Teorija skupova

Treća školska zadaća - 10. siječnja 2023. godine

Zadatak 1 (0.5+3=3.5 boda)**.**

(a) Od sljedeća tri totalno uređena skupa odaberite dva (različita!) skupa koja su slična:

$$(\mathbb{Q}^- \times \mathbb{Q}^+, \prec), \qquad \Big((\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}) \setminus (\{2023\} \times \mathbb{N}), \prec\Big), \qquad \Big(\mathbb{Q}_0^- \times ([0,1] \cap \mathbb{Q}), \prec\Big).$$

(b) Za odabrane skupove dokažite njihovu sličnost!

Napomena: U ovome zadatku $\prec$ je antileksikografski uređaj. Nije dovoljno u rješenju samo napisati da odabrani skup X ima neko svojstvo P - to je potrebno i dokazati!

Rješenje.

(a) Slični skupovi su $(\mathbb{Q}^- \times \mathbb{Q}^+, \prec)$ i $\Big((\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}) \setminus (\{2023\} \times \mathbb{N}), \prec\Big)$.

(b) Koristimo karakterizaciju uređaja racionalnih brojeva koja je istaknuta na vježbama, preciznije:

> Neka je $(A, \sqsubset)$ totalno uređen skup. Ako je A obostrano neograničen, gust u sebi i prebrojiv, tada je $(A, \sqsubset) \simeq (\mathbb{Q}, <)$.

Označimo $A := \mathbb{Q}^- \times \mathbb{Q}^+$, te $B := (\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}) \setminus (\{2023\} \times \mathbb{N})$. Korištenjem navedene karaterizacije pokazat ćemo da vrijedi $(A, \prec) \simeq (\mathbb{Q}, <)$ i $(B, \prec) \simeq (\mathbb{Q}, <)$ (iz čega slijedi $(A, \prec) \simeq (B, \prec)$).

Pokazujemo da je A obostrano neograničen, gust u sebi i prebrojiv (iz čega slijedi $(A, \prec) \simeq (\mathbb{Q}, <)$):

- Uočimo da za svaki $(a, b) \in A$ vrijedi $\left(a, \frac{b}{2}\right) \prec (a, b) \prec (a, 2b)$, te $\left(a, \frac{b}{2}\right), (a, 2b) \in A$. Prema tome A ne može imati ni najmanji ni najveći element, tj. A je obostrano neograničen.
- Neka su $(a, b), (c, d) \in A$ proizvoljni takvi da vrijedi $(a, b) \prec (c, d)$. Tada vrijedi $(a, b) \prec \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right) \prec (c, d)$ i $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right) \in A$. Dakle, A je gust u sebi.
- Vrijedi $k(\mathbb{Q}^- \times \mathbb{Q}^+) = k(\mathbb{Q}^-) \cdot k(\mathbb{Q}^+) = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Dakle, A je prebrojiv.

Pokažimo još da je B obostrano neograničen, gust u sebi i prebrojiv (iz čega slijedi $(B, \prec) \simeq (\mathbb{Q}, <)$):

- Za svaki element $(a,b) \in B$ vrijedi $(a,b-1) \prec (a,b) \prec (c,d)$, pri čemu je: $(c,d) = (a,b+1)$ ako $(a,b) \neq (2023,-1)$, te $(c,d) = (2024,-1)$ u slučaju $(a,b) = (2023,-1)$. Tada vrijedi $(a,b-1),(c,d) \in B$. Prema tome B ne može imati ni najmanji ni najveći element, tj. B je obostrano neograničen.
- Neka su $(a,b),(c,d) \in B$ proizvoljni takvi da vrijedi $(a,b) \prec (c,d)$. Tada (po definiciji od $\prec$) vrijedi $b < d$ ili $(b = d \wedge a < c)$.
  - U slučaju $b < d$ vrijedi $(a,b) \prec (\max\{a+1,2024\},b) \prec (c,d)$ i $(\max\{a+1,2024\},b) \in B$.
  - U slučaju $(b = d \wedge a < c)$ vrijedi: ako $\frac{a+c}{2} \neq 2023$ onda $(a,b) \prec \left(\frac{a+c}{2},b\right) \prec (c,b) = (c,d)$ i $\left(\frac{a+c}{2},d\right) \in B$, a inače $(a,b) \prec \left(\frac{a+3c}{4},b\right) \prec (c,b) = (c,d)$ i $\left(\frac{a+3c}{4},b\right) \in B$.

