

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. ispitni rok – 31. siječnja 2025.

Zadatak 1. (20 bodova) Iskažite i dokažite (bez korištenja jakog zakona) Hinčinov slabi zakon velikih brojeva.

Rješenje. Vidjeti predavanja.

Zadatak 2. (20 bodova) Iskažite i dokažite karakterizaciju nezavisnosti konačnog skupa slučajnih varijabli pomoću funkcija distribucije.

Rješenje. Vidjeti predavanja.

Zadatak 3. (20 bodova) Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli te neka su varijable $(Y_n)_n$ definirane kao $Y_n = X_n \cdot \mathbf{1}_{\{|X_n| \leq b_n\}}$, gdje je $\{b_n, n \geq 1\}$ niz pozitivnih realnih brojeva. Ako definiramo

$$S'_n = \sum_{k=1}^n Y_k.$$

dokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi nejednakost

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}S'_n| > \varepsilon) \leq \frac{\sum_{k=1}^n \text{Var} Y_k}{\varepsilon^2} + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(|X_k| > b_k).$$

Rješenje. Koristeći rastav događaja, imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}S'_n| > \varepsilon) &= \mathbb{P}\left(\{|S_n - \mathbb{E}S'_n| > \varepsilon\} \cap \left\{\bigcap_{k=1}^n \{|X_k| \leq b_k\}\right\}\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\{|S_n - \mathbb{E}S'_n| > \varepsilon\} \cap \left\{\bigcup_{k=1}^n \{|X_k| > b_k\}\right\}\right). \end{aligned}$$

Primjenom monotonosti vjerojatnosti slijedi

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}S'_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|S'_n - \mathbb{E}S'_n| > \varepsilon) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n \{|X_k| > b_k\}\right).$$

Primjenom Čebiševljeve nejednakosti i svojstva varijance nezavisnih slučajnih varijabli dobivamo

$$\mathbb{P}(|S'_n - \mathbb{E}S'_n| > \varepsilon) \leq \frac{\sum_{k=1}^n \text{Var}(Y_k)}{\varepsilon^2}$$

a subaditivnost na drugom članu daje

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n \{|X_k| > b_k\}\right) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(|X_k| > b_k).$$

te kombiniranjem dobivamo željeni rezultat.

Zadatak 4. (20 bodova)

- (a) (10 bodova) Ako je Y eksponencijalno distribuirana slučajna varijabla s parametrom 1, tada kažemo da $X := -\log(Y)$ ima Gumbelovu distribuciju. Neka je $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz nezavisnih i identično distribuiranih slučajnih varijabli s $X_n \sim \text{Exp}(1)$, i neka je

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n).$$

Pokažite da vrijedi:

$$M_n - \log n \xrightarrow{D} X, \quad \text{kad } n \rightarrow \infty.$$

- (b) (10 bodova) Neka je

$$X_n = e^{\frac{1}{n}} \mathbf{1}_{[\frac{1}{n}, n)}(Y), \quad n \in \mathbb{N},$$

gdje je $Y \sim \text{Exp}(1)$. Ispitajte konvergenciju niza $(X_n)_n$ u L^p normi za $p \geq 1$.

Rješenje.

- (a) Pokaže se da je distribucijska funkcija Gumbelove distribucije

$$F_X(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Za nezavisne varijable $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(1)$ vrijedi

$$F_{M_n}(x) = \mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = (1 - e^{-x})^n.$$

Tada

$$\mathbb{P}(M_n - \log n \leq x) = \mathbb{P}(M_n \leq x + \log n) = (1 - e^{-(x+\log n)})^n.$$

Izraz unutar eksponenta može se preurediti kao

$$1 - e^{-(x+\log n)} = 1 - e^{-x} e^{-\log n} = 1 - \frac{e^{-x}}{n}.$$

Koristeći aproksimaciju $(1 - a/n)^n \approx e^{-a}$ za $n \gg 1$, slijedi

$$\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \approx e^{-e^{-x}}.$$

Budući da je to distribucijska funkcija Gumbelove distribucije, dobivamo tvrdnju podzadatka.

- (b) Promatramo gotovo sigurnu (g.s.) konvergenciju niza $(X_n)_n$ kako bismo naslutili kandidat za limes.

$$X_n(\omega) = e^{\frac{1}{n}} \mathbf{1}_{[\frac{1}{n}, n)}(Y(\omega)) \rightarrow \mathbf{1}_{(0, \infty)}(Y(\omega)) = 1.$$

Stoga očekujemo da je kandidat za limes $X = 1$. Sad provjerimo konvergenciju u L^p normi prema $X = 1$. Razvijemo razliku

$$X_n - X = e^{\frac{1}{n}} \mathbf{1}_{[\frac{1}{n}, n)}(Y) - 1.$$

Razliku možemo zapisati kao

$$X_n - X = (-1) \mathbf{1}_{(0, 1/n)}(Y) + (e^{1/n} - 1) \mathbf{1}_{[1/n, n)}(Y) + (-1) \mathbf{1}_{[n, \infty)}(Y).$$

Uzimamo očekivanje apsolutne vrijednosti na obje strane i računamo

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] = \mathbb{E}\left[|-\mathbf{1}_{(0, 1/n)}(Y) + (e^{1/n} - 1) \mathbf{1}_{[1/n, n)}(Y) - \mathbf{1}_{[n, \infty)}(Y)|^p\right].$$

Koristeći nezavisnost i linearnost očekivanja (jer su ovo indikatori disjunktних područja), ovo se može rastaviti kao

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] &= \mathbb{P}(Y < 1/n) + (e^{1/n} - 1)^p \mathbb{P}(1/n \leq Y < n) + \mathbb{P}(Y \geq n) \\ &= (1 - e^{-1/n}) + (e^{1/n} - 1)^p (e^{-1/n} - e^{-n}) + e^{-n} \rightarrow 0, \quad \text{kad } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Zaključujemo da niz konvergira u L^p normi:

$$X_n \xrightarrow{L^p} 1, \quad \text{za svaki } p \geq 1.$$

Zadatak 5. (20 bodova) Neka je $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ niz slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Za dani $a \in \mathbb{R}$, mora li uvijek vrijediti

$$\left\{ \sup_n X_n \geq a \right\} \in \mathcal{F}?$$

Rješenje. Odgovor je da! Prvo primijetimo da tvrdnja $\sup_n X_n \geq a$ znači da za svaki n postoji neki indeks m takav da je

$$X_m \geq a - \frac{1}{n}.$$

Stoga možemo zapisati

$$\left\{ \sup_n X_n \geq a \right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ X_m \geq a - \frac{1}{n} \right\}.$$

Budući da su svi pojedinačni podskupovi $\{X_m \geq a - \frac{1}{n}\}$ elementi \mathcal{F} , a \mathcal{F} je zatvorena na prebrojive unije i presjeke, slijedi da

$$\left\{ \sup_n X_n \geq a \right\} \in \mathcal{F}.$$