Teorija vjerojatnosti 2 - vježbe

1 Uvod u zakone velikih brojeva i centralni granični teorem

Primjer 1.1 (Bernoullijev SZVB)**.** Neka su $(Z_n)_n$ nezavisne slučajne varijable takve da $Z_n \sim B(n,p)$, za $p \in (0,1)$. Vrijedi $\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} p$.

Zadatak 1.2. Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnih varijabli takav da za $k \geq 2$, X_k ovisi o X_{k-1} i X_{k+1}, ali je nezavisan sa svim ostalim X_i, te $\operatorname{Var} X_i \leq M < \infty$. Dokažite da vrijedi SZVB.

Zadatak 1.3. Neka je $(X_n)_n$ niz n.j.d. sl. var. za koje vrijedi $\mathbb{E}X_1 = \mu \in (0,+\infty)$. Dokažite:

(i) $\mathbb{P}(\sup_n S_n = +\infty) = 1$

(ii) $\mathbb{P}(\inf_n S_n > -\infty) = 1$ (DZ)

Zadatak 1.4. Neka su $(X_n)_n$ n.j.d. slučajne varijable s očekivanjem $\mathbb{E}X_1 = 0$. Varijanca $\operatorname{Var} X_1 = \sigma^2 > 0$ je konačna, ali nije nam poznat njen iznos. Znamo da je $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 1\right) = \frac{1}{3}$. Odredite σ^2.

Zadatak 1.5. Neka su $(X_n)_n$ n.j.d. slučajne varijable s konačnom varijancom. Znamo da tada $(X_n)_n$ zadovoljava uvjete CGT. Pokažite da iz CGT slijedi SZVB.

1.1 Zadaci za vježbu

Zadatak 1.6. (SZVB) Neka su $(X_n)_n$ sl. var. tako da je za svaki $n \geq 1$ $\operatorname{Var} X_i \leq C < \infty$ i $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) < 0$ za svaki $i \neq j$. Dokažite da vrijedi SZVB.

Zadatak 1.7. (SZVB) Neka je $(X_n)_n$ niz slučajnh varijabli, $S_n = \sum_1^n X_i$. Označimo $\sigma_n^2 := \operatorname{Var} S_n$, te neka je $(b_n)_n$ niz nenegativnih brojeva takvih da vrijedi $b_n \to +\infty$.

Ako vrijedi $\frac{\sigma_n^2}{b_n^2} \to 0$, tada $\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{b_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

Zadatak 1.8. (CGT) U igri ruleta vjerojatnost pobjede je $\frac{18}{37}$. Pretpostavimo da u svakoj igri igrač ili dobije 1 žeton ili izgubi 1 žeton. Koliko se igara treba odigrati u kasinu na dnevnoj bazi kako bi kasino s vjerojatnošću bar $\frac{1}{2}$ bio siguran da zarađuje 1000 žetona dnevno? Potom pronađite vjerojatnost da je kasino u gubitku (za taj broj igara).

2 Slabi zakon velikih brojeva

Napomena 2.1. Za $\alpha > -1$ vrijedi

$$\lim_n \frac{\sum_{k=1}^n k^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1}$$

To ćemo kraće označavati sa $\sum_{k=1}^n k^\alpha \sim n^{\alpha+1}$ jer nas konstanta u beskonačnosti često ne zanima.

Za $\alpha = -1$ vrijedi $\sum_{k=1}^n k^{-1} \sim \log n$.

Za $\alpha < -1$ imamo konvergentan niz, pa je $\sum_{k=1}^n k^\alpha \sim 1$.

Napomena 2.2. U rješavanju naredna tri primjera/zadatka koristit ćemo *zadatak 1.7.*

Primjer 2.3 (*Coupon collector's problem*)**.** Neka su $(X_k)_k$ n.j.d. uniformne na $\{1, 2, \ldots, n\}$. Da bismo motivirali ime primjera, zamislimo da skupljamo sličice ili kupone. Pretpostavimo da je i-ti objekt koji sakupimo nasumično odabran iz skupa mogućnosti i nezavisan od prethodnih odabira. Označimo sa $\tau_k^n := \inf\{m : |\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}| = k\}$, tj. prvi trenutak kada imamo k različitih objekata. Zanima nas asimptotsko ponašanje od $T_n := \tau_n^n$, vremena potrebnog za popuniti kolekciju.

Pokazat ćemo da vrijedi $\frac{T_n}{n \log n} \xrightarrow{P} 0$.

