JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 25. studenog 2018.

- Broj zadataka: 4
- Vrijeme rješavanja: 120 min
- Ukupan broj bodova: 30
- Na kolokviju je dozvoljen isključivo pribor za pisanje

Zadatak 1. *(8 bodova)* Iskažite i dokažite tvrdnje o gornjoj i donjoj ocjeni repne vjerojatnosti slučajne varijable X (radi se o vjerojatnosti $\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon)$, u terminima očekivanja od neke funkcije g od X (radi se o $\mathbb{E}[g(X)]$).

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 25. studenog 2018.

Zadatak 2. *(8 bodova)* Kakav je odnos konvergencije po vjerojatnosti i konvergencije po distribuciji? Postoje li slučajevi u kojima su te konvergencije ekvivalentne? Dokažite svoje odgovore.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 25. studenog 2018.

Zadatak 3. *(8 bodova)*

(a) Neka je Ω neprazan skup i neka su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ σ-algebre na Ω. Dokažite: $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ je σ-algebra ako i samo ako je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ili $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. [5 bodova]

(b) Dokažite da za $Y = e^X$ vrijedi

$$\sigma(X) = \sigma(Y),$$

gdje su $\sigma(X)$ i $\sigma(Y)$ σ-algebre inducirane slučajnim varijablama X i Y. [2 boda]

(c) Vrijedi li jednakost iz (b) dijela zadatka za $Y = g(X)$, gdje je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ proizvoljna Borelova funkcija? Obrazložite! [1 bod]

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 25. studenog 2018.

Zadatak 4. *(6 bodova)*

(a) Neka je F (topološki) neprekidna vjerojatnosna funkcija distribucije na $\mathbb{R}$ takva da je $F(0) = 0$. Je li funkcija G definirana s

$$G(x) = \begin{cases} F(x) - F(\frac{1}{x}), & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

također vjerojatnosna funkcija distribucije na $\mathbb{R}$? Svoju tvrdnju dokažite. [4 boda]

(b) Neka je X slučajna varijabla s uniformnom distribucijom $X \sim U(0,1)$. Nađite Borelovu funkciju f takvu da slučajna varijabla $f(X)$ ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom 1. [2 boda]