  U svakom slučaju dobivamo da je B gust u sebi.
- Vrijedi:
$$\mathbb{Q} \times \{-1\} \subseteq \overbrace{(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}) \setminus (\{2023\} \times \mathbb{N})}^{=B} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Z},$$
  iz čega slijedi
$$k(\mathbb{Q}\times\{-1\}) = k(\mathbb{Q})\cdot k(\{-1\}) = \aleph_0 \cdot 1 = \aleph_0 \leq k(B) \leq k(\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}) = k(\mathbb{Q})\cdot k(\mathbb{Z}) = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$
  Slijedi $k(B) = \aleph_0$, tj. B je prebrojiv. ■

Zadatak 2 (2 boda)**.** Neka je $\mathcal{U}$ skup svih otvorenih podskupova od $\mathbb{R}$ koji sadrže 0. Primjerom pokažite da $(\mathcal{U}, \subset)$ nije dobro uređen skup. Postoji li neki beskonačan podskup $\mathcal{V}$ od $\mathcal{U}$ takav da je $(\mathcal{V}, \subset)$ dobro uređen?

Rješenje. Promotrimo skup $\mathcal{O} = \{\langle -1, 2\rangle, < -2, 1\rangle\}$. Budući da $\mathcal{O}$ sadrži otvorene intervale koji sadrže 0, vrijedi da je $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$. Međutim $\langle -1, 2\rangle \not\subset \langle -2, 1\rangle$, jer $\frac{3}{2} \in \langle -1, 2\rangle$ i $\frac{3}{2} \notin \langle -2, 1\rangle$. Također $\langle -2, 1\rangle \not\subset \langle -1, 2\rangle$, jer $\frac{-3}{2} \in \langle -2, 1\rangle$ i $\frac{-3}{2} \notin \langle -1, 2\rangle$. Dakle, elementi skupa $\mathcal{O}$ su neusporedivi pa $\mathcal{O}$ nema najmanji element. Budući da smo pronašli podskup od $\mathcal{U}$ koji nema najmanji element obzirom na inkluziju, zaključujemo da $(\mathcal{U}, \subset)$ nije dobro uređen skup.
Promotrimo skup $\mathcal{V} = \{\langle -1, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Ako za neke $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi $n < m$, tada za proizvoljan $x \in \langle -1, n\rangle$ vrijedi $x < n < m$. Zbog proizvoljnosti od x vrijedi $\langle -1, n\rangle \subseteq \langle -1, m\rangle$, a jer je $n \in \langle -1, m\rangle$ i $n \notin \langle -1, n\rangle$, vrijedi $\langle -1, n\rangle \subset \langle -1, m\rangle$.
S druge strane, pretpostavimo da za $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi $\langle -1, n\rangle \subset \langle -1, m\rangle$. Kada bi vrijedilo $m \leq n$ bilo bi ili da je $n = m$, pa bi bilo $\langle -1, m\rangle = \langle -1, n\rangle$, što znamo da ne vrijedi, ili bi bilo $m < n$. Uvažavajući da je m prirodan broj pa vrijedi $m > -1$, slijedi $m \in \langle -1, n\rangle \subset \langle -1, m\rangle$. Slijedi da je $m < m$. U svakom slučaju, dolazimo do kontradikcije pa zaključujemo da mora biti $n < m$.
Iz upravo dokazanog slijedi da je bijekcija $f : \mathcal{V} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f(\langle -1, n\rangle) = n$ zapravo sličnost pa zaključujemo da je $(\mathcal{V}, \subset)$ dobro uređen skup budući da je sličan sa $(\mathbb{N}, <)$.

Zadatak 3 (1.5 boda)**.** Dokažite da za svaki ordinalni broj β vrijedi

$$1^\beta = 1\,.$$

Rješenje. Tvrdnju dokazujemo transfinitnom idnukcijom.

