# Teorija skupova

## Vježbe

Akademska godina 2023./2024.

Zadnja izmjena: 9. listopada 2023.

# Sadržaj

1 Skupovi 3

2 Relacije 7

3 Funkcije 13

4 Kardinalnost 17

5 Parcijalno uređeni skupovi 25

6 Totalno uređeni skupovi 30

7 Dobro uređeni skupovi 34

8 Ordinali 36

9 Zornova lema 46

# 1 Skupovi

Neka su $A$ i $B$ skupovi. Ako je $x$ element skupa $A$ tada to označavamo s $x \in A$. Ako pak $x$ nije element skupa $A$ tada kratko pišemo $x \notin A$. Kažemo da je $A$ **podskup** skupa $B$ i pišemo $A \subseteq B$ ako za svaki $x \in A$ vrijedi $x \in B$. Tada kažemo i da je $B$ **nadskup** skupa $A$, te pišemo $B \supseteq A$. Ako je $A \subseteq B$ i $A \neq B$ tada kažemo da je $A$ **pravi podskup** skupa $B$, odnosno da je $B$ **pravi nadskup** skupa $A$. To označavamo s $A \subsetneq B$, ili s $B \supsetneq A$. Skupovi $A$ i $B$ su jednaki ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. Skup koji nema elemenata nazivamo prazan skup, te ga označavamo s $\emptyset$. Skup svih podskupova skupa $A$ nazivamo **partitivni skup** skupa $A$, te ga označavamo s $\mathscr{P}(A)$.

Za proizvoljne skupove $A$ i $B$ definiramo

- **uređeni par** $(A, B) = \{\{A\}, \{A, B\}\}$;
- **Kartezijev produkt** $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ i } y \in B\}$;
- **presjek** $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$;
- **uniju** $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ili } x \in B\}$;
- **razliku** $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}$;
- **simetričnu razliku** $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
- ako je $A \subseteq B$, **komplement** skupa $A$ (u odnosu na $B$) $A^c = \{x \mid x \in B \text{ i } x \notin A\}$

Za skupove $A$ i $B$ kažemo da su **disjunktni** ako vrijedi $A \cap B = \emptyset$.

Skupovne operacije imaju sljedeća svojstva:

- presjek, unija i simetrična razlika su komutativni i asocijativni;
- presjek je distributivan u odnosu na uniju i simetričnu razliku, unija je distributivna u odnosu na presjek;
- presjek i unija su idempotentni.

Neka je $X$ proizvoljan skup. **Uniju skupa** $X$, odnosno **presjek skupa** $X$, redom definiramo s:

$$\bigcup X = \{x \mid \exists y (x \in y \in X)\} \qquad \text{i} \qquad \bigcap X = \{x \mid (\forall y \in X)(x \in y)\}.$$

**Važna napomena:** u teoriji skupova podrazumijevamo da je nula prirodan broj, tj. uvijek je $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$!

**Zadatak 1.** Neka su $A_1, A_2, \dots, A_n$ skupovi. Dokažite da se skup $A_1 \triangle A_2 \triangle \dots \triangle A_n$ sastoji točno od onih elemenata koji pripadaju $A_i$ za neparno mnogo indeksa $i$.

*Rješenje.* Treba dokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}_+$ vrijedi

$$x \in A_1 \triangle \dots \triangle A_n \quad \text{akko} \quad x \in A_i \text{ za neparno mnogo } i \in \{1, \dots, n\}. \tag{$*$}$$

To ćemo dokazati matematičkom indukcijom.

Baza Kako je $x \in A_i$ za neparno mnogo $i \in \{1\}$ ako i samo ako je $x \in A_1$, tvrdnja očito vrijedi za $n = 1$.

Pretpostavka Pretpostavimo da tvrdnja $(*)$ vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}_+$, tj. da imamo

$$x \in A_1 \triangle \dots \triangle A_k \quad \text{akko} \quad x \in A_i \text{ za neparno mnogo } i \in \{1, \dots, k\}.$$

Korak Treba dokazati da tvrdnja $(*)$ vrijedi za $n = k + 1$. Pretpostavimo da je

$$x \in A_1 \triangle \dots \triangle A_{k+1} = (A_1 \triangle \dots \triangle A_k) \triangle A_{k+1}.$$

Po definiciji simetrične razlike, imamo sljedeća dva slučaja:

1° $x \in A_1 \triangle \dots \triangle A_k$ i $x \notin A_{k+1}$;

2° $x \notin A_1 \triangle \dots \triangle A_k$ i $x \in A_{k+1}$.

U prvom slučaju, iz $x \in A_1 \triangle \dots \triangle A_k$ po pretpostavci slijedi da je $x \in A_i$ za neparno mnogo indeksa $i \in \{1, \dots, k\}$. Kako također vrijedi $x \notin A_{k+1}$, slijedi da je $x \in A_i$ za neparno mnogo indeksa $i \in \{1, \dots, k + 1\}$.

U drugom slučaju, iz $x \notin A_1 \triangle \dots \triangle A_k$ po pretpostavci slijedi $x \in A_i$ za parno mnogo indeksa $i \in \{1, \dots, k\}$. Budući da je $x \in A_{k+1}$, dobivamo da je $x \in A_i$ za neparno mnogo indeksa $i \in \{1, \dots, k + 1\}$.

U oba slučaja samo dobili $x \in A_i$ za neparno mnogo indeksa $i \in \{1, \dots, k + 1\}$. Dakle, dokazali smo smjer $\boxed{\Rightarrow}$. Dokažimo još obrat. Pretpostavimo da je $x \in A_i$ za neparno mnogo indeksa $i \in \{1, \dots, k + 1\}$. Ovismo o tome je li $x \in A_{k+1}$, razlikujemo dva slučaja.

1° $x \in A_{k+1}$. Tada je $x \in A_i$ za parno mnogo indeksa $i \in \{1, \dots, k\}$.

2° $x \notin A_{k+1}$. Tada je $x \in A_i$ za neparno mnogo indeksa $i \in \{1, \dots, k\}$.

Korištenjem pretpostavke u prvom slučaju dobivamo $x \notin A_1 \triangle \dots \triangle A_k$, a u drugom $x \in A_1 \triangle \dots \triangle A_k$. U oba slučaja slijedi $x \in A_1 \triangle \dots \triangle A_{k+1}$, i time je dokaz završen.

**Zadatak 2.** Dokažite da za svake dvije familije skupova $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ i $\{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ vrijedi

$$\Big(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\Big) \cup \Big(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i\Big) \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup B_i),$$

te da jednakost ne mora nužno vrijediti.

*Rješenje.*

$\boxed{\subseteq}$ Pretpostavimo da je $x \in \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i\right)$. Raspisujemo redom definiciju unije i presjeka.

$$\begin{aligned} x \in \Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) \cup \Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \Bigg(x \in \Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big)\Bigg) \text{ ili } \Bigg(x \in \Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i\Big)\Bigg) \\ &\Leftrightarrow \quad ((\forall i \in \mathbb{N})\ x \in A_i) \text{ ili } ((\forall i \in \mathbb{N})\ x \in B_i) \end{aligned}$$

Kako je $A_i \subseteq A_i \cup B_i$ i $B_i \subseteq A_i \cup B_i$ za svaki $i \in \mathbb{N}$, odavde slijedi $(\forall i \in \mathbb{N})\ x \in A_i \cup B_i$, odnosno $x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}}(A_i \cup B_i)$.

$\boxed{\not\supseteq}$ Konstruirajmo protuprimjer za obratnu inkluziju. Želimo $x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}}(A_i \cup B_i)$, dakle $x \in A_i \cup B_i$ za sve $i \in \mathbb{N}$. S druge strane, želimo $x \notin \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i\right)$, dakle $x \notin \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)$ i $x \notin \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i\right)$. To znači da moraju postojati indeksi $m$ i $n$ takvi da je $x \notin A_m$ i $x \notin B_n$. Primjerice, možemo staviti $m = 0$, $n = 1$ i $x = 1$, pa imamo $A_0 = \emptyset$, $B_0 = \{1\}$, $A_1 = \{1\}$, $B_1 = \emptyset$ i $A_i = B_i = \{1\}$ za sve $i \geq 2$. U tom slučaju je

$$\Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) \cup \Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i\Big) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

i

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(A_i \cup B_i) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}}\{1\} = \{1\},$$

pa ne vrijedi $\supseteq$.

**Zadatak 3.** Za niz skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiramo

$$\liminf A_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} A_n \qquad \text{i} \qquad \limsup A_n = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n>m} A_n$$

Dokažite da za sve nizove skupova $(A_n)$ vrijedi $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$.

*Rješenje.* Najprije uočimo da je

$$x \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} A_n \quad \Leftrightarrow \quad (\exists m \in \mathbb{N})\Big(x \in \bigcap_{n>m} A_n\Big) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists m \in \mathbb{N})(\forall n > m)(x \in A_n) \tag{$*$}$$

i

$$x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n>m} A_n \quad \Leftrightarrow \quad (\forall m \in \mathbb{N})\Big(x \in \bigcup_{n>m} A_n\Big) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall m \in \mathbb{N})(\exists n > m)(x \in A_n). \tag{$**$}$$

($x$ je u $\limsup A_n$ akko je u $A_i$ za beskonačno mnogo indeksa $i$, a u $\liminf A_n$ akko je u $A_i$ za sve indekse $i$ osim eventualno konačno mnogo njih.)

Dokažimo zadanu inkluziju. Pretpostavimo da je $x \in \liminf A_n$. Tada prema $(*)$ postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n > m_0$ vrijedi $x \in A_n$.

Da bismo dokazali $x \in \limsup A_n$, prema $(**)$ za svaki $m \in \mathbb{N}$ moramo naći $n_m > m$ takav da je $x \in A_{n_m}$. Neka je $m \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Stavimo $n_m := \max\{m, m_0\} + 1$. Tada je svakako $n_m > m$ i $n_m > m_0$, pa imamo $x \in A_{n_m}$. Dakle, dokazali smo $(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n_m > m)\ x \in A_{n_m}$, odnosno $x \in \limsup A_n$.

**Zadatak 4.** Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova. Ispitajte odnos skupova

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \triangle A_{n+1}) \quad \text{i} \quad \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n}\Big)\triangle\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n+1}\Big).$$

Argumentirajte svoje tvrdnje dokazima, odnosno kontraprimjerima.

*Rješenje.*

$\boxed{\not\subseteq}$ Promotrimo skupove

$$A_0 = \{1\},\ A_1 = \emptyset,\ A_2 = \emptyset,\ A_3 = \{1\},\ A_i = \emptyset \text{ za } i \geq 4.$$

Tada je $A_0\triangle A_1 = \{1\}$, $A_1\triangle A_2 = \emptyset$, $A_2\triangle A_3 = \{1\}$, $A_3\triangle A_4 = \{1\}$ i $A_n\triangle A_{n+1} = \emptyset$ za $n \geq 5$. S druge strane, imamo $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n+1} = \{1\}$. Stoga je

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \triangle A_{n+1}) = \{1\} \quad \text{i} \quad \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n}\Big)\triangle\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n+1}\Big) = \emptyset,$$

pa ne vrijedi $\subseteq$.
(Ideja: ako je $x$ element lijevog skupa, onda je $x \in A_{n_0}\triangle A_{n_0+1}$ za neki $n_0$. Po definiciji simetrične razlike tada je $x$ element točno jednog od skupova $A_{n_0}$ i $A_{n_0+1}$. Znamo da je točno jedan od indeksa $n_0$ i $n_0+1$ paran; pretpostavimo primjerice da je $x$ element skupa s parnim indeksom i nije element skupa s neparnim indeksom. Tada je $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n}$, ali ne možemo zaključiti ništa o pripadnosti skupu $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n+1}$ – znamo samo da $x$ nije element jednog skupa s neparnim indeksom. Moguće je da bude element skupa s neparnim indeksom različitim od $n_0$ i $n_0+1$, pa će u tom slučaju $x$ biti u $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n+1}$ i neće biti u simetričnoj razlici s desne strane.)

