TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 22. studenog 2024.

Zadatak 1. *(10 bodova)* Dokažite da je prsten skupova generiran poluprstenom jednak familiji konačnih disjunktnih unija skupova iz poluprstena.

Rješenje. Vidjeti predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 22. studenog 2024.

Zadatak 2. *(10 bodova)* Opišite dvodimenzionalnu normalnu razdiobu i dokažite da se radi o vjerojatnosnoj razdiobi.

Rješenje. Vidjeti predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 22. studenog 2024.

Zadatak 3. *(10 bodova)*

(a) *(7 bodova)* Neka je $A \subset \Omega$ i $\mathcal{A} = \{A\} \cup \mathcal{F}$. Dokažite da vrijedi

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{(A \cap E) \cup (A^c \cap F) : E, F \in \mathcal{F}\}.$$

(b) *(3 boda)* Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F})$ te promotrimo preslikavanje $Y = X + 1_A$. Dokažite ili opovrgnite: Y je slučajna varijabla na $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$.

Rješenje.

(a) Označimo $\mathcal{E} = \{(A \cap E) \cup (A^c \cap F) : E, F \in \mathcal{F}\}$. Uočimo da je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$. Naime, ako uzmemo $E = \Omega$ i $F = \emptyset$, imamo $(A \cap \Omega) \cup (A^c \cap \emptyset) = A$. Isto tako, ako uzmemo $E_0 \in \mathcal{F}$, stavimo $E = F = E_0$, pa vrijedi $(A \cap E_0) \cup (A^c \cap E_0) = E_0$. Isto tako, jednostavno se pokaže da je $\mathcal{E}$ σ-algebra, pa je $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{E}$.

S druge pak strane, da pokažemo $\mathcal{E} \subseteq \sigma(A)$, uočimo da se svaki član familije $\mathcal{E}$ reprezentira kao $(A \cap E^c) \cup (A^c \cap F)$, odnosno kao rezultat konačnih skupovnih operacija skupova iz $\mathcal{A}$. Dakle, $\mathcal{E} \subseteq \sigma(A)$.

(b) Tvrdnja je istinita. Trebamo pokazati da je $\sigma(Y) \subseteq \sigma(A)$. Kako je Y funkcija od X i 1_A, vrijedi $\sigma(Y) \subseteq \sigma(X, 1_A)$. Po definiciji je $\sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$, te po zadatku s vježbi $\sigma(1_A) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$. Stoga vrijedi

$$\sigma(X, 1_A) = \sigma(\sigma(X) \cup \sigma(1_A)) \subseteq \sigma(\mathcal{F} \cup \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}) = \sigma(\mathcal{F} \cup \{A\}) = \sigma(\mathcal{A}),$$

gdje predzadnja jednakost u gornjem nizu vrijedi zato što je σ-algebra zatovrena na komplementiranje, a $\emptyset$ i Ω su u $\mathcal{F}$.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 22. studenog 2024.

Zadatak 4. *(10 bodova)*

(a) *(5 bodova)* Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Odredite

$$\lim_{x \to +\infty} \mathbb{P}(|X| = x).$$

Precizno argumentirajte svaki korak.

(b) *(5 bodova)* Neka je $h \in \mathbb{R}$ i F vjerojatnosna funkcija distribucije na $\mathbb{R}$. Uz koje uvjete na F je funkcija H definirana kao:

$$H(x) = F(x) 1_{\{x \leq h\}} + 1_{\{x > h\}}$$

također vjerojatnosna funkcija distribucije na $\mathbb{R}$?

Rješenje.

