TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. ispitni rok – 14. veljače 2025.

Zadatak 1. *(20 bodova)* Dokažite da svaki po vjerojatnosti Cauchyjev niz ima (g.s.) konvergentan podniz.

Rješenje. Vidjeti predavanja.

Zadatak 2. *(20 bodova)* Iskažite i dokažite Kolmogorovljev jaki zakon velikih brojeva.

Rješenje. Vidjeti predavanja.

Zadatak 3. *(20 bodova)* Neka je Y nenegativna slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i neka je $c \in \langle 0, +\infty \rangle$ takav da

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}e^{-\lambda Y} \leq e^{-\lambda c}.$$

Dokažite da je $\mathbb{P}(Y \geq c) = 1$.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $A \in \mathcal{F}$ takav da je $Y < c$ na A i $\mathbb{P}(A) > 0$. Lako se pokaže da postoje $n \in \mathbb{N}$ i $A_n \in \mathcal{F}$ takvi da $Y < c - \frac{1}{n}$ na A_n i $\mathbb{P}(A_n) > 0$. Imamo $\mathbb{E}e^{-\lambda Y} \leq e^{-\lambda c} \iff \mathbb{E}e^{-\lambda(Y-c)} \leq 1$, a iz toga imamo

$$1 \geq \mathbb{E}\left[e^{-\lambda(Y-c)}\right] \geq \mathbb{E}\left[e^{-\lambda(Y-c)}\mathbf{1}_{A_n}\right] \geq \mathbb{E}\left[e^{-\lambda\left(c-\frac{1}{n}-c\right)}\mathbf{1}_{A_n}\right] = e^{\lambda/n}\mathbb{P}(A_n) > 0, \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Sada pustimo $\lambda \to \infty$ u dobijemo kontradikciju (jer je n fiksan).

Zadatak 4. *(20 bodova)* Neka je $\{X_t : t \in [a, b]\}$ familija slučajnih varijabli na vjerojatnostnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) *(10 bodova)* Pretpostavimo da postoji $M \in \langle 0, \infty \rangle$ takav da $|X_t| \leq M, \forall t \in [a, b]$. Je li funkcija $\Omega \ni \omega \mapsto \sup_{t \in [a,b]} X_t(\omega)$ nužno slučajna varijabla?

(b) *(10 bodova)* Pretpostavimo da je za svaki $\omega \in \Omega$ funkcija $[a, b] \ni t \mapsto X_t(\omega)$ neprekidna. Je li funkcija $\Omega \ni \omega \mapsto \sup_{t \in [a,b]} X_t(\omega)$ nužno slučajna varijabla?

Rješenje.

(a) Odgovor je ne! Pretpostavimo da je $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}$ Lebesgue izmjerivi podskupovovi od $[0, 1]$, da je $\mathbb{P}$ Lebesgueova mjera na $[0, 1]$, te da su $a = 0$ i $b = 1$. Odaberimo podskup $A \subseteq [0, 1]$ koji nije Lebesgue-izmjeriv (npr. Vitalijev skup). Definirajmo familiju slučajnih varijabli $(X_t)_{t \in [0,1]}$ na sljedeći način:

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \omega = t \text{ i } t \in A, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za svaki fiksni $t \in [0, 1]$, funkcija $\omega \mapsto X_t(\omega)$ je očito izmjeriva jer su to indikatori jednočlanih skupova (jednočlani skupovi su Lebesgue-izmjerivi) ili nul-preslikavanja. Također, svaka od funkcija X_t je očito ograničena jer poprima samo vrijednosti 0 i 1. Međutim, kada uzmemo supremum po svim $t \in [0, 1]$, dobivamo:

$$\sup_{t \in [0,1]} X_t(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega),$$

što je indikator skupa A. Budući da smo odabrali $A \notin \mathcal{F}$, funkcija $\mathbf{1}_A(\omega)$ nije slučajna varijabla.

(b) Odgovor je da! Naime, pretpostavimo da je za svaki $\omega \in \Omega$ funkcija $t \mapsto X_t(\omega)$ neprekidna na $[a,b]$. Želimo pokazati da je funkcija

$$\Omega \ni \omega \mapsto \sup_{t\in[a,b]} X_t(\omega)$$

nužno slučajna varijabla, odnosno da je izmjeriva s obzirom na sigma-algebru $\mathcal{F}$. Budući da je svaka funkcija $t \mapsto X_t(\omega)$ neprekidna na segmentu $[a,b]$, možemo iskoristiti gustoću skupa racionalnih brojeva. Naime, vrijedi:

$$\sup_{t\in[a,b]} X_t(\omega) = \sup_{t\in\mathbb{Q}\cap[a,b]} X_t(\omega),$$

jer je supremum po cijelom $[a,b]$ jednak supremumu po skupu gustih točaka, u ovom slučaju skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}\cap[a,b]$. Ovdje je supremum prebrojiv, a prebrojivi supremum slučajnih varijabli ostaje slučajna varijabla, jer je za svaki fiksni $t \in [a,b]$ funkcija $\omega \mapsto X_t(\omega)$ po pretpostavci izmjeriva.

Zadatak 5. *(20 bodova)* Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz jednako distribuiranih slučajnih varijabli i neka red $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergira po vjerojatnosti. Dokažite da je tada $X_n = 0$ (g.s.), za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje. Neka je niz $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jednako distribuiran i neka red $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergira po vjerojatnosti. Budući da konvergencija po vjerojatnosti povlači Cauchyjevo svojstvo po vjerojatnosti, vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n-1} X_k\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|X_n| \geq \varepsilon\right) \to 0 \quad \text{kad } n \to \infty.$$

No, budući da su sve varijable X_n jednako distribuirane, imamo

$$\mathbb{P}\left(|X_1| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(|X_n| \geq \varepsilon\right) \to 0.$$

Zaključujemo da $\mathbb{P}\left(|X_1| \geq \varepsilon\right) = 0$ za svaki $\varepsilon > 0$. Sada, koristeći svojstvo da je

$$\mathbb{P}\left(X_1 \neq 0\right) = \mathbb{P}\left(|X_1| > 0\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{|X_1| \geq 1/n\}\right),$$

dobivamo

$$\mathbb{P}\left(X_1 \neq 0\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_1| \geq 1/n\right) = 0.$$

Dakle, $X_1 = 0$ gotovo sigurno, a zbog identične distribucije slijedi da vrijedi $X_n = 0$ gotovo sigurno za svaki $n \in \mathbb{N}$.