$\boxed{\supseteq}$ Pretpostavimo da je $x \in \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n}\Big)\triangle\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n+1}\Big)$. Imamo dva slučaja.

1° $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n}$ i $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n+1}$. Tada je $x \in A_{2n_0}$ za neki $n_0 \in \mathbb{N}$ i nije iz $A_{2n+1}$ ni za koji $n \in \mathbb{N}$. Posebno, $x \notin A_{2n_0+1}$, pa je $x \in A_{2n_0}\triangle A_{2n_0+1} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n\triangle A_{n+1})$.

2° $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n}$ i $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n+1}$. Slično kao u prvom slučaju, slijedi da je $x \in A_{2n_0+1}$ za neki $n_0 \in \mathbb{N}$ i nije iz $A_{2n}$ ni za koji $n \in \mathbb{N}$. Posebno, $x \notin A_{2n_0}$, pa je $x \in A_{2n_0}\triangle A_{2n_0+1} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n\triangle A_{n+1})$.

U oba slučaja smo dobili $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n\triangle A_{n+1})$. Dakle, vrijedi $\supseteq$.

# 2 Relacije

Neka su $A$ i $B$ proizvoljni skupovi. Svaki podskup $R$ od $A \times B$ nazivamo (binarna) **relacija između** $A$ i $B$. Ako je $A = B$, kažemo da je $R$ relacija **na skupu** $A$.
Činjenicu $(x, y) \in R$ zapisujemo i $x\,R\,y$, a $(x, y) \notin R$ zapisujemo i $x \not R\, y$.

Skup $\{x \in A \mid (\exists y \in B)(x\,R\,y)\}$ nazivamo **domena relacije** $R$, te ga označavamo s $\mathrm{dom}(R)$. Slično, skup $\{y \in B \mid (\exists x \in A)(x\,R\,y)\}$ nazivamo **slika relacije** $R$, te ga označavamo s $\mathrm{rng}(R)$.

*Primjer.* Za svaki skup $A$, skup $\{(x, x) \mid x \in A\}$ je jedna relacija na $A$. Tu relaciju označavamo s $I_A$ i zovemo **dijagonala** skupa $A$.

Za proizvoljnu relaciju $R \subseteq A \times B$, relaciju $\{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$ nazivamo **inverzna relacija** od $R$, te je označavamo s $R^{-1}$. Drugim riječima, inverzna relacija je definirana s

$$xR^{-1}y \quad :\Leftrightarrow \quad y\,R\,x.$$

Neka su $R \subseteq A \times B$ i $Q \subseteq B \times C$ proizvoljne relacije. **Kompoziciju relacija** $R$ i $Q$, u oznaci $Q \circ R$, definiramo s

$$Q \circ R = \{(x, z) \mid \text{ postoji } y \in B \text{ takav da } (x, y) \in R \text{ i } (y, z) \in Q\},$$

odnosno

$$x(Q \circ R)z \quad :\Leftrightarrow \quad (\exists y \in B)(x\,R\,y \land y\,Q\,z).$$

Neka je $R$ proizvoljna relacija na skupu $A$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ rekuzivno definiramo relaciju $R^n$ ovako:

$$R^0 = I_A$$
$$R^{n+1} = R \circ R^n.$$

Neka je $R$ proizvoljna relacija (na skupu $A$). Kažemo da je ona:

- **refleksivna** (na $A$), ako $(\forall x \in A)(x\,R\,x)$
- **irefleksivna**, ako $\neg\exists x(x\,R\,x)$
- **simetrična**, ako $\forall x \forall y(x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x)$
- **antisimetrična**, ako $\forall x \forall y(x\,R\,y \land y\,R\,x \Rightarrow x = y)$
- **tranzitivna**, ako $\forall x \forall y \forall z(x\,R\,y \land y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z)$

Za relaciju $R$ kažemo da je **relacija ekvivalencije** ako je refleksivna (na $\mathrm{dom}(R)$), simetrična i tranzitivna. Za $x \in \mathrm{dom}(R)$, skup $\{y \in \mathrm{rng}(R) \mid x\,R\,y\}$ nazivamo **klasa ekvivalencije** elementa $x$ s obzirom na $R$, i označavamo ga s $[x]_R$ (ili samo $[x]$).

Poznato je da za klase ekvivalencije vrijedi

$$x\,R\,y \Leftrightarrow [x]_R = [y]_R \qquad \text{i} \qquad x \not R\, y \Leftrightarrow [x]_R \cap [y]_R = \emptyset,$$

te da klase ekvivalencije tvore particiju od $\mathrm{dom}(R)$.

**Zadatak 1.** Neka su $R_1$, $R_2$ i $R_3$ binarne relacije na skupu $A$. Dokažite da vrijedi

(a) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$

(b) $(R_1 \cup R_2) \circ R_3 = (R_1 \circ R_3) \cup (R_2 \circ R_3)$

i navedite kontraprimjere za obrnute inkluzije, ako postoje.

*Rješenje.*

(a) Neka je $(x, z) \in R_1 \circ (R_2 \cap R_3)$ proizvoljan. Po definiciji kompozicije relacija, tada postoji $y \in A$ takav da je

$$(x, y) \in (R_2 \cap R_3) \quad \text{i} \quad y\,R_1\,z.$$

Iz $(x, y) \in (R_2 \cap R_3)$ slijedi $x\,R_2\,y$ i $x\,R_3\,y$. Sada iz $x\,R_2\,y$ i $y\,R_1\,z$ slijedi $x\,(R_1 \circ R_2)\,z$, te na isti način iz $x\,R_3\,y$ i $y\,R_1\,z$ slijedi $x\,(R_1 \circ R_3)\,z$. Dakle, imamo

$$(x, z) \in (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3).$$

Time smo dokazali da vrijedi $\subseteq$.

Odredimo sada vrijedi li obrnuta inkluzija. Ako je $(x, z) \in (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$, imamo $x\,(R_1 \circ R_2)\,z$ i $x\,(R_1 \circ R_3)\,z$, pa postoje $y_1, y_2 \in A$ takvi da je

$$x\,R_2\,y_1 \quad \text{i} \quad y_1\,R_1\,z$$

te

$$x\,R_3\,y_2 \quad \text{i} \quad y_2\,R_1\,z.$$

No, kako $y_1$ i $y_2$ nisu nužno jednaki, ne znamo postoji li $y$ takav da je $(x, y) \in R_2 \cap R_3$ i $y R_1 z$. Stavimo npr. $x = 0$, $z = 1$, $y_1 = 2$ i $y_2 = 3$. Minimalni primjer takvih relacija je

$$R_1 = \{(2,1),\ (3,1)\}, \qquad R_2 = \{(0,2)\}, \qquad R_3 = \{(0,3)\}.$$

Za tako definirane relacije imamo $R_2 \cap R_3 = \emptyset$, odnosno $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) = \emptyset$. S druge strane, vrijedi $R_1 \circ R_2 = \{(0,1)\}$ i $R_2 \circ R_3 = \{(0,1)\}$, pa je $(R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3) = \{(0,1)\}$. Ovaj primjer pokazuje da $\supseteq$ ne vrijedi.

(b) $\boxed{\text{DZ}}$

**Zadatak 2.** Neka su $R, Q \subseteq A \times B$ proizvoljne relacije. Dokažite da tada vrijedi:

(a) ako $R \subseteq Q$ tada je $R^{-1} \subseteq Q^{-1}$

(b) $(R \cup Q)^{-1} = R^{-1} \cup Q^{-1}$

(c) $(R \cap Q)^{-1} = R^{-1} \cap Q^{-1}$

(d) $(R^{-1})^{-1} = R$

*Rješenje.*

(a) $x\, R^{-1}\, y \;\Leftrightarrow\; y\, R\, x \;\Rightarrow\; y\, Q\, x \;\Leftrightarrow\; x\, Q^{-1}\, y$

(b)

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (R \cup Q)^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad (y, x) \in R \cup Q \\
&\Leftrightarrow \quad y\, R\, x \;\vee\; y\, Q\, x \\
&\Leftrightarrow \quad x\, R^{-1}\, y \;\vee\; x\, Q^{-1}\, y \\
&\Leftrightarrow \quad (x, y) \in R^{-1} \cup Q^{-1}.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (R \cap Q)^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad (y, x) \in R \cap Q \\
&\Leftrightarrow \quad y\, R\, x \;\wedge\; y\, Q\, x \\
&\Leftrightarrow \quad x\, R^{-1}\, y \;\wedge\; x\, Q^{-1}\, y \\
&\Leftrightarrow \quad (x, y) \in R^{-1} \cap Q^{-1}.
\end{aligned}$$

(d) $x\, (R^{-1})^{-1}\, y \;\Leftrightarrow\; y\, R^{-1}\, x \;\Leftrightarrow\; x\, R\, y$

*Napomena.* Lako se vidi (provjerite za vježbu!) da za sve relacije $R$ na $A$ vrijedi $R \circ I_A = I_A \circ R = R$ te da iz $R' \subseteq R$ i $Q' \subseteq Q$ slijedi $R' \circ Q' \subseteq R \circ Q$.

**Zadatak 3.** Neka je $R \subseteq A \times A$ proizvoljna relacija. Dokažite da vrijedi:

(a) relacija $R$ je refleksivna ako i samo ako $I_A \subseteq R$;

(b) relacija $R$ je irefleksivna ako i samo ako $R \cap I_A = \emptyset$;

(c) relacija $R$ je simetrična ako i samo ako $R \subseteq R^{-1}$;

(d) relacija $R$ je antisimetrična ako i samo ako $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$;

(e) relacija $R$ je tranzitivna ako i samo ako $R \circ R \subseteq R$;

(f) relacija $R$ je relacija ekvivalencije ako i samo ako vrijedi $(R \circ R^{-1}) \cup I_A = R$.

*Rješenje.*

Tvrdnje (a), (b), (c) i (d) slijede direktno iz definicija.

(e) $\boxed{\Rightarrow}$ Pretpostavimo da je $R$ tranzitivna. Neka je $(x,y) \in R \circ R$. Tada postoji $z \in A$ takav da je $x\,R\,z$ i $z\,R\,y$. Budući da je $R$ tranzitivna, odavde slijedi $x\,R\,y$. Dakle, vrijedi $R \circ R \subseteq R$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da je $R \circ R \subseteq R$ i dokažimo da je $R$ tranzitivna. Pretpostavimo da vrijedi $x\,R\,y$ i $y\,R\,z$. Tada je $(x,z) \in R \circ R$, pa iz $R \circ R \subseteq R$ slijedi $x\,R\,z$. Dakle, $R$ je tranzitivna.

(f) $\boxed{\Rightarrow}$ Pretpostavimo da je $R$ relacija ekvivalencije. Tada prema (a), (c) i (e) vrijedi $I_A \subseteq R$, $R^2 \subseteq R$ i $R \subseteq R^{-1}$, odakle primjenom zadatka 2.(a) dobivamo $R = R^{-1}$. Sada imamo

$$R = I_A \circ R \subseteq R \circ R = R \circ R^{-1} \subseteq (R \circ R^{-1}) \cup I_A$$

i

$$(R \circ R^{-1}) \cup I_A \subseteq (R \circ R) \cup R = R^2 \cup R \subseteq R \cup R = R.$$

Dakle, vrijedi $(R \circ R^{-1}) \cup I_A = R$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da je $(R \circ R^{-1}) \cup I_A = R$. Tada je $I_A \subseteq R$, pa je $R$ refleksivna. Osim toga, imamo $R^{-1} = I_A \circ R^{-1} \subseteq R \circ R^{-1} \subseteq R$. Odavde slijedi $R \subseteq R^{-1}$, pa je $R$ simetrična. Nadalje, imamo $R \circ R \subseteq R \circ R^{-1} \subseteq R$, pa je $R$ tranzitivna. Dakle, $R$ je relacija ekvivalencije.