Primjer 2.4. Raspoređujemo r loptica u n kutija tako da svaki od n^r mogućih rasporeda ima jednaku vjerojatnost. Neka je A_i događadaj da je i-ta kutija prazna, a N_n broj praznih kutija.

Pustit ćemo da r, $n \to \infty$ i pretpostavimo da $\frac{r}{n} \to c$. Pokazat ćemo da vrijedi $\frac{N_n}{n} \to e^{-c}$

Zadatak 2.5. Neka je X slučajna varijabla s očekivanjem 0 i varijancom 1 i pretpostavimo da su $(X_n)_n$ nezavisne slučajne varijable, takve da $X_k \stackrel{d}{=} kX$, za svaki k i $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $n \geq 1$. Pokažite da vrijedi $\frac{S_n}{n^2} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Zadatak 2.6. Neka je $(X_n)_n$ niz n.j.d. sl. var. i $(Y_n)_n$ također niz n.j.d. sl. var. tako da vrijedi $\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}Y_1 = \mu$. Definiramo niz $(Z_n)_n$ takav da je $Z_{2n-1} = X_n$, $Z_{2n} = Y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da za niz $(Z_n)_n$ vrijedi SZVB.

Napomena: nizovi $(X_n)_n$ i $(Y_n)_n$ ne moraju biti međusobno nezavisni.

Zadatak 2.7. Neka je $(X_n)_n$ niz n.j.d. takvih da je $X_1 \sim U(0,1)$. Definiramo $Y_n := \cos \frac{X_n}{X_{n+1}}$. Dokažite da $(Y_n)_n$ zadovoljava SZVB.

Zadatak 2.8. Neka su $(X_n)_n$ n.j.d. sl. varijable takve da je

$$\mathbb{P}(X_1 = (-1)^k k) = \frac{C}{k^2 log k}, k \geq 2$$

pri čemu je konstanta C odabrana tako da je suma vjerojatnosti 1. Vrijedi li SZVB?

Primjer 2.9. Neka je $p_k = 1/(2^k k(k+1))$, za $k = 1, 2, \ldots$ i $p_0 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k$. Definiramo $(X_n)_n$ kao n.j.d. sl. var. takve da je

$$\mathbb{P}(X_1 = -1) = p_0$$
$$\mathbb{P}(X_1 = 2^k - 1) = p_k, \text{ za } k \geq 1.$$

Interpretiramo X_n kao osvojeni iznos tijekom n-te igre. Pokazat ćemo da je $\mathbb{E}X_n = 0$ što sugerira da je igra "fer". Međutim, uz $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$ i teorem o SZVB za trokutaste nizove uz $b_n = 2^{m(n)}$ gdje je $m(n) = \min\{m : 2^{-m} m^{-3/2} \leq n^{-1}\}$ pokazat ćemo da vrijedi

$$\frac{S_n}{n/log_2 n} \xrightarrow{\mathbb{P}} -1$$

2.1 Zadaci za vježbu

Zadatak 2.10. Za isti X kao u zadatku 2.5, neka je za svaki k, $X_k \stackrel{d}{=} k^{\beta} X$, za neki $\beta > 0$. Pronađite prikladnu normalizaciju za SZVB (tj. pronađite prikladni γ t.d. $\frac{S_n}{n^{\gamma}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$).

Zadatak 2.11. Neka je $(X_n)_n$ niz n.j.d. sl. var. takvih da $X_n \sim N(0, cn^{\alpha})$ gdje je $c > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Pokažite da $(X_n)_n$ zadovoljava slabi zakon velikih brojeva za $\alpha < 1$. (Uputa: koristite napomenu 2.1).

Zadatak 2.12. Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih sl. var. takvih da je $\mathbb{E}X_n = 0$, $\operatorname{Var} X_n = \sigma^2$. Uz $Z_n := X_n + X_{n+1}$, zadovoljava li niz $(Z_n)_n$ SZVB?

Zadatak 2.13. Neka su $(X_n)_n$ n.j.d. sl. var takve da je

$$\mathbb{P}(X_1 = n) = \frac{1}{n(n-1)}, n = 2, 3, \ldots$$

Vrijedi li slabi zakon velikih brojeva?

3 Konvergencija redova

Zadatak 3.1. Neka su $(X_n)_n$ n.j.d. slučajne varijable iz standardne normalne razdiobe. Pokažite da za proizvoljan t

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{sin(n\pi t)}{n}$$

konvergira g.s.

