# TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 4. veljače 2019.

**Zadatak 1.** *(8 bodova)* Iskažite i dokažite Kolmogorovljev zakon nula-jedan.

*Rješenje.* Pogledati predavanja.

# TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 4. veljače 2019.

**Zadatak 2.** *(8 bodova)* Iskažite i dokažite Hinčinov slabi zakon velikih brojeva.

*Rješenje.* Pogledati predavanja.

# TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 4. veljače 2019.

**Zadatak 3.** *(8 bodova)*

(a) Neka su $X, X_1, X_2, X_3, \dots$ slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dokažite

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \iff \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X| \wedge 1] = 0$$

[5 bodova]

(b) Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ i neka je $(Y_n)_n$ niz slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$. Pretpostavimo da nizovi $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$ imaju iste konačnodimenzionalne distribucije i pretpostavimo da $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ $\mathbb{P}_1$-g.s. Mora li tada nužno vrijediti $\lim_{n\to\infty} Y_n = 0$ $\mathbb{P}_2$-g.s.? Dokažite! [3 boda]

Sve svoje tvrdnje precizno dokažite (a one koje su dokazane na predavanjima ili vježbama precizno iskažite).

*Rješenje.* Skica:

(a) Neka $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ i pretpostavimo da postoji $\varepsilon > 0$ i podniz $(X_{n_k})_k$ takav da $\mathbb{E}[|X_{n_k} - X| \wedge 1] \geq \varepsilon$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Tada postoji podniz $(X_{n_{k_l}})_l$ koji konvergira k $X$ g.s. te po Lebesgueovom teoremu dominirane konvergencije dobijemo da $\lim_{l\to\infty} \mathbb{E}[|X_{n_{k_l}} - X| \wedge 1] = 0$ što je kontradikcija. Obratno, neka je $\varepsilon \in \langle 0, 1\rangle$. Tada je po Markovljevoj nejednakosti $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n - X| \wedge 1]}{\varepsilon}$. Time smo dobili i drugi smjer.

(b) Može se lako pokazati da tvrdnja vrijedi koristeći Propoziciju 10.16.a) iz knjige prof. Sarape.

# TEORIJA VJEROJATNOSTI 1

2. kolokvij – 4. veljače 2019.

**Zadatak 4.** *(6 bodova)* Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ za koji vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_n| < +\infty.$$

(a) Izračunajte limes niza $(X_n)_n$ u $L^1$.

(b) Konvergira li red $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n|$ g.s?

(c) Što možete reći o g.s. konvergenciji reda $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$?

(d) Konvergira li niz $(X_n)_n$ g.s?

Sve svoje tvrdnje precizno dokažite (a one koje su dokazane na predavanjima ili vježbama precizno iskažite).

*Rješenje.* Skica:

(a) Lako se dobije da $\lim_n X_n = 0$ u $L^1$.

(b) Koristeći Lebesgueov teorem monotone konvergencije dobijemo da (proširena) nenegativna slučajna varijabla $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n|$ ima konačno očekivanje, a to znači da je konačna g.s., tj. red $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n|$ konvergira g.s.

(c) Apsolutna konvergencija redova povlači uvjetnu konvergenciju. Precizno se dokaže tako da uzmemo nul skup $N \in \mathcal{F}$ na kojem $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n|$ ne konvergira i pokažemo da na $N^c$ red $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergira.

(d) Slično kao u dijelu (c), lako se pokaže da $(X_n)_n$ konvergira u 0 g.s.