*Napomena.* Lako je dokazati da vrijedi $R^{-1} \subseteq R \;\Leftrightarrow\; R \subseteq R^{-1}$, pa koristeći tvrdnju (c) iz prethodnog zadatka dobivamo

$$R \text{ je simetrična} \quad\Leftrightarrow\quad R \subseteq R^{-1} \quad\Leftrightarrow\quad R^{-1} \subseteq R \quad\Leftrightarrow\quad R = R^{-1}.$$

**Zadatak 4.** Neka su $R_1$ i $R_2$ refleksivne relacije. Dokažite da su tada i relacije $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1^{-1}$ i $R_2 \circ R_1$ refleksivne. Vrijede li analogne tvrdnje za simetričnost ili irefleksivnost?

*Rješenje.* Koristimo tvrdnje iz zadatka 3.

Kako su $R_1$ i $R_2$ refleksivne, vrijedi $I_A \subseteq R_1$ i $I_A \subseteq R_2$. Imamo redom

$$\begin{gathered} I_A \subseteq R_1 \subseteq R_1 \cup R_2 \\ I_A \subseteq R_1 \,\wedge\, I_A \subseteq R_2 \quad\Rightarrow\quad I_A \subseteq R_1 \cap R_2 \\ I_A \subseteq R_1 \quad\Rightarrow\quad I_A = I_A^{-1} \subseteq R_1^{-1} \\ I_A = I_A \circ I_A \subseteq R_2 \circ R_1 \end{gathered}$$

Dakle, $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1^{-1}$ i $R_2 \circ R_1$ su refleksivne.

Za simetričnost, zbog $R_1 \subseteq R_1^{-1}$ i $R_2 \subseteq R_2^{-1}$ vrijedi

$$\begin{gathered} R_1 \cup R_2 \subseteq R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = (R_1 \cup R_2)^{-1} \\ R_1 \cap R_2 \subseteq R_1^{-1} \cap R_2^{-1} = (R_1 \cap R_2)^{-1} \\ R_1^{-1} \subseteq (R_1^{-1})^{-1}, \end{gathered}$$

pa su $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ i $R_1^{-1}$ simetrične. No, $R_2 \circ R_1$ nije nužno simetrična. Naime, relacije

$$R_1 := \{(1,2),\ (2,1)\} \quad \text{i} \quad R_2 := \{(1,3),\ (3,1)\}$$

su simetrične, no $R_2 \circ R_1 = \{(2,3)\}$ nije simetrična.

Irefleksivnost: $\boxed{\text{DZ}}$

**Zadatak 5.** Neka je $R \subseteq A \times A$ proizvoljna relacija. Dokažite:

(a) najmanja simetrična relacija koja sadrži relaciju $R$ je $R \cup R^{-1}$;

(b) najmanja refleksivna relacija koja sadrži relaciju $R$ je $R \cup I_A$;

(c) najmanja tranzitivna relacija koja sadrži relaciju $R$ je $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$;

(d) najmanja refleksivna i tranzitivna relacija koja sadrži relaciju $R$ je relacija $\bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$; (tu relaciju zovemo **refleksivno i tranzitivno zatvorenje** od $R$ i označavamo s $R^T$)

(e) najmanja relacija ekvivalencije koja sadrži relaciju $R$ je $(R \cup R^{-1})^T$.

*Rješenje.* Da bismo dokazali da je $Q$ najmanja relacija sa svojstvom P koja sadrži $R$, trebamo dokazati

- $Q$ ima svojstvo P
- $Q$ sadrži $R$
- $Q$ je najmanja takva relacija, tj. svaka relacija sa svojstvom P koja sadrži $R$ sadrži i $Q$.

(a)
- Imamo $R \cup R^{-1} = (R^{-1})^{-1} \cup R^{-1} = (R^{-1} \cup R)^{-1} = (R \cup R^{-1})^{-1}$, dakle $R \cup R^{-1}$ je simetrična.
- Očito vrijedi $R \subseteq R \cup R^{-1}$.
- Pretpostavimo da je $Q$ simetrična relacija koja sadrži $R$, tj. $R \subseteq Q$. Tada je i $R^{-1} \subseteq Q^{-1}$, a kako je $Q$ simetrična, vrijedi $Q^{-1} = Q$, pa imamo $R^{-1} \subseteq Q$. Dakle, $R \cup R^{-1} \subseteq Q$.

Prema tome, $R \cup R^{-1}$ je najmanja simetrična relacija koja sadrži $R$.

(d)
- Imamo $I_A = R^0 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n$, pa je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n$ refleksivna.

  Za tranzitivnost, pretpostavimo da su $(x,y),\ (y,z) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n$. Tada je $(x,y) \in R^k$ i $(y,z) \in R^l$ za neke $k, l \in \mathbb{N}$, pa je $(x,z) \in R^l \circ R^k = R^{l+k} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n$. Dakle, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n$ je tranzitivna.
- Očito je $R = R^1 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n$.
- Pretpostavimo da je $Q$ refleksivna i tranzitivna relacija koja sadrži $R$. Matematičkom indukcijom dokazujemo da $Q$ sadrži $R^n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

  Za $n = 0$ imamo $R^0 = I_A \subseteq Q$ jer je $Q$ po pretpostavci refleksivna.

  Pretpostavimo da je $R^k \in Q$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Kako je $R \subseteq Q$, slijedi $R^{k+1} = R \circ R^k \subseteq Q \circ Q \subseteq Q$, jer je $Q$ tranzitivna.

Dakle, $R^k \subseteq Q$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, pa $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n \subseteq Q$.

Zaključujemo da je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R^n$ najmanja refleksivna i tranzitivna relacija koja sadrži $R$.

(e)
- U prethodnom podzadatku smo pokazali da je refleksivno i tranzitivno zatvorenje bilo koje relacije refleksivno i tranzitivno, pa je stoga $(R\cup R^{-1})^T$ refleksivna i tranzitivna. Pokažimo još da je simetrična. To će lako slijediti ako dokažemo da je $(R\cup R^{-1})^n$ simetrična za svaki $n$. Za $n=0$ i $n=1$ tvrdnja je jasna. Ako je $(x,z) \in (R\cup R^{-1})^n$ za neki $n \geq 2$, po definiciji kompozicije postoji niz $(y_1,\ldots,y_{n-1})$ takav da je

  $$x\,(R\cup R^{-1})\;y_1\;(R\cup R^{-1})\;\ldots\;(R\cup R^{-1})\;y_{n-1}\;(R\cup R^{-1})\;z.$$

  Zbog simetričnosti od $R\cup R^{-1}$ tada imamo

  $$z\,(R\cup R^{-1})\;y_{n-1}\;(R\cup R^{-1})\;\ldots\;(R\cup R^{-1})\;y_1\;(R\cup R^{-1})\;x,$$

  pa je $(z,x) \in (R\cup R^{-1})^n$.

  Dakle, $(R\cup R^{-1})^T$ je relacija ekvivalencije.

- Očito je $R \subseteq (R\cup R^{-1})^1 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(R\cup R^{-1})^n$.

- Pretpostavimo da je $Q$ relacija ekvivalencije koja sadrži $R$. Kako je $Q$ simetrična, prema (a) znamo da je $R\cup R^{-1} \subseteq Q$. Nadalje, $Q$ je refleksivna i tranzitivna relacija koja sadrži $R\cup R^{-1}$, pa prema (d) sadrži i $(R\cup R^{-1})^T$.

Zaključujemo da je $(R\cup R^{-1})^T$ najmanja relacija ekvivalencije koja sadrži $R$.

(b), (c) $\boxed{\text{DZ}}$

# 3 Funkcije

Za relaciju $f$ između skupova $A$ i $B$ kažemo da **ima funkcijsko svojstvo** ako

$$\big(x\, f\, y_1 \;\wedge\; x\, f\, y_2\big) \;\Rightarrow\; y_1 = y_2.$$

Ako uz to vrijedi $\mathrm{dom}(f) = a$, kažemo da je $f$ **funkcija sa** $A$ **u** $B$ i pišemo $f : A \to B$. U tom slučaju $(x, y) \in f$ pišemo $f(x) = y$. Za skup $B$ kažemo da je **kodomena** funkcije $f$.

Kažemo da je $f$:

- **injekcija** ako $f^{-1}$ ima funkcijsko svojstvo, tj. ako

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

- **surjekcija** ako je $\mathrm{rng}(f) = B$, tj. ako

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x))$$

- **bijekcija** ako je injekcija i surjekcija, odnosno ako

$$(\forall y \in B)(\exists! x \in A)(y = f(x)).$$

Skup svih funkcija s $A$ u $B$ označavamo s ${}^{A}B$ ili $B^{A}$.

Neka su $f : A \to B$ i $g : B \to C$ funkcije. Kompozicija $g \circ f$ tih funkcija kao relacija je funkcija s $A$ u $C$ za koju vrijedi $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, za svaki $x \in A$.

**Inverzna funkcija** od $f : A \to B$ je funkcija $g : B \to A$ takva da je $f \circ g = I_B$ i $g \circ f = I_A$. Ako postoji, označava se s $f^{-1}$.

Inverzna funkcija postoji ako i samo ako je $f$ bijekcija i u tom slučaju, ona se podudara s inverznom relacijom od $f$. Injekcije koje nisu surjekcije imaju inverznu relaciju koja je funkcija, no njena domena je pravi podskup kodomene polazne funkcije. Inverzne relacije funkcija koje nisu injekcije nisu funkcije.

**Zadatak 1.** Postoji li bijekcija između $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \setminus \{0\}$?

*Rješenje.* Tvrdimo da je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f(x) = x + 1$ tražena bijekcija. Imamo redom:

- Funkcija je očito dobro definirana: za svaki $x \in \mathbb{N}$, $x + 1$ je prirodan broj veći od nule.

- Ako su $x_1$ i $x_2$ prirodni brojevi takvi da je $x_1 + 1 = x_2 + 1$, onda je $x_1 = x_2$. Dakle, $f$ je injekcija.
- Neka je $y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ proizvoljan. Kako je $y$ veći od nule, znamo da je $x := y - 1$ prirodan broj, i za taj $x$ imamo $f(x) = x + 1 = (y - 1) + 1 = y$. Dakle, $f$ je surjekcija.