Zadatak 3.2. Uz $(X_n)_n$ niz n.j.d. slučajnih varijabli takvih da $X_1 \sim N(1,1)$ i $a > 1$, dokažite da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a^n}$$

konvergira g.s.

Zadatak 3.3. Neka su $(X_n)_n$ nezavisne i $\mathbb{E}X_n = 0$, $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma_n^2$.

i) Ako je $\sum_n \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$ pokažite da X_n/n (a onda i $\frac{S_n}{n}$) konvergira prema 0 g.s.

ii) Ako je $\sum_n \frac{\sigma_n^2}{n^2} = \infty$ i $\sigma_n^2 \leq n^2$, pokažite da postoje slučajne varijable X_n sa očekivanjem $\mathbb{E}X_n = 0$ i $\mathrm{Var}(X_n) \leq \sigma_n^2$ takve da X_n/n (a onda i $\frac{S_n}{n}$) ne konvergira prema 0 g.s.

Zadatak 3.4. Neka su $X_n \geq 0$, $n \geq 1$ nezavisne. Pokažite da je ekvivalentno:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty$ g.s.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\mathbb{P}(X_n > 1) + \mathbb{E}(X_n 1_{(X_n \leq 1)})\right] < \infty$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n/(1 + X_n)) < \infty$

Zadatak 3.5. Uz funkciju Ψ definiranu sa

$$\psi(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1, \\ |x|, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Pokažite da za nezavisne $(X_n)_n$ t.d. $\mathbb{E}X_n = 0$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\Psi(X_n) < \infty$, red $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergira g.s.

Zadatak 3.6. Neka je $(X_n)_n$ niz nezavisnih slučajnih varijabli. Pretpostavimo da je $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\,|X_n|^{p(n)} < \infty$ gdje je $0 < p(n) \leq 2$, za svaki n i da je $\mathbb{E}X_n = 0$ kada je $p(n) > 1$. Pokažite da $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergira g.s.

4 Jaki zakon velikih brojeva

Zadatak 4.1. Neka je $(X_n)_n$ nezavisan niz slučajnih varijabli takav da

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -\sqrt{\ln n} & \sqrt{\ln n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Vrijedi li JZVB?

Zadatak 4.2. Neka je $(X_n)_n$ nezavisan niz takav da

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -n\alpha & 0 & n\alpha \\ \frac{1}{2n^2} & 1-\frac{1}{n^2} & \frac{1}{2n^2} \end{pmatrix}.$$

Vrijedi li JZVB?

Zadatak 4.3. Dan je niz nezavisnih slučajnih varijabli $(X_n)_n$ takav da je $X_1 = \pi$ i za $n \geq 2$

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{4n \log n}$$
$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{2n \log n}$$

Vrijedi li slabi zakon velikih brojeva? A jaki zakon?

Zadatak 4.4. Neka su $(X_n)_n$ n.j.d. sl. var. sa konačnim očekivanjem $\mu \neq 0$. Definiramo $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ i $Y_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$. Dokažite da vrijedi

$$\frac{Y_n}{S_n} \xrightarrow{g.s.} 0$$

Zadatak 4.5. Neka su $(X_n)_n$ nezavisne takve da

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}(1 - 2^{-n})$$
$$\mathbb{P}(X_n = -2^n) = \mathbb{P}(X_n = 2^n) = 2^{-n-1}$$

Vrijedi li JZVB?

4.1 Zadaci za vježbu

Zadatak 4.6. Zadovoljavaju li nizovi sl. varijabli u zadacima 2.8 i 2.13 jaki zakon velikih brojeva?

Literatura

[1] I. Biočić. *Teorija vjerojatnosti - vježbe.*
URL: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/tv/vjezbe.pdf.

[2] T. Cacoullos. *Exercises in Probability.* Springer New York, 1988.

[3] Rick Durrett. *Probability: Theory and Examples.* 5. izdanje. Cambridge University Press, 2019.

[4] Geoffrey R. Grimmett i David Stirzaker. *One Thousand Exercises in Probability.* Oxford University Press, 2001.

[5] Allan Gut. *Probability: A Graduate Course.* Springer, 2005.

[6] Z. Ignatov J. Stoyanov I. Mirazchiiski i M. Tanushev. *Exercise Manual in Probability Theory.* Springer Dordrecht, 1988.