(a) Označimo s F_X funkciju distribucije od X. Vrijedi:

$$0 \leq \mathbb{P}(|X| = x) \leq \mathbb{P}(|X| \geq x) = \mathbb{P}(X \leq -x) + \mathbb{P}(X \geq x) \leq \mathbb{P}(X \leq -x) + \mathbb{P}(X > x - 1).$$

Kako je $\mathbb{P}(X > x - 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x - 1) = 1 - F_X(x - 1)$, vrijedi:

$$\mathbb{P}(X \leq -x) + \mathbb{P}(X > x - 1) = F_X(-x) + 1 - F_X(x - 1).$$

Zbog $F_X(-\infty) = 0$ i $F_X(\infty) = 1$, imamo

$$\lim_{x \to +\infty} (F_X(-x) + 1 - F_X(x - 1)) = 0.$$

Po teoremu o sendviču, slijedi tvrdnja.

(b) Uočimo da je

$$H(-\infty) = F(-\infty) = 0, \quad H(\infty) = 1_{\{x > h\}}(\infty) = 1.$$

Isto tako, H je očito neprekidna zdesna s limesima slijeva u svim točkama $\mathbb{R} \setminus \{h\}$. Da provjerimo to svojstvo i u točki h, uočimo da je

$$\lim_{x \to h^-} H(x) = F(h^-), \quad \lim_{x \to h^+} H(x) = 1, \quad H(h) = F(h).$$

Da bismo imali neprekidnost zdesna u h, mora vrijediti $F(h) = 1$, te je to jedini uvjet na F da bi funkcija H bila vjerojatnosna funkcija distribucije na $\mathbb{R}$.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 22. studenog 2024.

Zadatak 5. *(10 bodova)*

(a) *(5 bodova)* Neka je zadana vjerojatnosna funkcija disribucije $F : \mathbb{R} \to [0,1]$. Pokažite da postoji izmjeriv prostor $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$, vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}$ na tom prostoru , te slučajna varijabla X na $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ takva da $F_X = F$.

(b) *(5 bodova)* Neka su $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ako za svaki $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vrijedi $\mathbb{E}[X 1_A] = \mathbb{E}[Y 1_A]$, vrijedi li tada $X = Y$ g.s.? Ako tvrdnja vrijedi, dokažite ju, u protivnom konstruirajte kontraprimjer.

Rješenje.

(a) Definirajmo vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ na sljedeći način:

$$\Omega = [0,1], \quad \mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1]), \quad \mathbb{P} = \lambda_{[0,1]},$$

gdje je $\lambda_{[0,1]}$ Lebesgueova mjera na intervalu $[0,1]$. Definirajmo slučajnu varijablu $X : \Omega \to \mathbb{R}$ kao

$$X(\omega) = \sup\{y \in \mathbb{R} \mid F(y) < \omega\}.$$

Za svaki $x \in \mathbb{R}$, imamo:

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in [0,1] \mid X(\omega) \leq x\} = \{\omega \in [0,1] \mid \omega \leq F(x)\}.$$

Stoga je funkcija distribucije slučajne varijable X dana s:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in [0,1] \mid \omega \leq F(x)\}) = \lambda_{[0,1]}([0, F(x)]) = F(x).$$

(b) Pretpostavimo da vrijedi $\mathbb{P}(X \neq Y) > 0$ (što je svakako dobro definirano jer smo na vježbama pokazali da je $\{X \neq Y\}$ događaj). Kako je $\{X \neq Y\} = \{X < Y\} \cup \{X > Y\}$, jedan od posljednja dva događaja (da su to zaista događaji, pokazano je na vježbama) mora imati strogo pozitivnu vjerojatnost. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\mathbb{P}(X < Y) > 0$. Prema uvjetu zadatka imamo

$$\mathbb{E}[X 1_{\{X<Y\}}] = \mathbb{E}[Y 1_{\{X<Y\}}].$$

No, budući da $X < Y$ na skupu $\{X < Y\}$, slijedi da je $\mathbb{E}[X 1_{\{X<Y\}}] < \mathbb{E}[Y 1_{\{X<Y\}}]$, što je kontradikcija. Dakle, mora biti $\mathbb{P}(X = Y) = 1$, odnosno $X = Y$ gotovo sigurno.