Dakle, $f$ je bijekcija između $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

**Zadatak 2.** Postoji li bijekcija između $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i $\mathbb{R}$?

*Rješenje.* S Matematičke analize znamo da je $\mathrm{Tg} = \mathrm{tg}|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}$ bijekcija između $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ i $\mathbb{R}$. Tražimo bijekciju između $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Za $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definiramo

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}, & x = -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\frac{1}{x}+2}, & \frac{1}{x} \in \mathbb{N} \\ x, & \text{inače.} \end{cases}$$

Na ovaj način je dobro definirana funkcija $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Naime, slučajevi su međusobno disjunktni, pa je svakom $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ jednoznačno pridružen $g(x)$. Provjerimo je li $g(x) \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ za svaki $x$. Imamo $1, \frac{1}{2} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Nadalje, ako je $\frac{1}{x} = k \in \mathbb{N}$, onda je $\frac{1}{k+2} \in \langle 0, 1] \subseteq \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Konačno, ako ne vrijedi nijedan od prva tri slučaja, onda je $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i $x \notin \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$, pa je $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Pokažimo da je $g$ injekcija. Neka su $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ takvi da je $g(x_1) = g(x_2)$. Ovisno o tome kako su dobiveni $g(x_1)$ i $g(x_2)$ razlikujemo 16 slučajeva, koje prikazujemo u tablici.

| $g(x_2)$ \ $g(x_1)$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\frac{1}{x_1}+2}$ | $x_1$ |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $x_1 = x_2 = \frac{\pi}{2}$ | $\lightning$ | $\boxed{1}$ | $\boxed{2}$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\lightning$ | $x_1 = x_2 = -\frac{\pi}{2}$ | $\boxed{3}$ | $\boxed{4}$ |
| $\frac{1}{\frac{1}{x_2}+2}$ | $\boxed{1'}$ | $\boxed{3'}$ | $\boxed{5}$ | $\boxed{6}$ |
| $x_2$ | $\boxed{2'}$ | $\boxed{4'}$ | $\boxed{6'}$ | $x_1 = x_2$ |

$\boxed{1}$ Pretpostavimo da je $g(x_2) = 1$ i $g(x_1) = \frac{1}{\frac{1}{x_1}+2}$. Tada iz $g(x_1) = g(x_2)$ slijedi $\frac{1}{\frac{1}{x_1}+2} = 1$, odakle dobivamo $\frac{1}{x_1} + 2 = 1$, odnosno $x_1 = -1$, što nije moguće. Na sličan način dobivamo kontradikciju u slučajevima $\boxed{1'}$, $\boxed{3}$ i $\boxed{3'}$.

$\boxed{2}$ Iz $g(x_1) = g(x_2)$ slijedi $x_1 = 1$, no tada je $\frac{1}{x_1} = 1 \in \mathbb{N}$, pa je $g(x_1) = \frac{1}{\frac{1}{x_1}+2} = \frac{1}{3} \neq 1$. Na sličan način dolazimo do kontradikcije u slučajevima $\boxed{2'}$, $\boxed{4}$ i $\boxed{4'}$.

$\boxed{5}$ Imamo

$$g(x_1) = \frac{1}{\frac{1}{x_1}+2} = \frac{1}{\frac{1}{x_2}+2} = g(x_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x_1}+2 = \frac{1}{x_2}+2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

$\boxed{6}$ Iz $g(x_1) = g(x_2)$ slijedi $x_1 = \frac{1}{\frac{1}{x_2}+2}$, pa je $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} + 2 \in \mathbb{N}$. No, u tom slučaju je $g(x_1) = \frac{1}{\frac{1}{x_1}+2} \neq x_1$. Na sličan način dolazimo do kontradikcije u slučaju $\boxed{6'}$.

U svim slučajevima koji su mogući (tj. koji ne vode na kontradikciju) dobili smo $x_1 = x_2$. Dakle, $g$ je injekcija.

Pokažimo još da je $g$ surjekcija. Neka je $y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ proizvoljan.

1°) Ako je $y = 1$, vrijedi $g(\frac{\pi}{2}) = y$.

2°) Ako je $y = \frac{1}{2}$, vrijedi $g(-\frac{\pi}{2}) = y$.

3°) Ako je $y \neq 1$, $y \neq \frac{1}{2}$ i $\frac{1}{y} \in \mathbb{N}$, imamo $\frac{1}{y} \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$, pa za $x := \frac{1}{\frac{1}{y}-2} \in \langle 0,1] \subseteq \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ imamo $\frac{1}{x} \in \mathbb{N}$ i $g(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}+2} = y$.

4°) Ako je $\frac{1}{y} \notin \mathbb{N}$, za $x := y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \subseteq \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i $g(x) = y$.

Dakle, $g$ je surjekcija.

Konačno, funkcija $(\mathrm{Tg} \circ g) : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ je bijekcija kao kompozicija dviju bijekcija.

**Zadatak 3.** Postoji li bijekcija između $[0,1]$ i $\langle 0,5 \rangle$?

*Rješenje.* Slično kao u prethodnom zadatku, pokazuje se da je funkcija $g : [0,1] \to \langle 0,1 \rangle$ definirana s

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{1}{3}, & x = 1 \\ \frac{1}{\frac{1}{x}+2}, & \frac{1}{x} \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \\ x, & \text{inače} \end{cases}$$

bijekcija. Lako se vidi da je funkcija $f : \langle 0,1 \rangle \to \langle 0,5 \rangle$, $f(x) = 5x$ bijekcija. Stoga je $(f \circ g) : [0,1] \to \langle 0,5 \rangle$ bijekcija.

**Zadatak 4.** Postoji li bijekcija između $\{1,2\}$ i $\{1,2,3\}$?

*Rješenje.* Pretpostavimo da je $f = \{1,2\} \to \{1,2,3\}$ bijekcija. Tada ona ima inverznu funkciju $f^{-1} : \{1,2,3\} \to \{1,2\}$. Označimo

$$a_1 = f^{-1}(1), \quad a_2 = f^{-1}(2) \quad \text{i} \quad a_3 = f^{-1}(3).$$

Kako su $a_1, a_2, a_3 \in \{1,2\}$, prema Dirichletovom principu postoje $a_i$ i $a_j$, $i \neq j$ koji su jednaki, npr. $a_2 = a_3$. No, tada $f^{-1}$ nije injekcija.

**Zadatak 5.** Postoji li skup $X$ takav da postoji surjekcija s $X$ na $\mathscr{P}(X)$?

*Rješenje.* Pretpostavimo da za neki skup $X$ postoji surjekcija $f : X \to \mathscr{P}(X)$. Promatramo skup

$$R = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Kako je $R \in \mathscr{P}(X)$, i $f$ je surjekcija, postoji $r \in X$ takav da je $f(r) = R$. Pretpostavimo da je $r \in R$. Po definiciji skupa $R$ tada imamo $r \notin f(r) = R$, što je u kontradikciji s $r \in R$. No, ako $r \notin R$, tada $r$ nije element svoje slike, pa je $r \in R$ i ponovno dobivamo kontradikciju.

Dakle, ni za jedan skup $X$ ne postoji surjekcija s $X$ na $\mathscr{P}(X)$.

# 4 Kardinalnost

Neka su $A$ i $B$ skupovi. Kažemo da $A$ i $B$ imaju istu **kardinalnost** ili da su $A$ i $B$ **ekvipotentni** ako postoji bijekcija između $A$ i $B$. To označavamo s $k(A) = k(B)$ ili $A \sim B$.

**Teorem 4.1.** *Ekvipotentnost skupova je klasna relacija ekvivalencije, tj. vrijedi*

*(a) za svaki skup $A$ je $A \sim A$;*

*(b) za sve skupove $A$ i $B$ vrijedi $A \sim B \Rightarrow B \sim A$*

*(c) za sve skupove $A$, $B$ i $C$ vrijedi $(A \sim B \wedge B \sim C) \Rightarrow A \sim C$.*

Ako postoji injekcija s $A$ u $B$, pišemo $k(A) \leq k(B)$ ili $A \precsim B$. (Uočimo da ako je $A \subseteq B$, tada vrijedi $k(A) \leq k(B)$ jer je $I_A : A \to B$ injekcija.) Ako je $k(A) \leq k(B)$ i $k(A) \neq k(B)$, pišemo $k(A) < k(B)$.

Iz rješenja zadatka 3.5 slijedi:

**Teorem 4.2** (Cantorov osnovni teorem)**.** *Za svaki skup $A$ vrijedi $k(A) < k(\mathscr{P}(A)$.*

Uvedimo sada neke oznake:

- $k(A) + k(B)$ označava $k((A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}))$
- $k(A) \cdot k(B)$ označava $k(A \times B)$
- $k(A)^{k(B)}$ označava $k({}^A B)$
- $\aleph_0$ označava $k(\mathbb{N})$
- $\mathfrak{c}$ označava $k(\mathbb{R})$

Ako je $A$ skup takav da je $k(A) = \aleph_0$, kažemo da je $A$ **prebrojiv**.

**Teorem 4.3** (Cantor-Schröder-Bernstein)**.** *Ako postoji injekcija s $A$ u $B$ i injekcija s $B$ u $A$, tada postoji bijekcija između $A$ i $B$.*

U gore navedenim oznakama, teorem glasi:

$$(k(A) \leq k(B) \ \wedge \ k(B) \leq k(A)) \ \Rightarrow \ k(A) = k(B) \tag{CSB}$$

Teorem Cantor-Schröder-Bernstein će nam biti jako koristan u zadacima koji slijede i puno ćemo ga koristiti. U daljnjem tekstu ćemo se pozivati na njega kraticom (CSB).

**Zadatak 1.** Odredite kardinalnost skupa svih prirodnih brojeva s neparno mnogo znamenki.

*Rješenje.* Označimo $S := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ima neparno mnogo znamenaka}\}$. Očito je $S \subseteq \mathbb{N}$, pa je $k(S) \leq k(\mathbb{N}) = \aleph_0$.

Promotrimo sada funkciju $f : \mathbb{N} \to S$, $k \mapsto 100^k$. Ona je dobro definirana (tj. kodomena joj je zaista $S$) jer broj $100^k = 10^{2k}$ ima $2k+1$ znamenku. Također, ona je injekcija jer je funkcija $x \mapsto 100^x$ strogo rastuća. Dakle, vrijedi $\aleph_0 = k(\mathbb{N}) \leq k(S)$.

Prema (CSB) slijedi $k(S) = \aleph_0$.

**Zadatak 2.** Dokažite da je Kartezijev produkt dva prebrojiva skupa prebrojiv (odnosno $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$).

*Rješenje.* Dokažimo da je $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

$\boxed{\geq}$ Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(n) = (n, 0)$ je očito dobro definirana injekcija. Dakle, $k(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \geq k(\mathbb{N})$.

$\boxed{\leq}$ Promotrimo funkciju $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(m, n) = 2^m 3^n$. Jasno je da je $g$ dobro definirana. Lako se vidi i da je $g$ injekcija – ako je $m_1 \neq m_2$, možemo pretpostaviti da je npr. $m_1 < m_2$, pa kad bi vrijedilo $g(m_1, n_1) = g(m_2, n_2)$, dijeljenjem s $2^{m_1}$ dobili bismo $3^{n_1} = 2^{m_2 - m_1} 3^{n_2}$, što očito nije istina jer je desna strana parna, a lijeva nije. Dakle, $k(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \leq k(\mathbb{N})$.

Primjenom (CSB) dobivamo $k(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = k(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Kako iz $A_1 \sim B_1$ i $A_2 \sim B_2$ slijedi $A_1 \times A_2 \sim B_1 \times B_2$, zaključujemo da za svaka dva prebrojiva skupa $A$ i $B$ vrijedi $k(A \times B) = \aleph_0$.

Uz ranije uvedene oznake, dokazali smo $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

**Teorem 4.4.** $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

**Teorem 4.5.** *Ako je $f$ funkcija, tada je* $k(\mathrm{rng}(f)) \leq k(\mathrm{dom}(f))$.

*Dokaz.* (*Sami, opcionalno.*) Uočite da je za dokaz nužna upotreba aksioma izbora! □

**Zadatak 3.** Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$, $A$ prebrojiv. Postoji li $x \in \mathbb{R}$ takav da su $A$ i $A + x$ disjunktni?

