TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 30. studenog 2021.

Zadatak 1. *(10 bodova - teorija)* Iskažite i dokažite gornju i donju ocjenu „repa“ distribucije preko momenata distribucije.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 30. studenog 2021.

Zadatak 2. *(10 bodova - teorija)* Opišite dvodimenzionalnu normalnu distribuciju i pokažite da je dobro definirana.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 30. studenog 2021.

Zadatak 3. *(10 bodova - teorija)* Dokažite da konvergencija po vjerojatnosti povlači konvergenciju po distribuciji. Što možete reći o obratu ove tvrdnje?

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 30. studenog 2021.

Zadatak 4. *(6 bodova - zadaci)* Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor.

(a) *(3 boda)* Neka je $A \subset \Omega$ i $\mathcal{A} = \{A\} \cup \mathcal{F}$. Pokažite da vrijedi

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{(A \cap E) \cup (A^c \cap F) : E, F \in \mathcal{F}\}.$$

(b) *(3 boda)* Ako je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F})$ je li $Y = X + 1_A$ slučajna varijabla na $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$? Svoju tvrdnju dokažite.

Rješenje. Zadatak je trivijalan.

(a) Definiramo $\mathcal{G} = \{(A \cap E) \cup (A^c \cap F) : E, F \in \mathcal{F}\}$. Očito je da skupovi oblika $(A \cap E) \cup (A^c \cap F)$, za $E, F \in \mathcal{F}$, moraju biti u $\sigma(\mathcal{A})$. Dakle, $\mathcal{G} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$. Također, očito $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ (uzmemo $E = F$ u definiciji od $\mathcal{G}$)i $A \in \mathcal{G}$ ($E = \Omega$ i $F = \emptyset$).

Sada se trivijalno po definiciji pokaže da je $\mathcal{G}$ σ-algebra, pa jer ona sadrži i $\mathcal{A}$ imamo i $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}$ čime je dokaz gotov

(b) Ima mnogo laganih načina kako pokazati izmjerivost od Y. Evo jednog:

$$Y^{\leftarrow}(B) = (X^{\leftarrow}(B-1) \cap A) \cup (X^{\leftarrow}(B) \cap A^c)$$

pa tvrdnja slijedi po dijelu (a).

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 30. studenog 2021.

Zadatak 5. *(14 bodova - zadaci)* Neka je F vjerojatnosna funkcija distribucije.

(a) *(7 boda)* Označimo s

$$S(F) = \{x \in \mathbb{R} : F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0 \text{ za svaki } \varepsilon > 0\}.$$

Dokažite da je skup prekida funkcije F, tj. $\mathbb{R} \setminus C(F)$, sadržan u $S(F)$. Dokažite da je skup $S(F)$ zatvoren i dajte primjer slučajne varijable za koju vrijedi $S(F) = \mathbb{R}$.

(b) *(7 boda)* Dokažite da postoje $\alpha_d, \alpha_c \geq 0$ takve da $\alpha_d + \alpha_c = 1$, i vjerojatnosne funkcije distribucije F_d i F_c takve da je

$$F = \alpha_d F_d + \alpha_c F_c,$$

pri čemu je F_d funkcija distribucije neke disretne slučajne varijable, a F_c je topološki neprekidna funkcija distribucije. (*Napomena: ne smije se pozvati na Lebesgueovu dekompoziciju.*)

Rješenje.

(a) Ako je $x \in \mathbb{R}$ točka prekida, onda $F(x) - F(x-) > 0$, tj. za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi $F(x+\varepsilon) \geq F(x) > F(x-) \geq F(x-\varepsilon)$ pa je $\mathbb{R} \setminus C(F) \subset S(F)$.

Ako $x \notin S(F)$, znači da postoji $\varepsilon > 0$ takav da $F(x+\varepsilon) = F(x-\varepsilon)$, tj. F je konstanta na $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ pa je $B(x, \varepsilon/2) \subset \mathbb{R} \setminus S(F)$, tj. $\mathbb{R} \setminus S(F)$ je otvoren, tj. $S(F)$ je zatvoren.

Ako je $F = F_{N(0,1)}$, onda je F strogo rastuća (jer je $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$) pa je $S(F) = \mathbb{R}$.

(b) Skica: Neka je $D = \{x \in \mathbb{R} : F(x) - F(x-) > 0\}$ skup prekida funkcije F koji je najviše prebrojiv po tvrdnji s predavanja. Dakle, $D = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ (iako taj skup može biti i konačan). Definiramo $\alpha_d := \sum_{x_i \in D} (F(x_i) - F(x_i-))$ i vrijedi $0 \leq \alpha_d \leq 1$. Možemo pretp. da $\alpha_d > 0$. Također,

$$F_d = \frac{1}{\alpha_d} \sum_{x_i \leq x} (F(x_i) - F(x_i-)).$$

Sada je gotovo očito da je F_d funkcija distribucije diskretne slučajne varijable. Također, $F_c = \frac{F - \alpha_d F_d}{1 - \alpha_d}$ je topološki neprekidna jer smo s $F - \alpha_d F_d$ oduzeli sve moguće skokove funkcije F.