TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Završni ispit – 3. srpnja 2019.

Zadatak 1. *(15 bodova)* Kakva je veza između momenata slučajne varijable i pripadne karakteristične funkcije? Iskažite svoje tvrdnje precizno i dokažite ih.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Završni ispit – 3. srpnja 2019.

Zadatak 2. *(15 bodova)* Iskažite i dokažite Prohorovljev teorem.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Završni ispit – 3. srpnja 2019.

Zadatak 3. *(6 bodova)* Neka su $x, t > 0$. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} e^{-nt} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{(nt)^k}{k!}.$$

Rješenje. Neka je $(X_k)_k$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli tako da je $X_1 \sim P(t)$. Tada je

$$e^{-nt} \sum_{k=1}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{(nt)^k}{k!} = \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq nx).$$

Sada se pomoću Levyjevog CGT-a lako vidi da u slučaju $x = t$ imamo

$$\lim_n e^{-nt} \sum_{k=1}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{(nt)^k}{k!} = \lim_n \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq nt) = \lim_n \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - nt}{\sqrt{nt}} \leq 0\right) = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Ako je $x > t$, onda za svaki $M > 0$ imamo

$$\lim_n e^{-nt} \sum_{k=1}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{(nt)^k}{k!} = \lim_n \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - nt}{\sqrt{nt}} \leq \frac{n(x-t)}{\sqrt{nt}}\right) \geq \lim_n \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - nt}{\sqrt{nt}} \leq M\right) = \Phi(M)$$

pa u ovom slučaju $\lim_{n\to\infty} e^{-nt} \sum_{k=1}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{(nt)^k}{k!} = 1$. Slično, za $x < t$ vidimo $\lim_{n\to\infty} e^{-nt} \sum_{k=1}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{(nt)^k}{k!} = 0$.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Završni ispit – 3. srpnja 2019.

Zadatak 4. *(4 bodova)* Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tako da je

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -(n+1)+\frac{1}{n} & \frac{1}{n} & n+1+\frac{1}{n} \\ \frac{1}{(n+1)^4} & 1-\frac{2}{(n+1)^4} & \frac{1}{(n+1)^4} \end{pmatrix}.$$

Konvergira li $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ gotovo sigurno?

Rješenje. $\sum_n Var(X_n) = \sum_n \frac{1}{(n+1)^2} < \infty$ pa $\sum_n (X_n - \mathbb{E}X_n)$ konvergira g.s. Kako je $\sum_n \mathbb{E}X_n = \sum_n \frac{1}{n} = \infty$ zaključujemo da $\sum_n X_n$ ne kovergira g.s.