*Rješenje.* Pretpostavimo da skupovi $A$ i $A + x$ nisu disjunktni za neki $x \in \mathbb{R}$. Tada postoji $a \in A \cap (A + x)$, pa za neke brojeve $a, b \in A$ dobivamo $a = b + x$, odnosno $x = a - b$. Promotrimo skup

$$D := \{a - b \mid a, b \in A\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Kako je $f : A \times A \to D$, $f(a,b) = a - b$ očito surjekcija, prema teoremu 4.5 vrijedi $k(D) \leq k(A \times A)$, pa korištenjem prethodnog zadatka i teorema 4.4 dobivamo $k(D) \leq \aleph_0 < \mathfrak{c}$. Dakle, $D \subsetneq \mathbb{R}$, pa za $x \in \mathbb{R} \setminus D$ vrijedi $A \cap (A + x) = \emptyset$.

**Zadatak 4.** Dokažite da je, za svaki skup $A$, $k({}^A\{0,1\}) = k(\mathscr{P}(A))$.

*Rješenje.* Tvrdimo da je funkcija $F : {}^A\{0,1\} \to \mathscr{P}(A)$ definirana s

$$F(g) = \{x \in A \mid g(x) = 1\}$$

bijekcija. Za svaku funkciju $g : A \to \{0,1\}$ gornjom je formulom (po aksiomu separacije) dobro definiran skup, podskup od $A$. Stoga je $F$ dobro definirana. Zatim, za funkcije $g_1 \neq g_2 : A \to \{0,1\}$ postoji $x \in A$ takav da je $g_1(x) \neq g_2(x)$. BSO možemo pretpostaviti da je $g_1(x) = 0$ i $g_2(x) = 1$. Tada je $x \notin F(g_1)$ i $x \in F(g_2)$, pa je $F(g_1) \neq F(g_2)$. Dakle, $F$ je injekcija.
Neka je $B \subseteq A$ proizvoljan. Promotrimo funkciju $\chi_B : A \to \{0,1\}$,

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B. \end{cases}$$

Za tako definiranu funkciju je

$$F(\chi_B) = \{x \in A \mid \chi_B(x) = 1\} = B.$$

Dakle, $F$ je surjekcija.

*Napomena.* Od sada nadalje koristimo oznake $0 := k(\emptyset)$ i $n := k(\{0,\ldots,n-1\})$ za $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

**Zadatak 5.** Dokažite da je $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

*Rješenje.* Prema prethodnom zadatku, dovoljno je dokazati da je $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$.

$\boxed{\leq}$ Promotrimo funkciju $f : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$,

$$f(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{3^n}.$$

Gornji red sigurno konvergira (po usporednom kriteriju, majoriziran je geometrijskim), pa je funkcija dobro definirana. Pokažimo da je injekcija. Neka su $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{N}$, $A_1 \neq A_2$. Tada postoji $m = \min(A_1 \triangle A_2)$. BSO pretpostavimo da je $m \in A_1 \setminus A_2$. Imamo

$$f(A_1) = \sum_{n \in A_1} \frac{1}{3^n} = \sum_{\substack{n \in A_1 \\ n < m}} \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^m} + \sum_{\substack{n \in A_1 \\ n > m}} \frac{1}{3^n} \geq \sum_{\substack{n \in A_1 \\ n < m}} \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^m}$$

i

$$f(A_2) = \sum_{\substack{n \in A_2 \\ n < m}} \frac{1}{3^n} + \sum_{\substack{n \in A_2 \\ n > m}} \frac{1}{3^n} \leq \sum_{\substack{n \in A_2 \\ n < m}} \frac{1}{3^n} + \sum_{n = m+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{\substack{n \in A_2 \\ n < m}} \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{m+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \sum_{\substack{n \in A_2 \\ n < m}} \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2 \cdot 3^m}.$$

Kako je $\sum_{\substack{n \in A_1 \\ n < m}} \frac{1}{3^n} = \sum_{\substack{n \in A_2 \\ n < m}} \frac{1}{3^n}$ ($m$ je najmanji element simetrične razlike!) i $\frac{1}{3^m} > \frac{1}{2 \cdot 3^m}$, odavde slijedi $f(A_1) > f(A_2)$. Dakle, $f$ je injekcija, odnosno $k(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}$.

$\boxed{\geq}$ Promotrimo funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{Q})$, $g(x) = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}$. Ona je očito dobro definirana; pokažimo da je injekcija. Neka su $x_1 \neq x_2$ realni brojevi, primjerice takvi da je $x_1 < x_2$. Kako je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, postoji $q_0 \in \mathbb{Q}$ takav da je $x_1 < q_0 < x_2$, pa je $q_0 \in g(x_2)$ i $q_0 \notin g(x_1)$. Dakle, $g(x_1) \neq g(x_2)$. Stoga je $k(\mathbb{R}) \leq k(\mathscr{P}(\mathbb{Q})) = 2^{\aleph_0}$.

**Zadatak 6.** Dokažite da je $\aleph_0^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

*Rješenje.*

- Svaka funkcija $\mathbb{R} \to \{0,1\}$ je ujedno i funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{N}$, pa je

$$2^{\mathfrak{c}} = k({}^{\mathbb{R}}\{0,1\}) \leq k({}^{\mathbb{R}}\mathbb{N}) = \aleph_0^{\mathfrak{c}}.$$

- Vrijedi $\mathbb{N} \sim \{0\} \times \mathbb{N} \subseteq \{0,1\} \times \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, odnosno $\aleph_0 = 1 \cdot \aleph_0 \leq 2 \cdot \aleph_0 \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, pa je $2 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

- Uočimo da uređen par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ možemo poistovjetiti s funkcijom $\{0,1\} \to \mathbb{R}$, $0 \mapsto x$, $1 \mapsto y$, pa je

$$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = k({}^{\{0,1\}}\mathbb{R}) = \mathfrak{c}^2 = (2^{\aleph_0})^2.$$

  Nadalje, kako svaku funkciju $\{0,1\} \to {}^{\mathbb{N}}\{0,1\}$, $x \mapsto f_x$ možemo poistovjetiti s funkcijom $\{0,1\} \times \mathbb{N} \to \{0,1\}$, $(x, y) \mapsto f_x(y)$, vrijedi

$$(2^{\aleph_0})^2 = k\left({}^{\{0,1\}}({}^{\aleph_0}\{0,1\})\right) = k\left({}^{\{0,1\}\times\mathbb{N}}\{0,1\}\right) = 2^{2\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

  Dakle, $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

- Budući da je $\aleph_0 < \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}}$, tj. postoji injekcija $f : \mathbb{N} \to {}^{\mathbb{R}}\{0,1\}$, i funkcija ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{N} \to {}^{\mathbb{R}}({}^{\mathbb{R}}\{0,1\})$, $g \mapsto f \circ g$ je injekcija, pa vrijedi $\aleph_0^{\mathfrak{c}} \leq (2^{\mathfrak{c}})^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

**Zadatak 7.** Odredite kardinalnost skupa svih podskupova od $\mathbb{R}$ koji sadrže skup $\mathbb{N}$.

*Rješenje.* Promatramo skup

$$S = \{X \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{N} \subseteq X\}.$$

$\boxed{\leq}$ Očito je $S \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$, pa je $k(S) \leq 2^{\mathfrak{c}}$.

$\boxed{\geq}$ Promotrimo funkciju $F : \mathscr{P}(\langle -\infty, 0\rangle) \to S$, $F(A) = A \cup \mathbb{N}$. Kako je $F(A) \subseteq \mathbb{R}$ i $\mathbb{N} \subseteq F(A)$ za svaki $A \subseteq \langle -\infty, 0\rangle$, funkcija $F$ je dobro definirana (tj. slika joj je zaista podskup od $S$). Pokažimo da je $F$ injekcija: neka su $A_1, A_2 \subseteq \langle -\infty, 0\rangle$, $A_1 \neq A_2$. BSO možemo pretpostaviti da postoji $x \in A_1 \setminus A_2$. Tada je $x \in A_1 \cup \mathbb{N} = F(A_1)$, a zbog $x \in \langle -\infty, 0\rangle$ vrijedi $x \notin \mathbb{N}$, pa je $x \notin A_2 \cup \mathbb{N} = F(A_2)$. Dakle, $F(A_1) \neq F(A_2)$. Zaključujemo da je $F$ injekcija, odnosno $k(S) \geq k(\mathscr{P}(\langle -\infty, 0\rangle)) = 2^{k(\langle -\infty, 0\rangle)} = 2^{\mathfrak{c}}$.

**Zadatak 8.** Odredite kardinalnost skupa svih podskupova od $\mathbb{R}$ ekvipotentnih s $\mathbb{R}$.

*Rješenje.* Promatramo skup

$$S = \{X \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \sim X\}.$$

$\boxed{\leq}$ Očito je $S \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$, pa je $k(S) \leq 2^{\mathfrak{c}}$.

$\boxed{\geq}$ Promotrimo funkciju
$$F : \mathscr{P}(\mathbb{R}_+) \to S, \quad F(A) = \langle -2, -1 \rangle \cup A.$$
Iz
$$\langle -2, -1 \rangle \subseteq F(A) \subseteq \mathbb{R}$$
vidimo da je $F(A)$ ekvipotentan s $\mathbb{R}$, tj. funkcija $F$ je dobro definirana. Pokažimo da je $F$ injekcija: neka su $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}_+$, $A_1 \neq A_2$. BSO možemo pretpostaviti da postoji $x \in A_1 \setminus A_2$. Tada je $x \in \langle -2, -1 \rangle \cup A_1 = F(A_1)$, a zbog $x \in \mathbb{R}_+$ vrijedi $x \notin \langle -2, -1 \rangle$, pa je $x \notin \langle -2, -1 \rangle \cup A_2 = F(A_2)$. Dakle, $F(A_1) \neq F(A_2)$. Zaključujemo da je $F$ injekcija, odnosno $k(S) \geq k(\mathscr{P}(\mathbb{R}_+) = 2^{\mathfrak{c}}$.

**Zadatak 9.** Dokažite da je kardinalnost skupa svih otvorenih podskupova od $\mathbb{R}$ jednaka $\mathfrak{c}$.

*Rješenje.* Promatramo skup $S = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid U \text{ otvoren}\}$. Iz analize je poznato da se svaki otvoren podskup $U_0$ od $\mathbb{R}$ može prikazati kao unija međusobno disjunktnih otvorenih intervala, tj.
$$U_0 = \bigcup_{\alpha \in A} \langle a_\alpha, b_\alpha \rangle$$
za neki skup indeksa $A$, pri čemu je $\langle a_\alpha, b_\alpha \rangle \cap \langle a_\beta, b_\beta \rangle = \emptyset$ za $\alpha \neq \beta$. Kako je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, za svaki $\alpha \in A$ možemo odabrati racionalan broj $q_\alpha \in \langle a_\alpha, b_\alpha \rangle$. (Uočite korištenje aksioma izbora!) Kako su intervali $\langle a_\alpha, b_\alpha \rangle$ međusobno disjunktni, funkcija $A \to \mathbb{Q}$, $\alpha \to q_\alpha$ je injekcija. Dakle, $k(A) \leq \aleph_0$. To znači da možemo pisati i
$$U_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \langle a_n, b_n \rangle.$$
Stoga je funkcija $F : {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R} \to S$,
$$F(x_0, x_1, x_2, \ldots) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \langle x_{2n}, x_{2n+1} \rangle$$
surjekcija. Naime, za $U_0 \in S$ kao gore imamo $U_0 = F(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots)$. Dakle, $k(S) \leq k({}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$.

S druge strane, funkcija $G : \mathbb{R} \to S$, $G(x) = \langle -\infty, x \rangle$ je očito injekcija, pa je $k(S) \geq k(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Dakle, $k(S) = \mathfrak{c}$.

