TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 31. siječnja 2025.

Zadatak 1. *(10 bodova)* Iskažite i dokažite (bez korištenja jakog zakona) Hinčinov slabi zakon velikih brojeva.

Rješenje. Vidjeti predavanja.

Zadatak 2. *(10 bodova)* Iskažite i dokažite Kolmogorovljeve nejednakosti.

Rješenje. Vidjeti predavanja.

Zadatak 3. *(10 bodova)* Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli te neka su varijable $(Y_n)_n$ definirane kao $Y_n = X_n \cdot \mathbf{1}_{\{|X_n| \le b_n\}}$, gdje je $\{b_n, n \ge 1\}$ niz pozitivnih realnih brojeva. Ako definiramo

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

dokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi nejednakost

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}S'_n| > \varepsilon\right) \le \frac{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var} Y_k}{\varepsilon^2} + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(|X_k| > b_k\right).$$

Rješenje. Koristeći rastav događaja, imamo

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}S'_n| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\{|S_n - \mathbb{E}S'_n| > \varepsilon\} \cap \left\{\bigcap_{k=1}^{n}\{|X_k| \le b_k\}\right\}\right)$$
$$+\mathbb{P}\left(\{|S_n - \mathbb{E}S'_n| > \varepsilon\} \cap \left\{\bigcup_{k=1}^{n}\{|X_k| > b_k\}\right\}\right).$$

Primjenom monotonosti vjerojatnosti slijedi

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}S'_n| > \varepsilon\right) \le \mathbb{P}\left(|S'_n - \mathbb{E}S'_n| > \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}\{|X_k| > b_k\}\right).$$

Primjenom Čebiševljeve nejednakosti i svojstva varijance nezavisnih slučajnih varijabli dobivamo

$$\mathbb{P}\left(|S'_n - \mathbb{E}S'_n| > \varepsilon\right) \le \frac{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}(Y_k)}{\varepsilon^2}$$

a subaditivnost na drugom članu daje

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}\{|X_k| > b_k\}\right) \le \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(|X_k| > b_k\right).$$

te kombiniranjem dobivamo željeni rezultat.

Zadatak 4. *(10 bodova)*

(a) *(5 bodova)* Ako je Y eksponencijalno distribuirana slučajna varijabla s parametrom 1, tada kažemo da $X := -\log(Y)$ ima Gumbelovu distribuciju. Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih i identično distribuiranih slučajnih varijabli s $X_n \sim \text{Exp}(1)$, i neka je

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n).$$

Pokažite da vrijedi:

$$M_n - \log n \xrightarrow{D} X, \quad \text{kad } n \to \infty.$$

(b) *(5 bodova)* Neka je

$$X_n = e^{\frac{1}{n}} \mathbf{1}_{\left[\frac{1}{n}, n\right\rangle}(Y), \quad n \in \mathbb{N},$$

gdje je $Y \sim \text{Exp}(1)$. Ispitajte konvergenciju niza $(X_n)_n$ u L^p normi za $p \geq 1$.

Rješenje.

(a) Pokaže se da je distribucijska funkcija Gumbelove distribucije

$$F_X(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Za nezavisne varijable $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(1)$ vrijedi

$$F_{M_n}(x) = \mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = (1 - e^{-x})^n.$$

Tada

$$\mathbb{P}(M_n - \log n \leq x) = \mathbb{P}(M_n \leq x + \log n) = (1 - e^{-(x+\log n)})^n.$$

Izraz unutar eksponenta može se preurediti kao

$$1 - e^{-(x+\log n)} = 1 - e^{-x} e^{-\log n} = 1 - \frac{e^{-x}}{n}.$$

Koristeći aproksimaciju $(1 - a/n)^n \approx e^{-a}$ za $n \gg 1$, slijedi

$$(1 - \frac{e^{-x}}{n})^n \approx e^{-e^{-x}}.$$

Budući da je to distribucijska funkcija Gumbelove distribucije, dobivamo tvrdnju podzadatka.

(b) Promatramo gotovo sigurnu (g.s.) konvergenciju niza $(X_n)_n$ kako bismo naslutili kandidat za limes.

$$X_n(\omega) = e^{\frac{1}{n}} \mathbf{1}_{\left[\frac{1}{n}, n\right\rangle}(Y(\omega)) \to \mathbf{1}_{(0,\infty)}(Y(\omega)) = 1.$$

Stoga očekujemo da je kandidat za limes $X = 1$. Sad provjerimo konvergenciju u L^p normi prema $X = 1$. Razvijemo razliku

$$X_n - X = e^{\frac{1}{n}} \mathbf{1}_{\left[\frac{1}{n}, n\right)}(Y) - 1.$$

Razliku možemo zapisati kao

$$X_n - X = (-1)\mathbf{1}_{(0,1/n)}(Y) + (e^{1/n} - 1)\mathbf{1}_{[1/n,n)}(Y) + (-1)\mathbf{1}_{[n,\infty)}(Y).$$

