Teorija skupova

PRVA ŠKOLSKA ZADAĆA (GRUPA **A**)

23. ožujka 2010.

[2] 1. Neka su A, B i C skupovi. Odredite odnos među skupovima

$$((A \cap B) \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap C) \qquad \text{i} \qquad (A \cap B) \setminus C\,.$$

[1] 2. Neka je $R = \{(1,2), (2,4), (4,0), (3,5), (5,3)\}$ binarna relacija na skupu $\{0,1,2,3,4,5\}$. Odredite tranzitivno zatvorenje relacije R.

Rješenje:

$$R^+ = \{(1,2), (1,4), (1,0), (2,4), (2,0), (4,0), (3,5), (3,3), (5,3), (5,5)\}$$

[2] 3. Odredite kardinalnost skupa svih konvergentnih redova realnih brojeva kojima je niz članova strogo rastući.

Rješenje: Neka je S skup svih konvergentnih redova realnih brojeva kojima je niz članova strogo rastući. Kako je skup svih redova realnih brojeva u bijekciji sa skupom svih nizova realnih brojeva očito je $k(S) \leqslant k({}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}) = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Promotrimo sada funkciju $f\colon \langle 0,1\rangle \to S$ danu formulom $f(q) := \sum(-q^n)$. Red $\sum(-q^n)$ je konvergentan za svaki $q \in \langle 0,1\rangle$ (jer je geometrijski red konvergentan) i očito ima strogo rastući niz članova. Prema tome, uistinu je $\operatorname{rng}(f) \subseteq S$. Nadalje, neka su $p, q \in \langle 0,1\rangle$ takvi da je $f(p) = f(q)$. Tada moraju i nizovi $n \mapsto -p^n$ i $n \mapsto -q^n$ biti jednaki, pa vidimo da je nužno i $p = q$. Dakle, f je injekcija, a onda imamo $k(S) \geqslant k(\langle 0,1\rangle) = \mathfrak{c}$.

Po Cantor-Schröder-Bernsteinovom teoremu slijedi da je $k(S) = \mathfrak{c}$.

Teorija skupova

PRVA ŠKOLSKA ZADAĆA (GRUPA **B**)

23. ožujka 2010.

[2] 1. Neka su A, B i C skupovi. Odredite odnos među skupovima

$$((A \cup B) \cap C) \setminus (A \cap B) \qquad \text{i} \qquad (B \cap C) \setminus A\,.$$

[1] 2. Neka je $R = \{(4,3), (3,5), (5,0), (1,2), (2,1)\}$ binarna relacija na skupu $\{0,1,2,3,4,5\}$. Odredite tranzitivno zatvorenje relacije R.

Rješenje:

$$R^+ = \{(4,3), (4,5), (4,0), (3,5), (3,0), (5,0), (1,2), (1,1), (2,1), (2,2)\}$$

[2] 3. Odredite kardinalnost skupa svih divergentnih redova realnih brojeva kojima je niz članova strogo padajući.

Rješenje: Neka je S skup svih divergentnih redova realnih brojeva kojima je niz članova strogo padajući. Kako je skup svih redova realnih brojeva u bijekciji sa skupom svih nizova realnih brojeva očito je $k(S) \leqslant k({}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}) = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Promotrimo sada funkciju $f\colon \mathbb{R} \to S$ danu formulom $f(x) := \sum(x-n)$. Red $\sum(x-n)$ je divergentan za svaki $x \in \mathbb{R}$ (jer ne zadovoljava nužan uvjet konvergencije) i očito ima strogo padajući niz članova. Prema tome, uistinu je $\operatorname{rng}(f) \subseteq S$. Nadalje, neka su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $f(x) = f(y)$. Tada moraju i nizovi $n \mapsto x-n$ i $n \mapsto y-n$ biti jednaki, pa vidimo da je nužno i $x = y$. Dakle, f je injekcija, a onda imamo $k(S) \geqslant k(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$.

Po Cantor-Schröder-Bernsteinovom teoremu slijedi da je $k(S) = \mathfrak{c}$.