Teorija skupova

Treća školska zadaća

13. siječnja 2022.

(1) Za totalno uređen skup $(A, <)$ kažemo da je *lokalno polukonačan* ako vrijedi

$$(\exists c \in \mathbb{N})(\forall a, b \in A)\big(k([a,b]) \leq c \ \vee \ k([a,b]) \geq \aleph_0\big),$$

pri čemu je $[a,b] = \{t \in A \mid a \leq t \leq b\}$.

(a) [2] Dokažite da je lokalna polukonačnost invarijanta sličnosti.

(b) [1] Navedite primjer jednog beskonačnog lokalno polukonačnog totalno uređenog skupa i primjer jednog totalno uređenog skupa koji nije lokalno polukonačan.

(2) [2] Ispitajte koji od skupova

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k, 2k+1], \quad ([0,1] \cup \{2\}) \times \mathbb{Z} \quad \text{i} \quad (\langle 0,1] \cup \{2\}) \times \mathbb{Z}$$

su međusobno slični, a koji nisu. Svoje tvrdnje potkrijepite dokazima.

(3) [2] Dokažite da su svi prebrojivi podskupovi od $\mathbb{R}$ koji su gusti u $\mathbb{R}$ međusobno slični.

(1) (a) Pretp. da je $(A,<)$ lokalno polukonačan TUS, tj. da

$(\exists c \in \mathbb{N})(\forall a,b \in A)(k([a,b]) \leq c \ \vee \ k([a,b]) \geq \aleph_0)$.

Neka je $(B,\prec)$ TUS i $f: A \to B$ sličnost.

Neka su $b_1, b_2 \in B$. Kako je f bijekcija i

$b_1 \prec x \prec b_2 \iff f^{-1}(b_1) < f^{-1}(x) < f^{-1}(b_2)$

imamo $f^{-1}([b_1,b_2]) = [f^{-1}(b_1), f^{-1}(b_2)] \subseteq A$, pa je

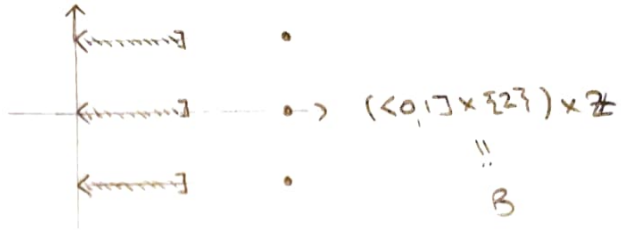
$k([b_1,b_2]) = k([f^{-1}(b_1), f^{-1}(b_2)]) \Rightarrow k([b_1,b_2]) \leq c \ \vee \ k([b_1,b_2]) \geq \aleph_0$.

Dakle, $(B,\prec)$ je lokalno polukonačan.

(b) $(\mathbb{R},<)$ je beskonačan i lok. polukonačan (svaki segment je kardinalnosti $\leq \aleph$ ili c)

$(\mathbb{Z},<)$ nije lok. polukonačan (za svaki $c \in \mathbb{N}$ je $c < k[0,c] = c+1 < \aleph_0$)

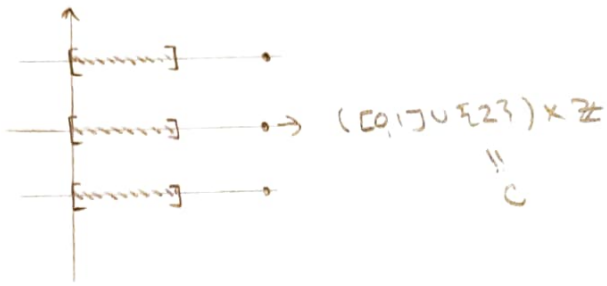
$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k, 2k+1] =: A$$



(2)

$f: A \to B$,

$$f(x) = \begin{cases} (2, k-1), & x = 2k \\ (x - \lfloor x \rfloor, \frac{1}{2}\lfloor x \rfloor), & \text{inače} \end{cases}$$



f je surjekcija ($g: B \to A$,

$$g(x,y) = \begin{cases} 2y + x, & x \in \langle 0,1] \\ 2(y+1), & x = 2 \end{cases}$$

je desni inverz) i f čuva uredaj.

$\Rightarrow \boxed{A \simeq B}$

A i C nisu slični jer u C postoji segment kardinalnosti 3 ($[(1,0),(0,1)] = \{(1,0),(2,0),(0,1)\}$), a u A je svaki segment kardinalnosti ≤ 2 ili C

$\Rightarrow \boxed{A \not\simeq C \ \text{i} \ B \not\simeq C}$

(3) Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ prebrojiv i gust u $\mathbb{R}$. Za $x \in S$ zbog gustoće imamo $(\exists y_1, y_2 \in S)(x-1 < y_1 < x \ \wedge \ x < y_2 < x+1)$

$\Rightarrow$ S je obostrano neograničen

Za proizv. $x, y \in S$ t.d. $x < y$ zbog gustoće od S u $\mathbb{R}$ postoji $z \in S$ t.d. $x < z < y$ $\Rightarrow$ S je gust u sebi

S gust u sebi, obostrano neograničen i prebrojiv $\Rightarrow \boxed{S \simeq \mathbb{Q}}$

Dakle, svi podskupovi od $\mathbb{R}$ koji su prebrojivi i gusti u $\mathbb{R}$ su slični s $\mathbb{Q}$, pa su i međusobno slični.