

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 30. travnja 2025.

Zadatak 1. (10 bodova) Iskažite i dokažite osnovna svojstva karakterističnih funkcija.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 30. travnja 2025.

Zadatak 2. (10 bodova) Iskažite i dokažite teorem jedinstvenosti za karakteristične funkcije.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 30. travnja 2025.

Zadatak 3. (10 bodova)

- a) Zadana je slučajna varijabla $Y := 2X + c$, gdje je X slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x-3}, & x \geq -3 \\ 0, & x < -3 \end{cases}$$

Odredite karakterističnu funkciju φ_Y slučajne varijable Y (u ovisnosti o c).

- b) Koristeći teorem o inverziji, pokažite da slučajna varijabla s karakterističnom funkcijom $\varphi(t) = e^{-|t|}$ ima Cauchyevu distribuciju, odnosno da joj je pripadna funkcija gustoće $f(x) = 1/(\pi(1+x^2))$.
- c) Postoji li još neka distribucija koja ima karakterističnu funkciju zadanu u b) podzadatku? Ako da, pronađite primjer, ako ne, obrazložite zašto.

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 30. travnja 2025.

Zadatak 4. (10 bodova) Zadane su nezavisne jednakodistribuirane slučajne varijable $X_1, X_2, \dots$, te slučajna varijabla M , nezavisna od $X_1, X_2, \dots$ s distribucijom $\mathbb{P}(M = m) = \frac{1}{2^{m+1}}$ za $m \in \mathbb{N}_0$. Promatramo slučajnu varijablu

$$Z = \sum_{j=1}^M X_j$$

Pokažite da je njena karakteristična funkcija $\varphi_Z(t) = (2 - \varphi(t))^{-1}$ pri čemu je φ karakteristična funkcija od X_1 .

TEORIJA VJEROJATNOSTI 2

1. kolokvij – 30. travnja 2025.

Zadatak 5. (10 bodova) Za koje $a \in \mathbb{R}$ je funkcija

$$\varphi_a(t) = \begin{cases} 1 - a|t|, & |t| \leq 1 \\ 1 - a, & |t| > 1 \end{cases}$$

karakteristična funkcija.