TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 26. lipnja 2018.

Zadatak 1. *(8 bodova)* Definirajte pojam ekvikontinuiranosti. Je li niz karakterističnih funkcija koji konvergira prema karakterističnoj funkciji ekvikontinuiran? Obrazložite svoj odgovor.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 26. lipnja 2018.

Zadatak 2. *(8 bodova)* Iskažite i dokažite Levyjev centralni granični teorem.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 26. lipnja 2018.

Zadatak 3. *(6 bodova)* Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takve da je $X + Y \stackrel{D}{=} X$. Dokažite da je $Y = 0$ $\mathbb{P}$-g.s.

Rješenje. Zbog nezavisnosti od X i Y vrijedi $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$ za sve $t \in \mathbb{R}$, a zbog pretpostavke o jednakoj distribuiranosti imamo $\varphi_X(t) = \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$, za sve $t \in \mathbb{R}$. Budući da je φ_X neprekidna u 0 i $\varphi_X(0) = 1$, postoji $\varepsilon > 0$ takav da za sve $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ vrijedi $\varphi_X(t) \neq 0$. Dakle, za sve $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ vrijedi $\varphi_Y(t) = 1$. Iz ovoga vidimo da je $\varphi_Y''(t) = 0$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ pa po propoziciji o vezi parne derivacije karakteristične funkcije i parnog momenta slučajne varijable zaključujemo da $\mathbb{E}(Y^2)$ postoji i vrijedi $\mathbb{E}(Y^2) = -\varphi_Y''(0) = 0$ pa je $Y = 0$ $\mathbb{P}$-g.s.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

2. kolokvij – 26. lipnja 2018.

Zadatak 4. *(8 bodova)*

(a) Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli za koji postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je $|X_n| \leq M$, za sve $n \in \mathbb{N}$, i neka je $\sum_{n=1}^{\infty} Var(X_n) = \infty$. Ako je za sve $n \in \mathbb{N}$ $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, dokažite da

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

(b) Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_n \sim \begin{pmatrix} -n^\beta & 0 & n^\beta \\ \frac{1}{n^\alpha} & 1 - \frac{2}{n^\alpha} & \frac{1}{n^\alpha} \end{pmatrix}$, za $n \geq 3$, gdje je $\alpha \in (\log_3(2), 1)$ i $\beta > \frac{\alpha - 1}{2}$. Uz $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, vrijedi li

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{D} N(0,1)?$$

Rješenje.

(a) Neka je $s_n = Var(S_n)$. Zbog $|X_n| \leq M$ imamo i $|X_n - \mathbb{E}X_n| \leq 2M$. Slijedi

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - \mathbb{E}X_k)^2; |X_k - \mathbb{E}X_k| \geq \varepsilon s_n] &\leq \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} (2M)^2 \, \mathbb{P}(|X_k - \mathbb{E}X_k| \geq \varepsilon s_n) \\ &\overset{\text{Čebiš.nejed.}}{\leq} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} (2M)^2 \, \frac{Var(X_k)}{\varepsilon^2 s_n^2} = \frac{(2M)^2}{\varepsilon^2 s_n^2} \xrightarrow{n \to \infty} 0\end{aligned}$$

pa po Lindebergovom centralnom graničnom teoremu imamo traženu tvrdnju.

(b) $\mathbb{E}X_n = 0$, $Var(X_n) = 2n^{2\beta - \alpha}$ pa je $s_n^2 := Var(S_n) \sim n^{2\beta - \alpha + 1}$. Dokazujemo da vrijedi Ljapunovljev uvjet. Neka je $\delta > 0$. Očito je da je $\mathbb{E}[|X_n|^{2+\delta}] < \infty$ za sve $n \in \mathbb{N}$ te je $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|X_k|^{2+\delta}) = \sum_{k=1}^{n} 2k^{(2+\delta)\beta - \alpha} \sim n^{(2+\delta)\beta - \alpha + 1}$. Sada imamo

$$\frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|X_k|^{2+\delta}) \sim \frac{1}{n^{(\beta - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2})(2+\delta)}} \cdot n^{(2+\delta)\beta - \alpha + 1} = n^{\frac{\delta}{2} \cdot (\alpha - 1)} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

pa po Ljapunovljevom centralnom graničnom teoremu imamo

$$\frac{S_n}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} 2k^{2\beta - \alpha}}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$