TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 19. studenog 2020.

Zadatak 1. *(10 bodova - teorija)* Opišite osnovna svojstva funkcije distribucije slučajne varijable i dokažite da svaka funkcija koja zadovoljava ta osnovna svojstva mora biti funkcija distribucije neke slučajne varijable.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 19. studenog 2020.

Zadatak 2. *(10 bodova - teorija)* Opišite funkciju gustoće 2-dimenzionalne normalne razdiobe i dokažite da se radi o funkciji gustoće.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 19. studenog 2020.

Zadatak 3. *(10 bodova - teorija)* Niz slučajnih varijabli $(X_n : n \in \mathbb{N})$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je **uniformno integrabilan** ako vrijedi

$$\lim_{c\to\infty}\left(\sup_n \int_{\{|X_n|>c\}} |X_n| d\mathbb{P}\right) = 0.$$

Dokažite da, ako je $|X_n| \leq Y$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $\mathbb{E}Y < \infty$, tada je niz $(X_n)_n$ uniformno integrabilan.

Rješenje. Budući da je $|X_n| \leq Y$, vrijedi i $\{|X_n| > c\} \subseteq \{Y > c\}$ te stoga imamo

$$\int_{\{|X_n|>c\}} |X_n| d\mathbb{P} \leq \int_{\{|Y|>c\}} Y \, d\mathbb{P}.$$

Tvrdnja odmah slijedi iz LTDK.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 19. studenog 2020.

Zadatak 4. *(10 bodova - zadaci)*

(a) *(5 bodova)* Odredite za koje vrijednosti od $a, b, c \in \mathbb{R}$ je funkcija $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ funkcija distribucije neke slučajne varijable ako je

$$F(x) = \mathbf{1}_{\langle -\infty, 1/2\rangle}(x) + (1/2 + a)\mathbf{1}_{\{1/2\}}(x) + (x + a + b)\mathbf{1}_{\langle 1/2, 3/4\rangle}(x) + (7/8 + a + b)\mathbf{1}_{[3/4,\infty\rangle}(x) + c.$$

Izračunajte $\mathbb{P}(X \in \langle 0, 3/4\rangle)$ i $\mathbb{P}(X \in [1/2, 1])$.

(b) *(5 bodova)* Napravite dekompoziciju funkcije F na diskretni, apsolutno neprekidni i singularni dio te klasificirajte neprekidni dio. Preciznije, odredite rastav $F = \alpha_d F_d + \alpha_a F_a + \alpha_s F_s$ pri čemu su $\alpha_d, \alpha_a, \alpha_s \geq 0$ takvi da $\alpha_a + \alpha_d + \alpha_s = 1$, a F_d funkcija distribucije neke diskretne, F_a neke aspolutno neprekidne, a F_s neke singularne slučajne varijable. Odredite (imenom) distribuciju F_a.

Rješenje.

(a) Iz $F(-\infty) = 0$ imamo $c = -1$. Iz $F(\infty) = 1$ imamo $7/8 + a + b = 2$. Iz $F(1/2) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} F(1/2+\varepsilon)$ imamo $b = 0$, stoga $a = 9/8$. Tada $\mathbb{P}(X \in \langle 0, 3/4\rangle) = F(3/4-) = 7/8$ i $\mathbb{P}(X \in [1/2, 1]) = F(1) - F(1/2-) = 1$.

(b) Skokovi se pojavljuju u točkama $1/2$ i $3/4$ pa oni generiraju diskretni dio, tj. $\alpha_d F_d = (5/8)\mathbf{1}_{[1/2,\infty\rangle} + (1/8)\mathbf{1}_{[3/4,\infty\rangle}$. Stoga je $\alpha_d = 6/8$. Budući da nema singularnog dijela, imamo $\alpha_s = 0$, $\alpha_a = 2/8$ te

$$F_a(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/2 \\ \frac{x-1/2}{3/4-1/2}, & 1/2 \leq x < 3/4 \\ 1, & x \geq 3/4 \end{cases},$$

tj. F_a je uniformna distribucija na $[1/2, 3/4]$.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

1. kolokvij – 19. studenog 2020.

Zadatak 5. *(10 bodova - zadaci)* Neka je X diskretna slučajna varijabla s distribucijom

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix},$$

te neka je Y apsolutno neprekidna slučajna varijabla s gustoćom f_Y.

(a) *(5 bodova)* Ako su X i Y definirane na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, je li moguće da vrijedi $\sigma(X) = \sigma(Y)$? Dokažite svoje tvrdnje. (Za 2 boda možete dokazati tvrdnju kada za X vrijedi da je $\{a_1, a_2, \dots\}$ konačan.)

(b) *(5 bodova)* Ako je X definirana na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_1)$, a Y na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_2)$, je li moguće da $\sigma(X) = \sigma(Y)$? Dokažite svoje tvrdnje.

Rješenje.

(a) Ne. Pretpostavimo da je $\sigma(X) = \sigma(Y)$. To znači da postoji funkcija f takva da $f(X) = Y$. Međutim, lako se pokaže da je tada Y također diskretna što je nemoguće.

(b) Da. Na kanonskom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X)$ su varijable definirane kao $X(\omega) = \omega$ tako da je $\sigma(X) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.