JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 28. studenog 2022.

- Broj zadataka: 5
- Vrijeme rješavanja: 120 min
- Ukupan broj bodova: 50
- Na kolokviju je dozvoljen isključivo pribor za pisanje

Zadatak 1. *(10 bodova - teorija)* Definirajte 2-dimenzionalni normalni slučajni vektor $X = (X_1, X_2)$ te dokažite da je definicija dobra. Kako izgleda gustoća od X u slučaju kada su X_1 i X_2 nekorelirane? Sve svoje tvrdnje dokažite.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 28. studenog 2022.

Zadatak 2. *(10 bodova - teorija)* Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω i $A \subseteq \Omega$. Neka je $\mathcal{A} := \{A\} \cup \mathcal{F}$ i $\mathcal{E} := \{(A \cap E) \cup (A^c \cap F) : E, F \in \mathcal{F}\}$. Dokažite da je $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{A})$.

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 28. studenog 2022.

Zadatak 3. *(10 bodova - teorija)* Neka su $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(|X + Y - (\mathbb{E}X - \mathbb{E}Y)| \geq \varepsilon) \leq \frac{4\big[Var(X) + Var(Y)\big]}{\varepsilon^2}.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 28. studenog 2022.

Zadatak 4. *(10 bodova - zadaci)* Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te F_X njena pripadna funkcija distribucije.

(a) *(5 boda)* Dokažite da za svaki $c > 0$ vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} \big(F_X(x+c) - F_X(x)\big) d\lambda(x) = c,$$

pri čemu je λ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$.

(b) *(5 boda)* Ako X ima gustoću, ima li i $Y = \exp(X)$ gustoću? Ako ima, odredite je.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 28. studenog 2022.

Zadatak 5. *(10 bodova - zadaci)*

(a) *(5 boda)* Dokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji slučajna varijabla X na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takva da je

$$\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) = \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}.$$

(b) *(5 boda)* Dokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\inf\{\mathbb{P}(|X| > \varepsilon) : \mathbb{E}X = 0,\, Var(X) = 1\} = 0.$$