Uzimamo očekivanje apsolutne vrijednosti na obje strane i računamo

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] = \mathbb{E}\left[\left|-\mathbf{1}_{(0,1/n)}(Y) + (e^{1/n} - 1)\mathbf{1}_{[1/n,n)}(Y) - \mathbf{1}_{[n,\infty)}(Y)\right|^p\right].$$

Koristeći nezavisnost i linearnost očekivanja (jer su ovo indikatori disjunktnih područja), ovo se može rastaviti kao

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_n - X|^p] &= \mathbb{P}(Y < 1/n) + (e^{1/n} - 1)^p\, \mathbb{P}(1/n \leq Y < n) + \mathbb{P}(Y \geq n) \\ &= (1 - e^{-1/n}) + (e^{1/n} - 1)^p (e^{-1/n} - e^{-n}) + e^{-n} \to 0, \quad \text{kad } n \to \infty.\end{aligned}$$

Zaključujemo da niz konvergira u L^p normi:

$$X_n \xrightarrow{L^p} 1, \quad \text{za svaki } p \geq 1.$$

Zadatak 5. *(10 bodova)* Za niz slučajnih varijabli $(X_n)_n$ kažemo da je *uniformno integrabilan* ako vrijedi

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|>a\}}\right] \xrightarrow{a\to\infty} 0.$$

Dokažite da je niz $(X_n)_n$ uniformno integrabilan ako i samo ako (i) $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$ te (ii) za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki događaj A takav da $\mathbb{P}(A) < \delta$ vrijedi $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_n|\mathbf{1}_A\right] < \varepsilon$.

Rješenje. Pretpostavimo da je niz $(X_n)_n$ uniformno integrabilan. To znači da vrijedi

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|>a\}}\right] \xrightarrow{a\to\infty} 0.$$

Dokažimo prvo (i). Promotrimo proizvoljan $n \in \mathbb{N}$. Za proizvoljno $a > 0$ možemo napisati:

$$\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}\left[|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|\leq a\}}\right] + \mathbb{E}\left[|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|>a\}}\right] \leq a + \mathbb{E}\left[|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|>a\}}\right].$$

Budući da drugi član teži nuli uniformno u n kad $a \to \infty$, slijedi

$$\mathbb{E}\left[|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|>a\}}\right] < 1, \quad \forall n,$$

iz čega slijedi

$$\mathbb{E}|X_n| \leq a + 1, \quad \forall n$$

pa je i $\sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$. Za (ii), neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Odaberemo $a = a(\varepsilon)$ dovoljno velik da vrijedi:

$$\sup_n \mathbb{E}\left[|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|>a\}}\right] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Za događaj A s $\mathbb{P}(A) < \delta < \varepsilon/(2a(\varepsilon))$ i prozivoljan $n \in \mathbb{N}$, imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_n|\mathbf{1}_A\right] &= \mathbb{E}\left[|X_n|\mathbf{1}_{A\cap\{|X_n|\leq a\}}\right] + \mathbb{E}\left[|X_n|\mathbf{1}_{A\cap\{|X_n|>a\}}\right] \\ &\leq a\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}\left[|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|>a\}}\right] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

Kako izraz na lijevoj strani ne ovisi o n, slijedi

$$\sup_n \mathbb{E}\left[|X_n|\mathbf{1}_A\right] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dokažimo sada obratnu implikaciju. Pretpostavimo (i) i (ii). Za proizvoljno $\varepsilon > 0$, iz uvjeta (i) imamo da postoji $M = \sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$. Definiramo događaje $A_n = \{|X_n| > a\}$. Primjenom Markovljeve nejednakosti dobijemo:

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(|X_n| > a) \leq \frac{\mathbb{E}|X_n|}{a} \leq \frac{M}{a}.$$

Kako desna strana ne ovisi o n, možemo odabrati $a = a(\varepsilon, \delta)$ dovoljno velik da vrijedi $M/a < \delta$, gdje je $\delta = \delta(\varepsilon)$ iz uvjeta (ii). Kako je $\mathbb{P}(A_n) < \delta$ za svaki n, za proizvoljan n po (ii) imamo:

$$\mathbb{E}\left[|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|>a\}}\right] \leq \sup_m \mathbb{E}\left[|X_m|\mathbf{1}_{A_n}\right] < \varepsilon.$$

Kako je ε proizvoljno, zaključujemo da niz $(X_n)_n$ zadovoljava uvjet uniformne integrabilnosti.