TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 3. veljače 2020.

Zadatak 1. *(8 bodova)*

(a) *(6 bodova)* Dokažite: ako slučajni vektor $X = (X_1, \dots, X_n)$ ima gustoću f, tada svaka slučajna varijabla X_i ima gustoću f_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Osim toga, u tom slučaju su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne ako i samo ako je

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n),$$

za sve $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, osim eventualno Borelovog podskupa od $\mathbb{R}^n$ Lebesgueove mjere nula.

(b) *(2 boda)* Dokažite da obrat gornje tvrdnje ne vrijedi, tj. za neki $n \in \mathbb{N}$ nađite neprekidne slučajne varijable $X_1, \dots, X_n$ takve da vektor $X = (X_1, \dots, X_n)$ nema gustoću.

Rješenje.

(a) Pogledati predavanja.

(b) Neka je $Y \sim N(0,1)$ na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada je vektor $X = (Y, Y)$ koncentriran na $\{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, tj. na dijagonali skupa $\mathbb{R}^2$ pa X ne može biti neprekidan slučajan vektor jer je koncentriran na skupu Lebesgueove mjere 0.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 3. veljače 2020.

Zadatak 2. *(8 bodova)*

(a) *(2 boda)* Definirajte repnu σ-algebru.

(b) *(3 boda)* Iskažite Kolmogorovljev zakon 0-1.

(c) *(3 boda)* Dokažite: ako je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli, tada $(X_n)_n$ konvergira $(g.s.)$ prema konačnom limesu ili divergira $(g.s.)$.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 3. veljače 2020.

Zadatak 3. *(8 bodova)* Neka su X, X_n, Y_n, za $n \in \mathbb{N}$, slučajne varijable te neka je $c \in \mathbb{R}$.

(a) *(2 boda)* Ako $X_n \xrightarrow{D} X$, dokažite da tada i $cX_n \xrightarrow{D} cX$.

(b) *(6 bodova)* Ako $X_n \xrightarrow{D} X$ i $Y_n \xrightarrow{D} c$, dokažite da tada $X_nY_n \xrightarrow{D} cX$.

Sve tvrdnje detaljno dokažite, a one koje su dokazane na vježbama ili predavanjima precizno iskažite.

Rješenje.

(a) Treba pokazati da je $C(F_{cX}) = cC(F_X) = \{cx \mid x \in C(F_X)\}$, a ostalo slijedi trivijalno.

(b) Slično kao tvrdnju za zbroj slučajnih varijabli koja je napravljena na vježbama, dovoljno je dokazati tvrdnju za $c = 0$. Zaista, neka tvrdnja vrijedi za $c = 0$ i dokažimo da ona onda vrijedi i za općeniti c. Imamo $\mathbb{P}(X_nY_n \leq x) = \mathbb{P}(X_n(Y_n - c) + cX_n \leq x) \to \mathbb{P}(cX \leq x)$ gdje tvrdnju o konvergenciji dobijemo iz tvrdnje s vježbi.
Dakle, pretpostavimo da je $c = 0$. Budući da je potencijalni limes jednak 0, ekvivalentno je dokazati tvrdnju s konvergencijom po vjerojatnosti. Imamo

$$\mathbb{P}(|X_nY_n| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n| \geq R) + \mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon/R) \leq \varepsilon + \varepsilon,$$

za veliki $R \in C(F_X)$ takav da $\mathbb{P}(|X| \geq R) \leq \varepsilon$ i za velike n.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 3. veljače 2020.

Zadatak 4. *(6 bodova)* Neka je Y nenegativna slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i neka je $c \in \langle 0, +\infty \rangle$ takav da

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbb{E}e^{-\lambda Y} \leq e^{-\lambda c}.$$

Dokažite da je $Y \geq c$ $\mathbb{P}$-g.s.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $A \in \mathcal{F}$ takav da je $Y < c$ na A i $\mathbb{P}(A) > 0$. Lako se pokaže da postoje $n \in \mathbb{N}$ i $A_n \in \mathcal{F}$ takvi da $Y < c - \frac{1}{n}$ na A_n i $\mathbb{P}(A_n) > 0$.
Imamo $\mathbb{E}e^{-\lambda Y} \leq e^{-\lambda c} \iff \mathbb{E}e^{-\lambda(Y-c)} \leq 1$, a iz toga imamo

$$1 \geq \mathbb{E}[e^{-\lambda(Y-c)}] \geq \mathbb{E}[e^{-\lambda(Y-c)}; A_n] \geq \mathbb{E}[e^{-\lambda(c-\frac{1}{n}-c)}; A_n] = e^{\lambda/n}\mathbb{P}(A_n) > 0, \quad \forall \lambda \geq 0. \tag{1}$$

Sada pustimo $\lambda \to \infty$ u (1) i dobijemo kontradikciju (jer je n fiksan).