**Zadatak 10.** Dokažite da je kardinalnost skupa svih podskupova od $\mathbb{R}$ koji nisu ni otvoreni ni zatvoreni jednaka $2^{\mathfrak{c}}$.

*Rješenje.* $\boxed{\text{DZ}}$

**Zadatak 11.** Odredite kardinalnost skupa svih surjektivnih nizova cijelih brojeva.

*Rješenje.* Prisjetimo se: formalno, niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u skupu $S$ je funkcija $a : \mathbb{N} \to S$; radi jednostavnijeg zapisa koristimo notaciju $a(n) = a_n$.

Promatramo skup $S = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z} \mid a : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \text{ je surjekcija}\}$.

Očito je $S \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$, pa je $k(S) \leq k({}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}) = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. S druge strane, promotrimo funkciju $F : {}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z} \to S$ definiranu s $a \mapsto F(a)$,

$$(F(a))_n = \begin{cases} -j, & n = 3j \\ a_j, & n = 3j+1 \\ j+1, & n = 3j+2 \end{cases}$$

(tj. $(a_0, a_1, a_2, \ldots) \mapsto (0, a_0, 1, -1, a_1, 2, -2, a_2, \ldots)$). Ta funkcija je očito dobro definirana: svi cijeli brojevi su u slici od $F(a)$ za svaki $a \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$. Također, ona je injekcija: ako je $a \neq b \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n \neq b_n$, a tada je $(F(a))_{3n+1} = a_n \neq b_n = (F(b))_{3n+1}$. Dakle, $\mathfrak{c} = k({}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}) \leq k(S)$. Stoga je $k(S) = \mathfrak{c}$.

**Zadatak 12.** Odredite kardinalnost skupa svih aritmetičkih nizova cijelih brojeva.

*Rješenje.* $\boxed{\text{DZ}}$

**Zadatak 13.** Odredite kardinalnost skupa svih padajućih nizova prirodnih brojeva.

*Napomena.* Uočite da ne promatramo *strogo* padajuće nizove – skup svih strogo padajućih nizova prirodnih brojeva je prazan!

*Rješenje.* Promotrimo najprije skup $\mathbb{N}^+ = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{N}^n$. Odredimo $k(\mathbb{N}^+)$. Očito je $\aleph_0 \leq k(\mathbb{N}^+)$ zbog $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}^+$. Također, znamo da je $\mathbb{N}^k \sim \mathbb{N}$ za svaki $k \geq 1$, pa možemo fiksirati bijekcije $f_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Lako se provjeri da je funkcija $\mathbb{N}^+ \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^k \ni x \mapsto (k, f_k(x))$ injekcija (štoviše, bijekcija!), pa je $k(\mathbb{N}^+) = \aleph_0$.

Neka je $S = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} \mid (\forall n \in \mathbb{N})(a_{n+1} \leq a_n)\}$. Primijetimo da za $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $a_l = a_k$ za svaki $l \geq k$. Označimo najmanji takav $k$ s $k(a)$. Promotrimo funkciju $F : S \to \mathbb{N}^+$, $F(a) = (a_0, a_1, \ldots, a_{k(a)}) \in \mathbb{N}^{k(a)+1}$. To je injekcija: ako je $F(a) = F(b)$, onda je $k(a) = k(b) =: k$ i $a_j = b_j$ za sve $j \leq k$. Kako je $a_j = a_k = b_k = b_j$ za sve $j \geq k$, dobivamo $a = b$. Dakle, $k(S) \leq k(\mathbb{N}^+) = \aleph_0$.

Konačno, funkcija $\mathbb{N} \to S$, $n \mapsto (n, n, n, \ldots)$ je očito injekcija, pa je $\aleph_0 \leq k(S)$. Dakle, $k(S) = \aleph_0$.

**Zadatak 14.** Odredite kardinalnost skupa svih nizova kompleksnih brojeva koji konvergiraju k $1+3i$.

*Rješenje.* Promatramo skup

$$S = \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{C} \mid \lim_{n\to\infty} z_n = 1+3i\}.$$

Očito je $S \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{C}$, pa je $k(S) \leq k(\mathbb{C}) = k(\mathbb{R}^2) = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. S druge strane, funkcija $F : \mathbb{R} \to S$, $f(x) = (x, 1+3i, 1+3i, \ldots)$ je očito dobro definirana injekcija, pa je $\mathfrak{c} \leq k(S)$. Dakle, vrijedi $k(S) = \mathfrak{c}$.

**Zadatak 15.** Odredite kardinalnost skupa svih redova realnih brojeva kojima je suma jednaka 2.

*Rješenje.* Podsjetimo se: red $\sum_n a_n$ je uređen par $((a_n), (s_n))$ niza općih članova $(a_n)$ i niza parcijalnih suma $(s_n)$. Budući da je niz $(s_n)$ jednoznačno određen nizom $(a_n)$ (i obratno), preslikavanje $\sum_n a_n = ((a_n), (s_n)) \mapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je dobro definirana bijekcija između skupa svih nizova i skupa svih redova realnih brojeva.

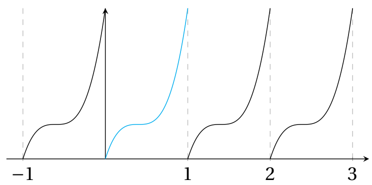
Promatramo skup
$$S = \left\{ \sum_n a_n \text{ red u } \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 2 \right\}.$$
Kako je preslikavanje $S \to {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$, $\sum_n a_n \mapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ injekcija, vrijedi $k(S) \le k({}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}) = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

S druge strane, preslikavanje $\mathbb{R} \to S$ koje realnom broju $x$ pridružuje red s nizom općih članova $(x, -x, 2, 0, 0, \dots)$ je očito dobro definirana injekcija, pa je $\mathfrak{c} \le k(S)$. Dakle, $k(S) = \mathfrak{c}$.

**Zadatak 16.** Odredite kardinalnost skupa svih periodičkih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$.

*Rješenje.* Promatramo skup
$$S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ je periodička}\}.$$
Očito je $S \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, pa je $k(S) \le k({}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}) = 2^{\mathfrak{c}}$.

Da bismo dokazali obratnu nejednakost, promotrimo funkciju $\Phi : {}^{[0,1\rangle}\mathbb{R} \to S$ koja funkciji $g : [0,1\rangle \to \mathbb{R}$ pridružuje funkciju $\Phi(g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu s
$$\Phi(g)(x) = g(x - \lfloor x \rfloor), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
(tj. $\Phi(g)$ je *proširenje po* $1$*-periodičnosti* od $g$).




Jasno, za proizvoljan $g \in {}^{[0,1\rangle}\mathbb{R}$, $\Phi(g)$ je dobro definirana funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Još treba pokazati da je ona element skupa $S$, tj. da je periodička. To slijedi iz činjenice da je funkcija $y \mapsto y - \lfloor y \rfloor$ 1-periodička, pa je i $\Phi(g)(x+1) = g(x+1-\lfloor x+1 \rfloor) = g(x - \lfloor x \rfloor)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dakle, $\Phi$ je dobro definirana fukcija ${}^{[0,1\rangle}\mathbb{R} \to S$. Nadalje, kako je $\Phi(g)|_{[0,1\rangle} = g$, iz $\Phi(g_1) = \Phi(g_2)$ slijedi $g_1 = g_2$, pa zaključujemo da je $\Phi$ injekcija. Stoga je $k(S) \ge k({}^{[0,1\rangle}\mathbb{R}) = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

**Zadatak 17.** Dokažite da je skup svih periodičkih funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ekvipotentan sa skupom svih neperiodičkih funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

*Rješenje.* $\boxed{\text{DZ}}$

**Zadatak 18.** Odredite kardinalnost skupa svih neprekidnih funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

*Rješenje.* Promatramo skup
$$S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ je neprekidna}\}.$$
Pokažimo da je funkcija $\Phi : S \to {}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$, $\Phi(g) = g|_{\mathbb{Q}}$ injekcija. Pretpostavimo da je $\Phi(g_1) = \Phi(g_2)$, tj. $g_1|_{\mathbb{Q}} = g_2|_{\mathbb{Q}}$ za neprekidne funkcije $g_1$ i $g_2$. Tada je $(g_1 - g_2)|_{\mathbb{Q}} = g_1|_{\mathbb{Q}} - g_2|_{\mathbb{Q}} \equiv 0$. Tvrdimo da je $g_1 = g_2$, tj. $g_1 - g_2 \equiv 0$. Pretpostavimo suprotno, da postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $g_1(x_0) - g_2(x_0) \neq 0$. BSO neka je $g_1(x_0) - g_2(x_0) > 0$. Budući da je funkcija $g_1 - g_2$ neprekidna, s MA1 znamo da je ona strogo pozitivna i na nekoj okolini od $x_0$, tj. postoji $\delta > 0$ takav da je $g_1(y) - g_2(y) > 0$ za sve $y \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$. No, kako u tom intervalu postoje racionalni brojevi, to nije moguće. Dakle, $\Phi(g_1) = \Phi(g_2)$ povlači $g_1 = g_2$, ondnosno, $\Phi$ je injekcija. Stoga je $k(S) \le k({}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}) = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Za dokaz obratne nejednakosti, primijetimo da je funkcija $\Psi : \mathbb{R} \to S$, koja svakom realnom broju $x$ pridružuje konstantnu funkciju s vrijednošću $x$, injektivna. Dakle, $\mathfrak{c} \le k(S)$.

**Zadatak 19.** Odredite kardinalnost skupa svih sustava $n$ linearnih jednadžbi s $n$ nepoznanica nad $\mathbb{C}$ koji nemaju rješenja.

*Rješenje.* Neka je $S$ skup svih sustava $n$ linearnih jednadžbi s $n$ nepoznanica nad $\mathbb{C}$ koji nemaju rješenja. Znamo da je svaki $n \times n$ sustav jednoznačno određen proširenom matricom sustava

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \mapsto \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

pa je $k(S) \le k(M_{n,n+1}(\mathbb{C})) = \mathfrak{c}$.
(Formalno, matrica $M \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ je funkcija $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to \mathbb{F}$.)

S druge strane, za svaki $b \in \langle 0, +\infty \rangle$ možemo definirati sustav

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n = b \\ \vdots \\ 0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n = b \end{cases}$$

koji nema rješenja, pa je $k(S) \ge \mathfrak{c}$.

**Zadatak 20.** Odredite kardinalnost skupa svih prebrojivih podskupova od $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.

*Rješenje.* Promatramo skup

$$S = \{A \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid k(A) = \aleph_0\}.$$

Za svaki prebrojiv skup $A \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$ postoji bijekcija $a : \mathbb{N} \to A$, odnosno

$$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathrm{Rng}(a).$$

Funkciju $a$ možemo promatrati i kao injekciju $\mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$, pa vidimo da je svaki $A \in S$ slika neke injekcije $\mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Drugim riječima, funkcija $\Phi : \{a \in {}^{\mathbb{N}}\mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid a \text{ je injekcija}\} \to S$, $\Phi(a) = \mathrm{Rng}(a)$ je surjekcija. Dakle, vrijedi

$$k(S) \le k(\{a \in {}^{\mathbb{N}}\mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid a \text{ je injekcija}\}) \le k({}^{\mathbb{N}}\mathscr{P}(\mathbb{R})) = (2^{\mathfrak{c}})^{\aleph_0} = 2^{\mathfrak{c}}.$$

Da bismo dokazali obratnu nejednakost, promotrimo funkciju $\Psi : \mathscr{P}(\langle -\infty, 0 \rangle) \to S$,

$$\Psi(B) = \{B\} \cup \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{B, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots\}.$$

Jasno je da je $\Psi(B)$ prebrojiv podskup od $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ za svaki $B \subseteq \langle -\infty, 0 \rangle$, pa je $\Psi$ dobro definirana. Preostaje dokazati da je injekcija. Pretpostavimo da je $\Psi(B_1) = \Psi(B_2)$. Imamo

$$\{B_1\} = \Psi(B_1) \setminus \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\} = \Psi(B_2) \setminus \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{B_2\},$$

($B_1$ i $B_2$ sadrže samo negativne brojeve, pa ne mogu biti jednaki nijednom $\{n\}$). Odavde slijedi $B_1 = B_2$. Dakle, $\Psi$ je injekcija, pa je $k(S) \ge k(\mathscr{P}(\langle -\infty, 0 \rangle)) = 2^{\mathfrak{c}}$.

