TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 24. lipnja 2019.

Zadatak 1. *(8 bodova)* Iskažite i dokažite Lévyjev centralni granični teorem.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 24. lipnja 2019.

Zadatak 2. *(8 bodova)* Iskažite Ljapunovljev centralni granični teorem. Iskažite Lindebergov centralni granični teorem. Dokažite da je Ljapunovljev teorem posljedica Lindebergovog teorema.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 24. lipnja 2019.

Zadatak 3. *(8 bodova)* Neka je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ karakteristična funkcija. Dokažite da su tada $Re\,\varphi$ (realni dio karakteristične funkcije) i $|\varphi|^2$ također karakteristične funkcije. Je li nužno da je $|\varphi|$ karakteristična funkcija? Dokažite svoje tvrdnje.

Rješenje. Ako je $\varphi = \varphi_X$, onda $Re\,\varphi(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2}\varphi(-t) = \frac{1}{2}\varphi_X(t) + \frac{1}{2}\varphi_{-X}(t)$ što je karakteristična funkcija jer je konveksna kombinacija karakterističnih funckija. Nadalje, $|\varphi|^2(t) = \varphi(t)\bar{\varphi}(t) = \varphi(t)\varphi(-t) = \varphi_X(t)\varphi_{-X}(t)$ što je karakteristična funkcija zbroja dviju nezavisnih varijabli gdje jedna ima distribuciju kao X, a druga kao $-X$. Konačno, $|\varphi|$ ne mora biti karakteristična funkcija. Npr. za $\varphi = \frac{\sin t}{t}$, $|\varphi|$ nije karakteristična funkcija jer nije pozitivno semidefinitna. (Naime, uzmemo npr. $t_0 = 0, t_1 = \pi/6, t_2 = \pi/3$ i kreiramo matricu $A = (A_{ij})$ tako da je $A_{ij} = |\varphi|(t_i - t_j)$ i računajući determinantu vidimo da matrica nije pozitivno semidefinitna. Napomenimo samo da se zadatku moglo pristupiti i s druge, možda lakše, strane, tj. da prvo nađemo izraz za determinantu u terminima proizvoljnih t_1 i t_2 i onda pogodimo funkciju φ koja daje traženi rezultat.)

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 24. lipnja 2019.

Zadatak 4. *(6 bodova)* Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli na njemu tako da je za sve $n \in \mathbb{N}$

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -(n+1)^\alpha & 0 & (n+1)^\alpha \\ \frac{1}{(n+1)^\beta} & 1-\frac{2}{(n+1)^\beta} & \frac{1}{(n+1)^\beta} \end{pmatrix},$$

gdje su $\alpha > 0$ i $\beta > 1$ takvi da $2\alpha + 1 > \beta$. Vrijedi li centralni granični teorem za niz $(X_n)_n$?

Rješenje. Lako se dobije $s_n \sim n^{\alpha-\beta/2+1/2}$ i $\mathbb{E}|X_n|^{2+\delta} \sim n^{(2+\delta)\alpha-\beta}$ što dovodi do

$$\frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|X_k|^{2+\delta} \sim n^{\delta/2(\beta-1)} \to \infty$$

pa Ljapunovljev uvjet nije zadovoljen. Nadalje, Lindebergov uvjet također ne vrijedi jer za dovoljno male $\varepsilon > 0$ imamo (jer je $\beta > 1$)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k^2; |X_k| \geq \varepsilon s_k] &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k^2; |X_k| \geq c\varepsilon k^{\alpha-\beta/2+1/2}] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k^2] = 1,\end{aligned}$$

gdje je $c \in \mathbb{R}$ konstanta takva da je $\lim_n \frac{s_n}{n^{\alpha-\beta/2+1/2}} = c$. Konačno, pomoću Čebiševljeve nejednakosti dobivamo da je

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{k=1,\dots,n} \mathbb{P}\left(\frac{|X_k|}{s_n} \geq \varepsilon\right) \leq \limsup_{n\to\infty} \max_{k=1,\dots,n} \frac{\mathbb{E}[X_k^2]}{\varepsilon^2 s_n^2} \sim \limsup_{n\to\infty} \max_{k=1,\dots,n} \frac{k^{2\alpha-\beta}}{n^{2\alpha-\beta+1}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \to 0.$$

pa imamo uniformnu asimptotsku zanemarivost. Sada po Lindeberg-Fellerovom teoremu imamo da $\frac{S_n}{s_n} \overset{D}{\not\to} N(0,1)$.