Teorija skupova

Prva školska zadaća

26. listopada 2021.

(1) [2] Za proizvoljan niz skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ispitajte odnos među skupovima

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}}(A_0 \cap \ldots \cap A_n) \quad \text{i} \quad \liminf_{n\in\mathbb{N}}(A_0 \cup \ldots \cup A_n).$$

Navedite dokaze, odnosno kontraprimjere za pojedine inkluzije.

Rj. Kako je $x \in \limsup_{n\in\mathbb{N}}(A_0 \cap \ldots \cap A_n)$ ako i samo ako je x u beskonačno skupova $A_0 \cap \ldots \cap A_n$ vidimo da je

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}}(A_0 \cap \ldots \cap A_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Slično, kako je $x \in \liminf_{n\in\mathbb{N}}(A_0 \cup \ldots \cup A_n)$ ako i samo ako je x u svima osim konačno mnogo $A_0 \cup \ldots \cup A_n$, vidimo da je

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}}(A_0 \cup \ldots \cup A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Stoga je očito

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}}(A_0 \cap \ldots \cap A_n) \subseteq \liminf_{n\in\mathbb{N}}(A_0 \cup \ldots \cup A_n).$$

Obrnuta inkluzija ne vrijedi - ako stavimo $A_0 = \emptyset$ i $A_n = \{1\}$, $n \geq 1$ imamo da je lijevi skup prazan, a desni jednak $\{1\}$.

(2) [3] Neka su R_1 i R_2 relacije na skupu A. Dokažite: Ako su R_1 i R_2 simetrične, tada je $(R_1 \circ R_2) \cup (R_2 \circ R_1)$ najmanja simetrična relacija koja sadrži relaciju $R_1 \circ R_2$. Vrijedi li obrat te implikacije? Obrazložite!

Rj. Najmanja simetrična relacija koja sadrži relaciju $R_1 \circ R_2$ je

$$(R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_1 \circ R_2) \cup (R_2^{-1} \circ R_1^{-1}.)$$

Kako su R_1 i R_2 simetrične, vrijedi $R_1 = R_1^{-1}$, $R_2 = R_2^{-1}$. Kada to uvrstimo u gornju jednakost, dobivamo traženu tvrdnju.

Obrat ne vrijedi. Primjerice za $R_1 = \{(1,2)\}$, $R_2 = \emptyset$ vidimo da R_1 nije simetrična, no $(R_1 \circ R_2) \cup (R_2 \circ R_1) = \emptyset$ je najmanja simetrična relacija koja sadrži relaciju $R_1 \circ R_2 = \emptyset$.

(3) [2] Precizno definirajte bijekciju između skupova

$$\mathbb{N}^2 \quad \text{i} \quad \mathbb{N}^2 \setminus \{(n,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

te dokažite da je navedena funkcija bijekcija.

<u>*Rj.*</u> Jedan primjer takve funkcije je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2 \setminus I_{\mathbb{N}}$ definirana s

$$f(m,n) = \begin{cases} (m,n), & m < n \\ (m+1,n), & m \geq n. \end{cases}$$

Očito su restrikcije funkcije na skupove $\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}$ i $\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m \geq n\}$ injekcije, a slike tih skupova po f su disjunktni skupovi $\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\}$ i $\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m > n\}$. Stoga je f injekcija. Surjektivnost od f slijedi iz činjenice

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m < n\} \cup \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m > n\} = \mathbb{N}^2 \setminus I_{\mathbb{N}}.$$