TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 29. travnja 2019.

Zadatak 1. *(8 bodova)* Iskažite i dokažite Kolmogorovljev jaki zakon velikih brojeva.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 29. travnja 2019.

Zadatak 2. *(8 bodova)* Definirajte karakterističnu funkciju ograničene funkcije distribucije i iskažite i dokažite osnovna svojstva takve funkcije (uniformna neprekidnost, ograničenost).

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 29. travnja 2019.

Zadatak 3. *(7 bodova)* Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Zadovoljava li niz $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ slabi zakon velikih brojeva ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{Var} X_n}{n} = 0$? Dokažite.

(b) Neka je

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -\sqrt{n} & 0 & \sqrt{n} \\ \frac{1}{2n^2} & 1-\frac{1}{n^2} & \frac{1}{2n^2} \end{pmatrix}$$

i neka je $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Za koje $\alpha > 0$ niz $\frac{S_n}{n^\alpha}$ konvergira g.s.?

Rješenje.

(a) Zadovoljava. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $Var(X_k) < \infty$ za svaki $k \in \mathbb{N}$. Neka su $\varepsilon, \delta > 0$ proizvoljni. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. za sve $n \geq n_0$ vrijedi $\frac{\mathrm{Var} X_n}{n} < \delta \cdot \varepsilon^2$. Imamo za $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n}| \geq \varepsilon) &\leq \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n} Var(X_k) \\
&\leq \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n_0} Var(X_k) + \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=n_0+1}^{n} Var(X_k) \\
&\leq \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n_0} Var(X_k) + \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=n_0+1}^{n} \delta\varepsilon^2 k \\
&\leq \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n_0} Var(X_k) + \delta.
\end{aligned}$$

Puštanjem $n \to \infty$ slijedi tvrdnja.

(b) Koristeći $Var(X_n) = \frac{1}{n}$, vidimo da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{n^{2\alpha}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha+1}}$ konvergira za sve $\alpha > 0$ pa niz $\frac{S_n}{n^\alpha}$ konvergira g.s. za sve $\alpha > 0$.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 29. travnja 2019.

Zadatak 4. *(7 bodova)* Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable t.d. $X, Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Jesu li slučajne varijable $X + Y$ i $\frac{X}{Y}$ nezavisne? Dokažite.

Rješenje. Varijable su nezavisne jer je $f_{X+Y,X/Y}(u, v) = \lambda^2 e^{-\lambda u} \frac{u}{(v+1)^2} \mathbf{1}_{(0,\infty)^2}(u, v)$.