JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 6. veljače 2023.

- Broj zadataka: 5
- Vrijeme rješavanja: 120 min
- Ukupan broj bodova: 50
- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje. Ostali predmeti (npr. mobiteli, pametni satovi, ...) ne smiju biti u blizini studenta.

Zadatak 1. *(10 bodova - teorija)* Iskažite i dokažite Hinčinov slabi zakon velikih brojeva.

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 6. veljače 2023.

Zadatak 2. *(10 bodova - teorija)* Iskažite i dokažite Kolmogorovljeve nejednakosti.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 6. veljače 2023.

Zadatak 3. *(10 bodova - teorija)* Iskažite i dokažite teorem o tri reda.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 6. veljače 2023.

Zadatak 4. *(10 bodova - zadaci)*

(a) *(5 bodova)* Nađite četiri slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u $\{-1, 1\}$ tako da su bilo koje tri od njih nezavisne, ali sve četiri zajedno nisu. (Uputa: promatrajte produkte nezavisnih slučajnih varijabli.)

(b) *(5 bodova)* Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli koji konvergira po vjerojatnosti. Dokažite da je limes degenerirana slučajna varijabla.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 6. veljače 2023.

Zadatak 5. *(10 bodova - zadaci)*

(a) *(5 bodova)* Neka su $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$ nizovi na istom vjerojatnosnom prostoru koji konvergiraju prema X i Y po vjerojatnosti, redom. Neka je $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ proizvoljna neprekidna funkcija. Mora li tada i niz

$$Z_n := e^{g(X_n, Y_n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

konvergirati po vjerojatnosti? U slučajevima kada niz $(Z_n)_n$ konvergira, odredite mu limes.

(b) *(5 bodova)* Neka su $X \sim N(0,1)$ i Y slučajne varijable na istom vjerojatnosnom prostoru te $\mathbb{E}[|Y|] = \infty$. Neka su $a \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ i $b \in (-1,1)$ t.d. $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Ispitajte konvergenciju niza $(a_n X + b^n Y)_{n\in\mathbb{N}}$ po vjerojatnosti i u srednjem reda p. U slučaju konvergencije, odredite graničnu distribuciju.