# 5 Parcijalno uređeni skupovi

Za binarnu relaciju $R$ na skupu $A$ kažemo da je **relacija parcijalnog uređaja** ako je irefleksivna i tranzitivna. Za relacije parcijalnog uređaja najčešće koristimo oznake $<$ ili $\prec$. Uređen par $(A,<)$ skupa $A$ i parcijalnog uređaja $<$ na $A$ nazivamo **parcijalno uređen skup (PUS)**. Kad je jasno o kojoj se relaciji $<$ radi, umjesto $(A,<)$ pišemo samo $A$.

*Napomena.* Prisjetimo se: na EM1 relacija parcijalnog uređaja bila je definirana kao refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija. To nije kontradiktorno našoj definiciji. Naime, ako je $<$ parcijalni uređaj na $A$, onda je relacija $\leq := < \cup I_A$ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Takvu relaciju nazivamo **refleksivni parcijalni uređaj**. Vrijedi i obrat: ako je $\leq$ refleksivni parcijalni uređaj, onda je $< := \leq \setminus I_A$ parcijalni uređaj.
Uočimo da je ovdje radi o 1-1 korespondenciji: svaki parcijalni uređaj $<$ jednoznačno određuje refleksivni parcijalni uređaj $\leq$, i obratno.

Lako je provjeriti da je, za parcijalno uređen skup $(A,<)$, $(A,<^{-1})$ također parcijalno uređen skup. Relaciju $<^{-1}$ nazivamo **dualni uređaj** relacije $<$. Za PUS $(A,<^{-1})$ koristimo još i oznake $(A,>)$ i $(A,<)^*$, ili samo $A^*$ ako je jasno o kojoj se relaciji radi.

Neka je $(A,<)$ parcijalno uređen skup i $x \in A$ proizvoljan. Tada skup $\{y \mid y \in A \text{ i } y < x\}$ nazivamo **početni komad** od $x$ u $A$, i označavamo ga s $p_A(x)$.

Za element $x \in A$ kažemo da je:

- **maksimalan** ako ne postoji $y \in A$ tako da vrijedi $x < y$;
- **minimalan** ako ne postoji $y \in A$ tako da vrijedi $y < x$;
- **najveći** ako za sve $y \in A$ vrijedi $y \leq x$;
- **najmanji** ako za sve $y \in A$ vrijedi $x \leq y$.

Neka je $B$ podskup parcijalno uređenog skupa $(A,<)$. Za element $x$ od $A$ kažemo da je:

- **gornja međa** skupa $B$ ako za sve $y \in B$ vrijedi $y \leq x$;
- **donja međa** skupa $B$ ako za sve $y \in B$ vrijedi $x \leq y$;
- **supremum** skupa $B$ ako je $x$ najmanja gornja međa skupa $B$;
- **infimum** skupa $B$ ako je $x$ najveća donja međa skupa $B$.

Za neprazan podskup $B$ parcijalno uređenog skupa $(A,<)$ kažemo da je **ograničen odozgo** (**ograničen odozdo**) u $A$ ako za $B$ postoji gornja (donja) međa u $A$.

Neka su $(A,<)$ i $(B,\prec)$ parcijalno uređeni skupovi. Kažemo da funkcija $f : A \to B$ **čuva uređaj** ako za sve $x, y \in A$ takve da je $x < y$ vrijedi $f(x) \prec f(y)$. Za funkciju $f$ kažemo da je **sličnost** ako je bijekcija, te $f$ i $f^{-1}$ čuvaju uređaj.

Ako između parcijalno uređenih skupova $A$ i $B$ postoji barem jedna funkcija sličnosti, kažemo da su oni **slični** i pišemo $A \simeq B$.

Za neko svojstvo $P$ parcijalno uređenog skupa kažemo da je

- **invarijanta sličnosti** ako za parcijalno uređene skupove $A$ i $B$ vrijedi

$$A \simeq B \implies (P(A) \Leftrightarrow P(B));$$

- **uređajna karakteristika** ako za sve parcijalno uređene skupove $A$ i $B$ vrijedi

$$(P(A) \wedge P(B)) \implies A \simeq B.$$

**Zadatak 1.** Neka je $(S,<)$ parcijalno uređen skup. Dokažite da postoji podskup $\mathscr{S}$ od $\mathscr{P}(S)$ takav da je parcijalno uređen skup $(\mathscr{S},\subset)$ sličan sa $(S,<)$.

*Rješenje.* Promotrimo funkciju $\overline{p}_S : S \to \mathscr{P}(S)$ definiranu s

$$\overline{p}_S(x) := \{x \in S \mid y \le x\} = p_S(x) \cup \{x\}.$$

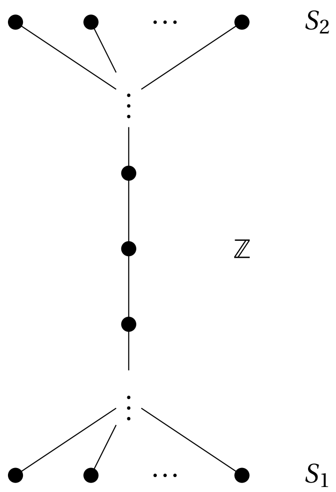
Stavimo $\mathscr{S} := \mathrm{Rng}(\overline{p}_S)$ i tvrdimo da je $\overline{p}_S$ sličnost između $(S,<)$ i $(\mathscr{S},\subset)$.

- Ako je $\overline{p}_S(x) = \overline{p}_S(y)$, imamo $x \in \overline{p}_S(x) = \overline{p}_S(y)$, pa je $x \le y$. Na potpuno jednak način dobivamo $y \le x$, pa iz antisimetričnosti relacije $\le$ slijedi $x = y$. Surjektivnost vrijedi jer smo restringirali kodomenu. Dakle, $\overline{p}_S$ je bijekcija.
- Ako je $x < y$, za svaki $z \in S$ takav da je $z \le x$ zbog tranzitivnosti vrijedi $z \le y$. Stoga je $\overline{p}_S(x) \subseteq \overline{p}_S(y)$. Kako $y \notin \overline{p}_S(x)$, slijedi $\overline{p}_S(x) \subset \overline{p}_S(y)$. Dakle, $\overline{p}_S$ čuva uređaj.
- Ako za $\overline{p}_S(x)$ i $\overline{p}_S(y)$ iz $\mathrm{Rng}(\overline{p}_S)$ vrijedi $\overline{p}_S(x) \subset \overline{p}_S(y)$, imamo $x \in \overline{p}_S(y)$ pa je $x \le y$. Kako vrijedi stroga inkluzija, $x$ i $y$ nisu jednaki, odnosno imamo $x < y$. Dakle, $\overline{p}_S^{-1}$ čuva uređaj.

**Zadatak 2.** Postoji li parcijalno uređen skup s točno $n$ minimalnih i $m$ maksimalnih elemenata, za proizvoljne $m, n \in \mathbb{N}$?

*Rješenje.* Neka su $S_1$ i $S_2$ skupovi takvi da je $k(S_1) = n$ i $k(S_2) = m$ te takvi da su $S_1$, $S_2$ i $\mathbb{Z}$ u parovima disjunktni (npr. odaberemo $S_1 \subseteq \mathbb{R}_- \setminus \mathbb{Z}$ i $S_2 \subseteq \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Z}$ tražene kardinalnosti). Na skupu $A = S_1 \cup S_2 \cup \mathbb{Z}$ definiramo relaciju $\prec$ sa

$$\prec := (S_1 \times S_2) \cup (S_1 \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times S_2) \cup <,$$




pri čemu je $<$ standardni uređaj na $\mathbb{Z}$. (Svi elementi iz $S_1$ su manji od elemenata iz $\mathbb{Z}$ i $S_2$, svi elementi iz $\mathbb{Z}$ su manji od elemenata iz $S_2$ i na $\mathbb{Z}$ vrijedi standardni uređaj.)

Za $\boxed{\text{DZ}}$ provjerite da je to zaista parcijalni uređaj, te da vrijedi

$$x \text{ minimalan } \Leftrightarrow\ x \in S_1 \quad \text{i} \quad x \text{ maksimalan } \Leftrightarrow\ x \in S_2.$$

**Zadatak 3.** Za parcijalno uređen skup $(X, <)$ kažemo da je *pseudorešetka* ako svaki dvočlani podskup od $X$ ima supremum i infimum. Provjerite jesu li sljedeći skupovi pseudorešetke:

(a) $(\mathbb{N}, |)$ ($x \mid y$ znači "$x$ dijeli $y$");

(b) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, R)$, gdje je binarna relacija $R$ definirana sa $(a, b) R (x, y) :\Leftrightarrow (a = x \wedge b \leq y)$;

(c) $(\mathscr{P}(A), \subset)$, gdje je $A$ proizvoljan skup.

*Rješenje.*

(a) S EM1 je poznato da je $(\mathbb{N}, |)$ zaista PUS. Također, on je pseudorešetka, jer za svaki $\{a, b\} \subseteq \mathbb{N}$ imamo $\sup\{a, b\} = \text{nzv}(a, b)$. Zaista, najmanji zajednički višekratnik od $a$ i $b$ je djeljiv s oba broja, pa je gornja međa, te dijeli svaki njihov zajednični višekratnik, pa je *najmanja* gornja međa. Na sličan način vidimo da je $\inf\{a, b\} = \text{nzd}(a, b)$ (najveći zajednički djelitelj).

(b) $\boxed{\text{DZ}}$ Provjeriti da je $R$ parcijalni uređaj.
$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, R)$ nije pseudorešetka. Naime, skup $\{(0, 0), (1, 1)\}$ nema gornju među, pa nema ni supremum: kad bi bilo $(0, 0)\, R\, (x, y)$ i $(1, 1)\, R\, (x, y)$, imali bismo $0 = x$ i $1 = x$, što je nemoguće. (Slično vrijedi i za donju među, odnosno infimum.)

(c) Za bilo koja dva skupa $S$ i $T$ vrijedi $\subset$-$\sup\{S, T\} = S \cup T$ i $\subset$-$\inf\{S, T\} = S \cap T$. Dakle, $(\mathscr{P}(A), \subset)$ je pseudorešetka.

**Zadatak 4.** Dokažite da svaki konačan neprazan parcijalno uređen skup ima minimalan i maksimalan element.

*Rješenje.* Propozicija 2.11. s predavanja.

**Zadatak 5.** Neka su $P$ i $Q$ particije istog skupa $U$. Kažemo da je $P$ *finija* od $Q$, i pišemo $P \preceq Q$, ako za svaki element od $P$ postoji njegov nadskup koji je element od $Q$. Također, definiramo *susret* od $P$ i $Q$, u oznaci $P \wedge Q$, kao $\{A \cap B \mid A \in P \wedge B \in Q\} \setminus \{\emptyset\}$. Dokažite:

(a) $\preceq$ je relacija refleksivnog parcijalnog uređaja na skupu svih particija skupa $U$;

(b) particija $P \wedge Q$ je infimum skupa $\{P, Q\}$ s obzirom na relaciju $\preceq$;

(c) ako su $R$ i $S$ relacije ekvivalencije na $U$, tada je $U_{/R\cap S} = U_{/R} \wedge U_{/S}$.

