Teorija skupova

Prva školska zadaća - 25. listopada 2022. godine

Zadatak 1 (2 boda)**.** Neka je zadan neki skup X te nizovi njegovih podskupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ispitajte odnos između skupova $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap B_n \cap C_n)$ i $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n)$.

Rješenje. Neka je $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap B_n \cap C_n)$ proizvoljan. Po definiciji postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $x \in A_n$ i $x \in B_n$ i $x \in C_n$. Budući da je $A_n \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m$, $B_n \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m$ te $C_n \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m$, slijedi da je

$$x \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m \cap \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m \cap \bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m.$$

Zbog proizvoljnosti od x vrijedi $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap B_n \cap C_n) \subseteq \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right)$.

Obratna inkluzija ne vrijedi. Neka je $X = \mathbb{N}$, $A_0 = \{1\}$, $B_0 = \emptyset$, $C_0 = \emptyset$, $A_1 = \emptyset$, $B_1 = \{1\}$, $C_1 = \{1\}$,$A_2 = \emptyset$, $B_2 = \emptyset$, $C_2 = \emptyset$ te $A_n = B_n = C_n = \emptyset$ za sve prirodne brojeve $n \geq 3$. Tada vrijedi $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_m = \{1\}$ pa je

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \{1\}.$$

S druge strane je za svaki $n \in \mathbb{N}$ $A_n \cap B_n \cap C_n = \emptyset$ pa je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap B_n \cap C_n) = \emptyset$. Budući da $\{1\}$ nije podskup $\emptyset$, pokazali smo da općenito ne vrijedi druga inkluzija.

■

Zadatak 2 (2 boda)**.** Zadane su relacije R i P na nekom skupu A. Ispitajte odnos između relacija $(R \circ P)^{-1}$ i $P^{-1} \circ R^{-1}$.

Rješenje. Neka je $(x, z) \in (R \circ P)^{-1}$ proizvoljan. Po definiciji ovo je ekvivalentno sa $(z, x) \in R \circ P$ što je ekvivalentno sa činjenicom da postoji $y \in A$ takav da je $(z, y) \in P$ i $(y, x) \in R$, odnosno da je $(y, z) \in P^{-1}$ i $(x, y) \in R^{-1}$. No prethodno je ekvivalentno sa $(x, z) \in P^{-1} \circ R^{-1}$. Zbog pokazanih ekvivalencija te proizvoljnosti od (x, z), zaključujemo da su relacije $(R \circ P)^{-1}$ i $P^{-1} \circ R^{-1}$ jednake.

■

Zadatak 3 (3 boda)**.** Za konačnu relaciju S na skupu $\mathbb{N}$ kažemo da je **stupolika** ako vrijedi

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} \quad (n,m) \in S \Rightarrow \forall k \in \{0,1,\ldots,m\} \quad (n,k) \in S\ .$$

Nadalje, ako je R proizvoljna konačna relacija na $\mathbb{N}$, promatramo skup

$$R_x = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}\, (n,m) \in R\}$$

te za svaki $n \in R_x$ sa $\overline{n}$ označimo najveći prirodan broj m za koji je $(n,m) \in R$. Pokažite da je sa

$$\bigcup_{n \in R_x} \bigcup_{k=0}^{\overline{n}} \{(n,k)\}$$

dana najmanja stupolika relacija na $\mathbb{N}$ koja sadrži R.

Rješenje. Označimo $S = \bigcup_{n \in R_x} \bigcup_{k=0}^{\overline{n}} \{(n,k)\}$. Dovoljno je pokazati da je S stupolika relacija na $\mathbb{N}$ koja sadrži R te je sadržana u svakoj drugoj stupolikoj relaciji koja sadrži R.

- Budući da je R konačna relacija vrijedi da je skup R_x konačan, a kako je za proizvoljan $n \in R_x$, $\overline{n}$ prirodan broj, to je skup $\{0,1,\ldots,\overline{n}$ također konačan. Slijedi da je S konačan skup kao konačna unija jednočlanih skupova.

  Neka je $(a,b) \in S$ proizvoljan. Neka je $k \in \{0,1,\ldots,b\}$ proizvoljan. Da bi S bila stupolika, dovoljno je pokazati da je $(a,k) \in S$. Međutim jer je $(a,b) \in S$, svakako je $a \in R_x$ pa je $\overline{a}$ dobro definiran te slijedi $k \leq b \leq \overline{a}$ pa je onda $(a,k) \in \bigcup_{j=0}^{\overline{a}} \{(a,j)\} \subseteq S$. Zaključujemo da je S stupolika.

- Neka je $(a,b) \in R$ proizvoljan. Po definiciji vrijedi da je $a \in R_x$ te $b \leq \overline{a}$. Tada slijedi $(a,b) \in \bigcup_{j=0}^{\overline{a}} \{(a,j)\} \subseteq S$.

- Neka je P proizvoljna stupolika relacija koja sadrži R. Neka je $(a,b) \in S$ proizvoljan. Po definiciji od S slijedi $a \in R_x$ pa je $\overline{a}$ dobro definiran te svakako vrijedi $(a,\overline{a}) \in R \subseteq P$ te $b \leq \overline{a}$. Budući da je S stupolika sada slijedi $(a,b) \in P$. Kako je (a,b) bio proizvoljan element iz S, pokazali smo da vrijedi $S \subseteq P$.

■