TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 4. veljače 2021.

Zadatak 1. *(10 bodova - teorija)* Dokažite da svaki po vjerojatnosti Cauchyjev niz slučajnih varijabli ima (g.s.) konvergentan podniz.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 4. veljače 2021.

Zadatak 2. *(10 bodova - teorija)* Iskažite i dokažite Hinčinov slabi zakon velikih brojeva.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 4. veljače 2021.

Zadatak 3. *(10 bodova - teorija)* Iskažite i dokažite Kolmogorovljev teorem o tri reda.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 4. veljače 2021.

Zadatak 4. *(10 bodova - zadaci)* Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i neka je X slučajna varijabla na istom vjerojatnosnom prostoru. Dokažite tvrdnju: ako postoji $r > 0$ takav da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\big[|X_n - X|^r\big] < \infty,$$

onda $X_n \to X$ gotovo sigurno.

Rješenje. Koristeći Markovljevu nejednakost imamo

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| \geq \varepsilon\}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\left(\{|X_k - X| \geq \varepsilon\}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\big[|X_k - X|^r\big]}{\varepsilon^r} = 0.$$

Alternativno: iz Beppo-Levijevog teorema slijedi da $\mathbb{E}\big[\sum_{n=1}^{\infty} |X_n - X|^r\big] < \infty$, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n - X|^r < \infty$ (g.s.), tj. po nužnom uvjetu konvergencije reda $|X_n - X|^r \to 0$ (g.s.), tj. $X_n \to X$ (g.s.)

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 4. veljače 2021.

Zadatak 5. *(10 bodova - zadaci)* Neka je dan niz $(X_n)_n$ slučajnih varijabli na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Dokažite: ako je niz $(X_n)_n$ jednakodistribuiran i red $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergira po vjerojatnosti, onda je $X_n = 0$ gotovo sigurno, za sve $n \in \mathbb{N}$.

(b) Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli takvih da $\mathbb{P}(X_1 = 0) < 1$, te neka je $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažite: za svaki $c > 0$ postoji $n = n_c \in \mathbb{N}$ takav da $\mathbb{P}(|S_n| > c) > 0$.

Sve tvrdnje precizno dokažite, a rezultate s predavanja i vježbi precizno iskažite.

Rješenje.

(a) Označimo $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Iz $\mathbb{P}(|X_1| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|S_n - S_{n-1}| \geq \varepsilon) \to 0$ imamo $\mathbb{P}(|X_1| \geq \varepsilon) = 0$ za svaki $\varepsilon > 0$. Sada lako slijedi da je $X_1 = 0$ gotovo sigurno.

(b) $\mathbb{P}(|S_n| > c) \geq \mathbb{P}(|X_1| > \frac{c}{n}, \ldots, |X_n| > \frac{c}{n}) = \mathbb{P}(|X_1| > \frac{c}{n})^n \geq \max\{(1 - F(\frac{c}{n}))^n, F(-\frac{c}{n})^n\} > 0$, za dovoljno velike $n \in \mathbb{N}$ jer $\mathbb{P}(X_1 = 0) < 1$.