da je tada i

$$\varphi(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

također karakteristična funkcija.