Teorija skupova

Prva školska zadaća - 27. listopada 2022. godine

Zadatak 1 (2 boda)**.** Dokažite ili opovrgnite:

$$\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq 1} A_{n+k} \subseteq \bigcap_{n>1}\bigcup_{k\geq 1} A_{k^n+2022}.$$

Rješenje. Neka je $x \in \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq 1} A_{n+k}$ proizvoljan. Tada postoji $n_0 \geq 1$ takav da vrijedi

$$(\forall k \geq 1)(x \in A_{n_0+k}). \qquad (\star)$$

Neka je $n > 1$ proizvoljan. Treba naći $k_0 \geq 1$ takav da vrijedi $x \in A_{k_0^n+2022}$. Definiramo $k_0 := n_0$ (tada zbog $n_0 \geq 1$ vrijedi $k_0 \geq 1$). Iz $k_0^n + 2022 = n_0^n + 2022 > n_0^n \geq n_0$ slijedi $k_0^n + 2022 > n_0$, pa postoji $k \geq 1$ takav da vrijedi $k_0^n + 2022 = n_0 + k$. Prema tome vrijedi $A_{k_0^n} + 2022 = A_{n_0+k}$, pa $(\star)$ povlači $x \in A_{k_0^n+2022}$. Dakle, $x \in \bigcap_{n>1}\bigcup_{k\geq 1} A_{k^n+2022}$, tj. vrijedi tvrdnja zadatka.

■

Zadatak 2 (2 boda)**.** Nađite primjer relacije R na skupu $A = \{1, 2, 3, 4\}$ takve da vrijedi $R \cap I_A = \emptyset$ i $R \circ R = I_A$. Može li se relacija s ovim svojstvom naći na skupu $A = \{1, 2, 3\}$? Dokažite svoje tvrdnje!

Rješenje. Definiramo $R := \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$. To je tražena relacija na skupu $A = \{1, 2, 3, 4\}$ za koju vrijedi $R \cap I_A = \emptyset$, te $R \circ R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} = I_A$.

Pretpostavimo da postoji neka relacija R na skupu $A = \{1, 2, 3\}$ s tim svojstvom. Iz $(1, 1) \in I_A = R \circ R$ slijedi da $\exists x(1Rx \wedge xR1)$. Kako je R relacija na A slijedi $x \in A$, pa zbog $R \cap I_A = \emptyset$ vrijedi $x \in \{2, 3\}$. BSO $x = 2$ (slično se dokazuje za $x = 3$). Iz $(3, 3) \in I_A = R \circ R$ slijedi da $\exists y(3Ry \wedge yR3)$. Kao i prije, iz $y \in A$ i $R \cap I_A = \emptyset$ slijedi $y \in \{1, 2\}$. Ako $y = 1$ tada slijedi $3R1$ i $1R2$ pa dobivamo $(3, 2) \in R \circ R = I_A$. Ako pak $y = 2$ tada slijedi $3R2$ i $2R1$ pa dobivamo $(3, 1) \in R \circ R = I_A$. Kako u svakom slučaju dobivamo kontradikciju, zaključujemo da ne postoji tražena relacija na $A = \{1, 2, 3\}$.

■

Zadatak 3 (3 boda)**.** Za relaciju S kažemo da je euklidska ako vrijedi

$$\forall x \forall y \forall z (xSy \wedge xSz \to ySz).$$

Neka je A skup te $R \subseteq A \times A$ proizvoljna relacija. Dokažite da je najmanja relacija koja je refleksivna na A, simetrična i euklidska, te sadrži relaciju R, jednaka $(R \cup R^{-1})^T$.

Rješenje. S vježbi znamo da je za proizvoljnu relaciju $R \subseteq A \times A$ relacija $(R \cup R^{-1})^T$ relacija ekvivalencije na A koja sadrži R. Posebno, to znači da je $(R \cup R^{-1})^T$ refleksivna na A i simetrična, te da sadrži R. Preostaje pokazati da je relacija $(R \cup R^{-1})^T$ euklidska te da je to najmanja relacija s traženim svojstvima.

- Pretpostavimo $x(R \cup R^{-1})^T y$ i $x(R \cup R^{-1})^T z$. Kako je $(R \cup R^{-1})^T$ simetrična, iz posljednjeg slijedi $z(R \cup R^{-1})^T x$. Sada iz toga, $x(R \cup R^{-1})^T y$ i tranzitivnosti relacije $(R \cup R^{-1})^T$ slijedi $y(R \cup R^{-1})^T z$. Dakle, relacija $(R \cup R^{-1})^T$ je euklidska.

- Neka je Q proizvoljna relacija koja je refleksivna na A, simetrična i euklidska takva da vrijedi $R \subseteq Q$.

  Pokažimo prvo da je relacija Q tranzitivna. Neka je xQy i yQz. Iz xQy i simetričnosti relacije Q slijedi yQx. Sada iz yQx, yQz i pretpostavke da je Q euklidska slijedi xQz.

  Dakle, Q je tranzitivna relacija. Kako je još simetrična i refleksivna na A, relacija Q je jedna relacija ekvivalencije na A koja još i sadrži R, a znamo s vježbi da je $(R \cup R^{-1})^T$ najmanja takva, iz čega slijedi $(R \cup R^{-1})^T \subseteq Q$.

■