# Teorija skupova

## Prva školska zadaća

28. listopada 2021.

(1) [2] Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova. Ispitajte odnos skupova

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Big(A_n\setminus\big(\bigcup_{k<n}A_k\big)\Big)\quad\text{i}\quad\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Big(A_n\setminus\big(\bigcap_{k<n}A_k\big)\Big).$$

Navedite dokaze, odnosno kontraprimjere za pojedine inkluzije.

*Rješenje.* Ako je $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\big(A_n\setminus(\bigcap_{k<n}A_k)\big)$, za svaki $n\geq 0$ vrijedi

$$x\in A_n\quad\text{i}\quad x\notin A_0\cap A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}.$$

Posebno, za $n=1$ vrijedi $x\in A_1$ i $x\notin A_0$, tj.

$$x\in A_1\setminus A_0=A_1\setminus\bigcup_{k<1}A_k\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Big(A_n\setminus\big(\bigcup_{k<n}A_k\big)\Big).$$

Dakle, vrijedi $\boxed{\supseteq}$.

Obratno, za skupove $A_1=\{0\}$ i $A_i=\emptyset$, $i\neq 1$ imamo

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Big(A_n\setminus\big(\bigcup_{k<n}A_k\big)\Big)=\{0\}\quad\text{i}\quad\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Big(A_n\setminus\big(\bigcap_{k<n}A_k\big)\Big)=\emptyset,$$

pa ne vrijedi $\boxed{\subseteq}$.

(2) [3] Neka su $R_1$ i $R_2$ relacije ekvivalencije na skupu $A$. Dokažite da je $R_1\cup R_2$ relacija ekvivalencije na $A$ ako i samo ako je $R_1\cup R_2=R_1\circ R_2$.

*Rješenje.*

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka su $R_1$ i $R_2$ relacije ekvivalencije. Tada je

$$R_1=R_1\circ I_A\subseteq R_1\circ R_2$$

i

$$R_2=I_A\circ R_2\subseteq R_1\circ R_2,$$

pa je $R_1\cup R_2\subseteq R_1\circ R_2$. S druge strane, zbog tranzitivnosti od $R_1\cup R_2$ imamo

$$R_1\circ R_2\subseteq(R_1\cup R_2)\circ(R_1\cup R_2)\subseteq R_1\cup R_2,$$

pa je $R_1\cup R_2=R_1\circ R_2$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da je $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$. Na vježbama je pokazano da je unija refleksivnih i simetričnih relacija ponovno refleksivna i simetrična. Pokažimo da je unija tranzitivna. Imamo

$$(R_1 \cup R_2) \circ (R_1 \cup R_2) = \\ (R_1 \circ R_1) \cup (R_1 \circ R_2) \cup (R_2 \circ R_1) \cup (R_2 \circ R_2).$$

Zbog tranzitivnosti od $R_1$ i $R_2$ znamo da su $R_1 \circ R_1$ i $R_2 \circ R_2$ sadržane u $R_1 \cup R_2$. Također, po pretpostavci je $R_1 \circ R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$. Dovoljno je dokazati da je $R_2 \circ R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$. Koristeći simetričnost, dobivamo

$$\begin{aligned} x\,(R_2 \circ R_1)\,y &\Leftrightarrow \exists z(x\,R_1\,z\,R_2\,y) \\ &\Leftrightarrow \exists z(y\,R_2\,z\,R_1\,x) \\ &\Leftrightarrow y\,(R_1 \circ R_2)\,x \end{aligned}$$

pa imamo

$$R_2 \circ R_1 = (R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = R_1 \cup R_2.$$

(3) [2] Neka je $A$ skup i $f : A \to A$ injekcija. Dokažite da je tada funkcija $F : {}^A A \to {}^A A$ definirana formulom $F(g) = g \circ f$ surjekcija.

*Rješenje.* Kako je $f$ injekcija, znamo da njena inverzna relacija ima funkcijsko svojstvo, tj. da je $f^{-1} : \mathrm{rng}(f) \to A$ dobro definirana funkcija za koju vrijedi $f^{-1} \circ f = I_A$.
Neka je $h \in {}^A A$ proizvoljna funkcija. Definiramo $g \in {}^A A$ formulom

$$g(x) = \begin{cases} h(f^{-1}(x)) & , \quad x \in \mathrm{rng}(f) \\ x & , \quad \text{inače.} \end{cases}$$

Sada za proizvoljan $x \in A$ imamo

$$(F(g))(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = h(f^{-1}(f(x))) = h(x).$$

Dakle, $F(g) = h$. Kako je $h$ bila proizvoljna, zaključujemo da je $F$ surjekcija.