- Pretpostavimo da je $\beta = 0$, tada iz definicije potenciranja ordinalnih brojeva slijedi

$$1^\beta = 1^0 = 1\,.$$

- Pretpostavimo da za neki ordinal β vrijedi $1^\beta = 1$. Tada koristeći definiciju potenciranja, dobivamo da za njegov sljedbenik β^+ vrijedi

$$1^{\beta^+} = 1^\beta \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1\,.$$

- Pretpostavimo da za granični ordinal β vrijedi da za svaki ordinal $\gamma \in \beta$ vrijedi $1^\gamma = 1$. Ponovno koristimo definiciju potenciranja da zaključimo

$$1^\beta = \sup_{\gamma\in\beta} 1^\gamma = \sup_{\gamma\in\beta} 1 = 1\,.$$

Teorija skupova

Treća školska zadaća - 10. siječnja 2023. godine

Zadatak 1 (0.5+3=3.5 boda)**.**

(a) Od sljedeća tri totalno uređena skupa odaberite dva (različita!) skupa koja su slična:

$$\Big((\,[1,2] \cap \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}_0^+, \prec\Big), \qquad (\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^-, \prec), \qquad \Big((\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}) \setminus (\{1\} \times \mathbb{N}), \prec\Big).$$

(b) Za skupove koje ste odabrali u (a) podzadatku dokažite njihovu sličnost!

Napomena: U ovome zadatku $\prec$ je antileksikografski uređaj. Nije dovoljno u rješenju samo napisati da odabrani skup X ima neko svojstvo P - to je potrebno i dokazati!

Rješenje.

(a) Slični skupovi su $(\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^-, \prec)$ i $\Big((\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}) \setminus (\{1\} \times \mathbb{N}), \prec\Big)$.

(b) Koristimo karakterizaciju uređaja racionalnih brojeva koja je istaknuta na vježbama, preciznije:

> Neka je $(A, \sqsubset)$ totalno uređen skup. Ako je A obostrano neograničen, gust u sebi i prebrojiv, tada je $(A, \sqsubset) \simeq (\mathbb{Q}, <)$.

Označimo $A := \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^-$, te $B := (\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}) \setminus (\{1\} \times \mathbb{N})$. Korištenjem navedene karaterizacije pokazat ćemo da vrijedi $(A, \prec) \simeq (\mathbb{Q}, <)$ i $(B, \prec) \simeq (\mathbb{Q}, <)$ (iz čega slijedi $(A, \prec) \simeq (B, \prec)$).

Pokazujemo da je A obostrano neograničen, gust u sebi i prebrojiv (iz čega slijedi $(A, \prec) \simeq (\mathbb{Q}, <)$):

- Uočimo da za svaki $(a, b) \in A$ vrijedi $\left(a, \frac{b}{2}\right) \prec (a, b) \prec (a, 2b)$, te $\left(a, \frac{b}{2}\right), (a, 2b) \in A$. Prema tome A ne može imati ni najmanji ni najveći element, tj. A je obostrano neograničen.
- Neka su $(a, b), (c, d) \in A$ proizvoljni takvi da vrijedi $(a, b) \prec (c, d)$. Tada vrijedi $(a, b) \prec \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right) \prec (c, d)$ i $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right) \in A$. Dakle, A je gust u sebi.
- Vrijedi $k\,(\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^-) = k(\mathbb{Q}^+) \cdot k(\mathbb{Q}^-) = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Dakle, A je prebrojiv.

Pokažimo još da je B obostrano neograničen, gust u sebi i prebrojiv (iz čega slijedi $(B, \prec) \simeq (\mathbb{Q}, <)$):

- Za svaki element $(a,b) \in B$ vrijedi $(a,b-1) \prec (a,b) \prec (c,d)$, pri čemu je: $(c,d) = (a,b+1)$ ako $(a,b) \neq (1,-1)$, te $(c,d) = (2,-1)$ u slučaju $(a,b) = (1,-1)$. Tada vrijedi $(a,b-1),(c,d) \in B$. Prema tome B ne može imati ni najmanji ni najveći element, tj. B je obostrano neograničen.
- Neka su $(a,b),(c,d) \in B$ proizvoljni takvi da vrijedi $(a,b) \prec (c,d)$. Tada (po definiciji od $\prec$) vrijedi $b < d$ ili $(b = d \wedge a < c)$.
  - U slučaju $b < d$ vrijedi $(a,b) \prec (\max\{a+1,2\},b) \prec (c,d)$ i $(\max\{a+1,2\},b) \in B$.
  - U slučaju $(b = d \wedge a < c)$ vrijedi: ako $\frac{a+c}{2} \neq 1$ onda $(a,b) \prec \left(\frac{a+c}{2},b\right) \prec (c,b) = (c,d)$ i $\left(\frac{a+c}{2},d\right) \in B$, a inače $(a,b) \prec \left(\frac{a+3c}{4},b\right) \prec (c,b) = (c,d)$ i $\left(\frac{a+3c}{4},b\right) \in B$.

