TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 8. veljače 2022.

Zadatak 1. *(10 bodova - teorija)* Iskažite i dokažite Kolmogorovljev zakon 0-1.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 8. veljače 2022.

Zadatak 2. *(10 bodova - teorija)* Iskažite i dokažite Teorem o tri reda.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 8. veljače 2022.

Zadatak 3. *(10 bodova - teorija)* Iskažite i dokažite slabi zakon velikih brojeva za nezavisne slučajne varijable koje imaju druge momente.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 8. veljače 2022.

Zadatak 4. *(10 bodova - zadaci)*

(a) *(5 bodova)* Neka su $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i X nenegativne slučajne varijable s konačnim očekivanjima. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X$ i neka za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X - X_n \geq \varepsilon) = 0$. Dokažite da tada $X_n \xrightarrow{L^1} X$.

(b) *(5 bodova)* Neka je X nenegativna slučajna varijabla. Pokažite da

$$\lim_{y\to\infty} y\mathbb{E}[1/X; X > y] = 0,$$

ali **ne pretpostavljajte** da je $\mathbb{E}[1/X] < \infty$.

Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

Rješenje.

(a) Vrijedi

$$\mathbb{E}[|X_n - X|] = \mathbb{E}[X_n - X + 2(X - X_n)^+] = \underbrace{\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}X}_{\to 0} + 2\mathbb{E}[(X - X_n)^+].$$

Također, zbog nenegativnosti od X i X_n vrijedi $(X - X_n)^+ \leq X$ pa je

$$\mathbb{E}[(X - X_n)^+] = \mathbb{E}[(X - X_n)^+; 0 \leq X - X_n < \varepsilon] + \mathbb{E}[(X - X_n)^+; X - X_n \geq \varepsilon] \leq \varepsilon + \mathbb{E}[X; X - X_n \geq \varepsilon],$$

međutim drugi izraz ide u 0 kako $n \to \infty$ po zadatku s vježbi jer za područje integracije $\{X - X_n \geq \varepsilon\}$ vrijedi $\mathbb{P}(X - X_n \geq \varepsilon) \to 0$.

(b) Primijetimo $\frac{y}{X}\mathbf{1}_{\{X>y\}} \leq 1$ te za svaki $\omega \in \Omega$ vrijedi $\frac{y}{X(\omega)}\mathbf{1}_{\{X(\omega)>y\}} = 0$ za dovoljno velik y. Stoga po dominiranoj konvergenciji imamo

$$\lim_{y\to\infty} y\mathbb{E}[1/X; X > y] = \lim_{y\to\infty} \mathbb{E}[y/X; X > y] = 0.$$

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 8. veljače 2022.

Zadatak 5. *(10 bodova - zadaci)* Neka su X, Y i Z slučajne varijable na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) *(3 bodova)* Ako su X i Y nezavisne, te Y i Z nezavisne, jesu li nužno X i Z nezavisne?

(b) *(3 bodova)* Ako su X, Y i Z nezavisne, vrijedi li uvijek jednakost

$$\mathbb{P}(X > Y, X > Z) = \mathbb{P}(X > Y)\mathbb{P}(X > Z)?$$

(c) *(4 bodova)* Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable takve da je $X - Y = c \in \mathbb{R}$. Dokažite da su tada i X i Y konstante g.s.

Sve svoje tvrdnje precizno dokažite ili potkrijepite protuprimjerom.

Rješenje.

(a) Ne. Npr. za $X \sim N(0,1)$, $Y = c \in \mathbb{R}$ i $Z = X$.

(b) Ne. Npr. za $X \sim N(0,1)$, $Y = 1$ i $Z = 2$ relacija ne vrijedi.

(c) Tvrdnja se može pokazati isto kao slična tvrdnja za produkt dviju varijabli koja je pokazana na vježbama.

Alternativno, ako pretpostavimo postojanje varijance za X i Y, onda slijedi

$$0 = Var(c) = Var(X - Y) \overset{nez.}{=} Var(X) + Var(Y)$$

pa je $Var(X) = Var(Y) = 0$, tj. i X i Y su konstante. Ipak, pretpostavka o varijanci nije dozvoljena u zadatku.