TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Završni ispit – 2. srpnja 2018.

Zadatak 1. *(15 bodova)* Iskažite i dokažite teorem jedinstvenosti za karakteristične funkcije.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Završni ispit – 2. srpnja 2018.

Zadatak 2. *(15 bodova)* Iskažite i dokažite teorem neprekidnosti.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Završni ispit – 2. srpnja 2018.

Zadatak 3. *(5 bodova)* Neka je $(Y_n)_n$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli takav da je $\mathbb{E}Y_n = 0$ i $\mathbb{E}Y_n^2 = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Neka je $(Z_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli nezavisan od $(Y_n)_n$ i takav da je $\mathbb{P}(Z_n = n) = \mathbb{P}(Z_n = -n) = \frac{1}{2n^2}$ i $\mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Neka je $X_n = Y_n + Z_n$, $n \in \mathbb{N}$, i $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Dokažite da vrijedi $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$.

Rješenje. Neka je $S_n^Y = Y_1 + \cdots + Y_n$, a $S_n^Z = Z_1 + \cdots + Z_n$. Po Levyjevom CGT imamo $\frac{S_n^Y}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$. Po Kolmogorovljevom teoremu o tri reda imamo da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n}{\sqrt{n}}$ konvergira g.s. pa onda po Kroneckerovoj lemi imamo da $\frac{S_n^Z}{\sqrt{n}} \xrightarrow{g.s.} 0$. Budući da su nizovi $(S_n^Y)_n$ i (S_n^Z) nezavisni, iz teorema neprekidnosti vidimo da $\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{S_n^Y}{\sqrt{n}} + \frac{S_n^Z}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

Završni ispit – 2. srpnja 2018.

Zadatak 4. *(5 bodova)* Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli na njemu i neka je $S_n = X_1 + \ldots X_n$, $n \in \mathbf{N}$. Pretpostavimo da je za sve $n \in \mathbb{N}$

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -2^n & 0 & 2^n \\ \frac{\sqrt{n}}{4^n} & 1 - \frac{2\sqrt{n}}{4^n} & \frac{\sqrt{n}}{4^n} \end{pmatrix}.$$

Za koje $\alpha \geq \frac{3}{4}$ niz $\left(\frac{S_n}{(n \ln n)^\alpha}\right)_n$ konvergira gotovo sigurno i čemu konvergira?

Rješenje. Lagano se vidi da je $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{Var X_k}{(k \ln k)^{2\alpha}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{(k \ln k)^{2\alpha}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha - 1/2} \ln k^{2\alpha}}$ što po integralnom kriteriju konvergira za $\alpha \geq \frac{3}{4}$ pa niz $\left(\frac{S_n}{(n \ln n)^\alpha}\right)_n$ konvergira gotovo sigurno prema 0 jer je $\mathbb{E}X_k = 0$ za sve $k \in \mathbb{N}$.