TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Završna provjera znanja – 23. lipnja 2020.

Zadatak 1. *(20 bodova)* Iskažite i dokažite Kolmogorovljev jaki zakon velikih brojeva.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Završna provjera znanja – 23. lipnja 2020.

Zadatak 2. *(20 bodova)* Iskažite i dokažite Prohorovljev teorem.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Završna provjera znanja – 23. lipnja 2020.

Zadatak 3. *(20 bodova)* Iskažite i dokažite Lévyjev centralni granični teorem.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Završna provjera znanja – 23. lipnja 2020.

Zadatak 4. *(10+10=20 bodova)*

(a) Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -n^\alpha & 0 & n^\alpha \\ \frac{1}{2n^\beta} & 1-\frac{1}{n^\beta} & \frac{1}{2n^\beta} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je $2\alpha - \beta < 1$. Označimo $Y_n = X_n + \frac{1}{n}$ i $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Konvergira li niz $\left(\frac{S_n}{n\sqrt{\log n}}\right)_n$ gotovo sigurno?

(b) Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable s distribucijom $N(0,1)$. Jesu li slučajne varijable X i $\frac{X}{X+Y}$ nezavisne?

Rješenje.

(a) Po Kolmogorovljevom dovoljnom uvjetu koristeći integralni kriterij za konvergenciju reda imamo da

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{Var(Y_n)}{n^2 \log n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{Var(X_n)}{n^2 \log n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{n^{2\alpha-\beta}}{n^2 \log n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{2-2\alpha+\beta} \log n} < \infty$$

pa $\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n\sqrt{\log}}$ konvergira (g.s.) k 0. Također, $0 \leq \mathbb{E}S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq n$ pa $\frac{\mathbb{E}S_n}{n\sqrt{\log n}} \to 0$. Dakle, $\frac{S_n}{n\sqrt{\log n}} \to 0$ gotovo sigurno.

(b) Definiramo $g(x,y) = (x, \frac{x}{x+y})$ što je bijekcija iz $L := \mathbb{R}^2 \setminus (\{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\})$ u $T := \mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R}\setminus\{0\}$ te joj je inverz $g^{-1}(u,v) = (u, \frac{u(1-v)}{v})$, a $Dg^{-1}(u,v) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-v}{v} & \frac{-u}{v^2} \end{bmatrix}\right) = \frac{-u}{v^2} \neq 0$, za $(u,v) \in T$.
Dakle,

$$f_{X,\frac{X}{X+Y}}(u,v) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(u^2 + \frac{u^2(1-v)^2}{v^2}\right)} \frac{|u|}{v^2} \mathbf{1}_T(u,v).$$

Budući da $\frac{f_{X,\frac{X}{X+Y}}(u,v)}{f_X(u)} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2(1-v)^2}{v^2}\right)} \frac{|u|}{v^2} \mathbf{1}_T(u,v)$ ovisi o u, zaključujemo da X i $\frac{X}{X+Y}$ nisu nezavisne.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Završna provjera znanja – 23. lipnja 2020.

Zadatak 5. *(15+5=20 bodova)* Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, te neka je $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Pretpostavimo $X_1 \geq 0$, $\mathbb{E}X_1 = 1$ te $Var(X_1) = \sigma^2$. Dokažite da niz $(\sqrt{S_n} - \sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po distribuciji. Odredite mu limes.

(b) Neka je X_1 ima karakterističnu funkcijom φ koja je realna funkcija. Dokažite sljedeću tvrdnju:

$$\text{derivacija od } \varphi \text{ u } 0 \text{ postoji i } \varphi'(0) = ia \implies \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} a,$$

te odredite sve moguće vrijednosti broja $a \in \mathbb{C}$.

(Napomena: u podzadatku (b) ne vrijede pretpostavke podzadatka (a).)

Rješenje.

(a)

$$\sqrt{S_n} - \sqrt{n} = \sqrt{S_n} - \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{S_n} + \sqrt{n}}{\sqrt{S_n} + \sqrt{n}} = \frac{S_n - n}{\sqrt{n\sigma^2}} \frac{\sqrt{n\sigma^2}}{\sqrt{S_n} + \sqrt{n}}.$$

Prvi faktor konvergira po distribuciji k $N(0,1)$ po Lévyjevom CGT. Drugi faktor konvergira (g.s.) prema $\frac{1}{2}\sigma$ jer $\frac{S_n}{n}$ konvergira (g.s.) prema 1 po JZVB. Sada po Slutskyjevoj lemi imamo da $(\sqrt{S_n} - \sqrt{n})_n$ konvergira po distribuciji k $N(0, \frac{1}{4}\sigma^2)$.

(b) Budući da je φ realna, $\varphi'(0)$ je realan broj pa $a \in i \cdot \mathbb{R}$. Međutim, kada bi tvrdnja vrijedila za $a = i \cdot x$, gdje $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, onda bi limes realnih brojeva $(S_n/n)_n$ bio čisto kompleksan broj što je kontradikcija. Dakle, jedina mogućnost je $a = 0$. (Argumentirati se može i tako da iskoristimo da su $(X_n)_n$ simetrične.)
Dokazat ćemo da za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi $\varphi_{S_n/n}(t) \xrightarrow{n\to\infty} 1$ i to će biti dovoljno zbog teorema neprekidnosti i jer konvergencija po distribuciji povlači konvergenciju po vjerojatnosti ako je limes degeneriran. Imamo

$$\begin{aligned}\varphi_{S_n/n}(t) = \varphi_{S_n}(t/n) = \prod_{k=1}^{n} \varphi(t/n) = \varphi(t/n)^n \\ = \left(1 + \frac{t}{n} \cdot \frac{\varphi(t/n) - 1}{t/n}\right)^n.\end{aligned}$$

Budući da $\frac{\varphi(t/n)-1}{t/n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, znamo da $\left(1 + \frac{t}{n} \cdot \frac{\varphi(t/n)-1}{t/n}\right)^n \to e^{0\cdot t} = 1$. Time je tvrdnja dokazana.