TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij – 18. veljače 2018.

Zadatak 1. (15 bodova) Dokažite da svaki po vjerojatnosti konvergentan niz slučajnih varijabli ima (g.s.) konvergentan podniz.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij – 18. veljače 2018.

Zadatak 2. (15 bodova) Iskažite i dokažite Kolmogorovljev teorem o tri reda.

Rješenje. Pogledati predavanja.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij – 18. veljače 2018.

Zadatak 3. (7 bodova) Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz jednako distribuiranih slučajnih varijabli i neka red $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergira po vjerojatnosti. Dokažite da je tada $X_n = 0$ (g.s.), za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Sve svoje tvrdnje precizno dokažite.

Rješenje. Skica: $\mathbb{P}(|X_1| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n-1} X_k| \geq \varepsilon) \to 0$ jer ako niz konvergira po vjerojatnosti, onda je i Cauchyjev po vjerojatnosti. Dakle, $\mathbb{P}(|X_1| \geq \varepsilon) = 0$ za sve $\varepsilon > 0$. Sada $\mathbb{P}(X_1 \neq 0) = \mathbb{P}(|X_1| > 0) = \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty}\{|X_1| \geq \frac{1}{n}\}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_1| \geq \frac{1}{n}) = 0.$

TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

Završni kolokvij – 18. veljače 2018.

Zadatak 4. (3 boda) Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $([0,1], \mathcal{B}([0,1])\,, \lambda|_{\mathcal{B}([0,1])})$. Dokažite da je preslikavanje

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & \omega \in [0,1] \backslash \mathbb{Q} \\ \omega, & \omega \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

također slučajna varijabla na istom vjerojatnosnom prostoru.

Rješenje. $Y(\omega) = X(\omega)\mathbf{1}_{[0,1]\backslash\mathbb{Q}}(\omega) + \omega\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(\omega)$ pa je Y izmjeriva kao umnožak i zbroj izmjerivih, tj. Y je slučajna varijabla.