  U svakom slučaju dobivamo da je B gust u sebi.
- Vrijedi:
$$\mathbb{Q} \times \{-1\} \subseteq \overbrace{(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}) \setminus (\{1\} \times \mathbb{N})}^{=B} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Z},$$
  iz čega slijedi
$$k(\mathbb{Q}\times\{-1\}) = k(\mathbb{Q})\cdot k(\{-1\}) = \aleph_0\cdot 1 = \aleph_0 \leq k(B) \leq k(\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}) = k(\mathbb{Q})\cdot k(\mathbb{Z}) = \aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0.$$
  Slijedi $k(B) = \aleph_0$, tj. B je prebrojiv. ■

Zadatak 2 (2 boda)**.** Neka je $\mathcal{F}$ skup svih zatvorenih podskupova od $\mathbb{R}$ koji sadrže 0. Primjerom pokažite da $(\mathcal{F}, \subset)$ nije dobro uređen skup. Postoji li neki beskonačan podskup $\mathcal{G}$ od $\mathcal{F}$ takav da je $(\mathcal{G}, \subset)$ dobro uređen?

Rješenje. Promotrimo skup $\mathcal{Z} = \{[-1, 2], [-2, 1]\}$. Budući da $\mathcal{Z}$ sadrži zatvorene intervale koji sadrže 0, vrijedi da je $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{F}$. Međutim $[-1, 2] \not\subset [-2, 1]$, jer $\frac{3}{2} \in [-1, 2]$ i $\frac{3}{2} \notin [-2, 1]$. Također $[-2, 1] \not\subset [-1, 2]$, jer $\frac{-3}{2} \in [-2, 1]$ i $\frac{-3}{2} \notin [-1, 2]$. Dakle, elementi skupa $\mathcal{Z}$ su neusporedivi pa $\mathcal{Z}$ nema najmanji element. Budući da smo pronašli podskup od $\mathcal{F}$ koji nema najmanji element obzirom na inkluziju, zaključujemo da $(\mathcal{F}, \subset)$ nije dobro uređen skup.
Promotrimo skup $\mathcal{G} = \{[-1, n] \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Ako za neke $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi $n < m$, tada za proizvoljan $x \in [-1, n]$ vrijedi $x \leq n < m$. Zbog proizvoljnosti od x vrijedi $[-1, n] \subseteq [-1, m]$, a jer je $m \in [-1, m]$ i $m \notin [-1, n]$, vrijedi $[-1, n] \subset [-1, m]$.
S druge strane, pretpostavimo da za $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi $[-1, n] \subset [-1, m]$. Kada bi vrijedilo $m \leq n$, tada bi za proizvoljan $x \in [-1, m]$ vrijedilo $x \leq m \leq n$. Zbog proizvoljnosti od x bi slijedilo da je $[-1, m] \subseteq [-1, n]$. Međutim znamo da je $[-1, n]$ strogo sadržano u $[-1, m]$ pa smo došli do kontradikcije. Zaključujemo da mora vrijediti $n < m$.
Iz upravo dokazanog slijedi da je bijekcija $f : \mathcal{V} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f(\langle -1, n \rangle) = n$ zapravo sličnost pa zaključujemo da je $(\mathcal{V}, \subset)$ dobro uređen skup budući da je sličan sa $(\mathbb{N}, <)$.

Zadatak 3 (1.5 boda)**.** Dokažite da za svaki ordinalni broj α vrijedi

$$1^\alpha = 1\,.$$

Rješenje. Tvrdnju dokazujemo transfinitnom idnukcijom.

- Pretpostavimo da je $\alpha = 0$, tada iz definicije potenciranja ordinalnih brojeva slijedi

$$1^\alpha = 1^0 = 1\,.$$

- Pretpostavimo da za neki ordinal α vrijedi $1^\alpha = 1$. Tada koristeći definiciju potenciranja, dobivamo da za njegov sljedbenik α^+ vrijedi

$$1^{\alpha^+} = 1^\alpha \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1\,.$$

- Pretpostavimo da za granični ordinal α vrijedi da za svaki ordinal $\gamma \in \alpha$ vrijedi $1^\gamma = 1$. Ponovno koristimo definiciju potenciranja da zaključimo

$$1^\alpha = \sup_{\gamma\in\alpha} 1^\gamma = \sup_{\gamma\in\alpha} 1 = 1\,.$$