TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 30. travnja 2018.

Zadatak 1. *(8 bodova)* Iskažite i dokažite tvrdnju o neprekidnosti karakteristične funkcije.

Rješenje. Pogledati predavanja.

Zadatak 2. *(8 bodova)* Dokažite da iz slabe konvergencije ograničenih funkcija distribucije slijedi slaba konvergencija pripadnih mjera.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 30. travnja 2018.

Zadatak 3. *(7 bodova)* Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka su X i Y slučajne varijable na njemu. Ako su X i Y nezavisne, standardne normalne slučajne varijable, nađite gustoću (ako postoji) slučajnog vektora $(X^2 + Y^2,\ X^2/Y^2)$. Jesu li slučajne varijable $X^2 + Y^2$ i X^2/Y^2 nezavisne?

Rješenje. X i Y nezavisne $\Rightarrow$ X^2 i Y^2 nezavisne.
Gustoća od X^2 je

$$f_{X^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2}} \mathbf{1}_{\langle 0,\infty\rangle}(x)$$

argumentiranjem da je $X^2 \sim \chi^2(1)$ ili korištenjem rezultata za gustoću kvadrata slučajne varijable, tj. korištenjem

$$f_{X^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})).$$

Analogno za Y^2.
Dakle, vektor (X^2, Y^2) ima gustoću

$$f_{X^2,Y^2}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{xy}} e^{-\frac{x+y}{2}} \mathbf{1}_{\langle 0,\infty\rangle^2}(x,y).$$

Sada koristimo Teorem o funkciji slučajnog vektora na funkciji $g : \langle 0,\infty\rangle^2 \to \langle 0,\infty\rangle^2$ definiranu s $g(x,y) = (x+y, x/y)$. Lako se izračuna i $g^{-1}(u,v) = (\frac{uv}{1+v}, \frac{u}{1+v})$ što pokazuje i da je g bijekcija, te diferencijal od g^{-1}

$$\nabla g^{-1}(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{1}{1+v} & \frac{-u}{(1+v)^2} \end{bmatrix}.$$

Imamo $|\det(\nabla g^{-1}(u,v))| = \frac{u}{(1+v)^2} \neq 0$ za sve $u > 0$ i $v > 0$. Dobili smo

$$\begin{aligned} f_{X^2+Y^2, X^2/Y^2}(u,v) &= f_{X^2,Y^2}(g^{-1}(u,v)) |\det(\nabla g^{-1}(u,v))| \mathbf{1}_{\langle 0,\infty\rangle^2}(u,v) \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{v}(1+v)} \mathbf{1}_{\langle 0,\infty\rangle^2}(u,v). \end{aligned}$$

Odavde vidimo da se gustoće daju separirati po varijablama pa su slučajne varijable $X^2 + Y^2$ i X^2/Y^2 nezavisne.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 30. travnja 2018.

Zadatak 4. *(7 bodova)* Postoji li sljedeći limes

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \cdots \int_1^2 \cos(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}) d\lambda(x_1) d\lambda(x_2) \cdots d\lambda(x_n)?$$

Ako postoji, odredite mu vrijednost.

Rješenje. Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli tako da je $X_1 \sim U(1,2)$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \cdots \int_1^2 \cos(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}) d\lambda(x_1) d\lambda(x_2) \cdots d\lambda(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\cos(\sqrt[n]{X_1 X_2 \cdots X_n})]. \qquad (\star)$$

Sada želimo pokazati da izraz unutar očekivanja konvergira, a potom ubaciti limes unutar očekivanja. Po Kolmogorovljevom jakom zakonu velikih brojeva je

$$\ln(\sqrt[n]{X_1 X_2 \cdots X_n}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln X_i \xrightarrow{\text{g.s.}} \mathbb{E}[\ln X_1]$$

jer je niz $(\ln X_n)_n$ njd. niz s očekivanjem

$$\mathbb{E}[\ln X_1] = \int_1^2 \ln x \, dx = x \ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - 1.$$

Dakle, $\cos(\sqrt[n]{X_1 X_2 \cdots X_n}) \xrightarrow{\text{g.s.}} \cos(e^{\mathbb{E}[\ln X_1]}) = \cos\left(\frac{4}{e}\right)$. Budući da je kosinus ograničena funkcija i da po pokazanom limes unutar očekivanja u $(\star)$ postoji g.s., limes u $(\star)$ smije ući pod očekivanje te smo dobili da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \cdots \int_1^2 \cos(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}) d\lambda(x_1) d\lambda(x_2) \cdots d\lambda(x_n) = \cos\left(\frac{4}{e}\right).$$