*Rješenje.*

(a) Neka je $P$ proizvoljna particija od $U$. Tada za svaki element od $P$ postoji element od $P$ koji je njegov nadskup (taj isti), pa je $\preceq$ refleksivna.

Pretpostavimo da je $P \preceq Q$ i $Q \preceq P$ za neke particije $P$ i $Q$ od $U$. Pokažimo $P = Q$. Neka je $A_0 \in P$. Zbog $P \preceq Q$ postoji $B_0 \in Q$ takav da je $A_0 \subseteq B_0$. Zbog $Q \preceq P$, za taj $B_0$ postoji neki $A_1 \in P$ takav da je $B_0 \subseteq A_1$, pa imamo $A_0 \subseteq B_0 \subseteq A_1$. To posebno znači da $A_0$ i $A_1$ imaju neprazan presjek, pa kako su oni elementi iste particije $P$, moraju se podudarati. Stoga imamo $A_0 \subseteq B_0 \subseteq A_0$, odnosno $A_0 = B_0 \in Q$. Dakle, vrijedi $P \subseteq Q$. Na isti način pokazujemo $Q \subseteq P$, pa vidimo da je $\preceq$ simetrična.

Pretpostavimo sada $P \preceq Q \preceq R$ i pokažimo da je $P \preceq R$. Za proizvoljan $A \in P$ postoji $B \in Q$ takav da je $A \subseteq B$. Za taj $B \in Q$ postoji $C \in \mathbb{R}$ takav da je $B \subseteq C$. Sada je $A \subseteq B \subseteq C$, pa imamo element $C$ od $R$ koji je nadskup od $A$. Dakle, vrijedi $P \preceq R$, odnosno $\preceq$ je tranzitivna.

(b) $\boxed{\text{DZ}}$ Pokazati da je $P \wedge Q$ dobro definirana particija od $U$.

Treba pokazati

- $P \wedge Q$ je donja međa skupa $\{P, Q\}$;
- ako je $R$ donja međa skupa $\{P, Q\}$, onda je $R \preceq P \wedge Q$

Proizvoljan element od $P \wedge Q$ je oblika $A \cap B$ za neke $A \in P$ i $B \in Q$. Odmah vidimo $A \cap B \subseteq A$ i $A \cap B \subseteq B$. Dakle, vrijedi $P \wedge Q \preceq P$ i $P \wedge Q \preceq Q$.

Neka je sada $R$ neka particija od $U$ takva da je $R \preceq P$ i $R \preceq Q$. Neka je $A \in R$ proizvoljan. Znamo da postoje $B \in P$ i $C \in Q$ takvi da je $A \subseteq B$ i $A \subseteq C$. Tada je $A \subseteq B \cap C$. Kako je tada posebno $B \cap C$ neprazan, vrijedi $B \cap C \in P \wedge Q$, pa smo za proizvoljan $A \in R$ pronašli element od $P \wedge Q$ koji je njegov nadskup. Dakle, vrijedi $R \preceq P \wedge Q$.

(c) Znamo da je presjek relacija ekvivalencije ponovno relacija ekvivalencije. Za pripadne klase ekvivalencije vrijedi

$$[x]_{R\cap S} = [x]_R \cap [x]_S, \qquad \forall x \in U.$$

Naime, za svaki $y \in U$ imamo

$$\begin{aligned} y \in [x]_{R\cap S} &\Leftrightarrow (x, y) \in R \cap S \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \in S \\ &\Leftrightarrow y \in [x]_R \wedge y \in [x]_S \\ &\Leftrightarrow y \in [x]_R \cap [x]_S. \end{aligned}$$

Sada je jasno da vrijedi $U_{/R\cap S} \preceq U_{/R}$ i $U_{/R\cap S} \preceq U_{/S}$, jer za $[x]_{R\cap S} \in U_{/R\cap S}$ imamo $[x]_{R\cap S} \subseteq [x]_R$ i $[x]_{R\cap S} \subseteq [x]_S$. Dakle, $U_{/R\cap S}$ je donja međa skupa $\{U_{/R}, U_{/S}\}$. Pokažimo da je najveća donja međa. Neka je $\mathscr{O} \preceq U_{/R}$ i $\mathscr{O} \preceq U_{/S}$. Tada za svaki $A \in \mathscr{O}$ postoje klase $[x_1]_R \in U_{/R}$ i $[x_2]_S \in U_{/S}$ takve da vrijedi $A \subseteq [x_1]_R$ i $A \subseteq [x_2]_S$. Tada za $z \in A$ imamo $z \in [x_1]_R \cap [x_2]_S$, odnosno $x_1\ R\ z$ i $x_2\ S\ z$. Tada je $[x_1]_R = [z]_R$ i $[x_2]_S = [z]_S$, pa imamo $A \subseteq [x_1]_R \cap [x_2]_S = [z]_R \cap [z]_S = [z]_{R\cap S} \in U_{/R\cap S}$. Dakle, vrijedi $\mathscr{O} \preceq U_{/R\cap S}$. Prema tome, $U_{/R\cap S}$ je infimum skupa $\{U_{/R}, U_{/S}\}$.

Zbog jedinstvenosti infimuma, prema (b) dijelu zadatka slijedi $U_{/R\cap S} = U_{/R} \wedge U_{/S}$.

# 6 Totalno uređeni skupovi

Za parcijalno uređen skup $(A,<)$ kažemo da je **totalno uređen (TUS)**, ako su svaka dva elementa skupa $A$ usporediva, tj.

$$(\forall x, y \in A)(x < y \vee x = y \vee y < x).$$

U terminima refleksivnog parcijalnog uređaja, gornja formula glasi

$$(\forall x, y \in A)(x \leq y \vee y \leq x).$$

Direktno iz definicije slijedi da se u totalno uređenim skupovima pojmovi minimalnog i najmanjeg, te maksimalnog i najvećeg elementa podudaraju. Prema zadatku 5.4, slijedi da svaki konačan neprazan totalno uređen skup ima najmanji i najveći element.

**Zadatak 1.** Dokažite da svaki niz u totalno uređenom skupu ima monoton podniz.

*Rješenje.* Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u TUS-u $(S,<)$. Promotrimo skup

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid (\forall k > n)(a_k < a_n)\}.$$

Imamo dvije mogućnosti:

- Ako je skup $A$ beskonačan, onda elementi niza s indeksima u $A$ tvore padajući podniz. Zaista, ako su $n_1, n_2 \in A$ takvi da je $n_1 < n_2$, onda je $a_{n_2} < a_{n_1}$.
- Ako je skup $A$ konačan, on je sadržan u skupu $\{0, 1, \dots, d\}$ za neki $d \in \mathbb{N}$. Stavimo $n_0 = d + 1$ Tada $n_0$ nije element skupa $A$, pa postoji indeks $n_1 > n_0$ takav da je $a_{n_0} \leq a_{n_1}$. Zatim, ni $n_1$ nije u skupu $A$, pa postoji indeks $n_2 > n_1$ takav da je $a_{n_1} \leq a_{n_2}$. Na ovaj način možemo induktivno izgraditi (ne nužno strogo) rastući podniz $(a_{n_k})$ od $(a_n)$.

Vidimo da u svakom slučaju postoji monoton podniz od $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Kažemo da je TUS $(A,<)$:

- **početno konačan**, ako je početni komad $p_A(x)$ konačan za svaki $x \in A$
- **obostrano neograničen**, ako je neprazan i nema ni najmanji ni najveći element
- **lokalno konačan**, ako je svaki segment $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ konačan
- **gust u sebi** ako za sve $a, b \in A$ takve da je $a < b$ postoji $c \in A$ za koji vrijedi $a < c < b$; slično, $B \subseteq A$ je **gust** u $A$ ako za sve $a, b \in A$ takve da je $a < b$ postoji $c \in B$ za koji vrijedi $a < c < b$

- **separabilan**, ako postoji prebrojiv podskup od $A$ koji je gust u $A$
- **potpun**, ako svaki neprazan podskup od $A$ omeđen odozgo u $A$ ima supremum u $A$.

**Zadatak 2.** Dokažite da su gore definirana svojstva invarijante sličnosti.

*Rješenje.* $\boxed{\text{DZ}}$

## Uređajne karakterizacije

Neka je $(A,<)$ TUS. Tada je:

- $A \simeq \{0,\dots,n-1\} \Longleftrightarrow k(A)=n$
- $A \simeq \mathbb{N} \Longleftrightarrow$ $A$ je beskonačan i početno konačan
- $A \simeq \mathbb{Z} \Longleftrightarrow$ $A$ je obostrano neograničen i lokalno konačan
- $A \simeq \mathbb{Q} \Longleftrightarrow$ $A$ je obostrano neograničen, gust u sebi i prebrojiv
- $A \simeq \mathbb{R} \Longleftrightarrow$ $A$ je obostrano neograničen, separabilan i potpun.

**Zadatak 3.** Neka je $\prec$ antileksikografski uređaj na $\mathbb{Q}$. Dokažite da je

$$(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q},\prec) \simeq (\mathbb{Q},<).$$

*Rješenje.* Koristimo uređajnu karakterizaciju od $\mathbb{Q}$. Želimo dokazati da je $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q},\prec)$ obostrano neograničen, prebrojiv i gust u sebi. Prebrojivost je jasna. Za neograničenost, uočimo da za svaki $(q,r)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ vrijedi

$$(q,r-1)\prec(q,r)\prec(q,r+1).$$

Pokažimo još da je $(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q},\prec)$ gust u sebi. Neka su $(q_1,r_1),(q_2,r_2)\in\mathbb{Q}$ takvi da je $(q_1,r_1)\prec(q_2,r_2)$. Razlikujemo dva slučaja:

1°) Ako je $r_1<r_2$, onda je $(q_1,r_1)\prec(q_2-1,r_2)\prec(q_2,r_2)$.

2°) Ako je $r_1=r_2$ i $q_1<q_2$, onda zbog gustoće od $\mathbb{Q}$ postoji $s\in\mathbb{Q}$ takav da je $q_1<s<q_2$. Tada je $(q_1,r_1)\prec(s,r_1)\prec(q_2,r_2)$.

**Zadatak 4.** Dokažite da skupovi $[0,1\rangle$ i $\langle 0,1\rangle$ (uz standardni uređaj) nisu slični.

*Rješenje.* Pokažimo da je “imati najmanji element" inavrijanta sličnosti. Kako $[0,1\rangle$ ima najmanji element 0, a $\langle 0,1\rangle$ nema najmanji element, slijedit će da oni ne mogu biti slični.

Pretpostavimo da za TUS-eve $A$ i $B$ vrijedi $A \simeq B$ te da $A$ ima najmanji element $a_0$. Neka je $f : A \to B$ sličnost. Tada je $f(a_0)$ najmanji element u $B$. Naime, kad to ne bi vrijedilo, postojao bi $b \in B$ takav da je $b < f(a_0)$. Kako $f^{-1}$ čuva uređaj, slijedilo bi $f^{-1}(b) < a_0$, što je u kontradikciji s minimalnošću od $a_0$.

**Zadatak 5.** Dokažite da $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ nisu slični uz standardni uređaj. Mogu li se preurediti tako da budu slični?

*Rješenje.* $\boxed{\text{DZ}}$ Uputa: promatrajte gustoću.

**Napomena.** *Za funkciju $f$ između TUS-eva ekvivalentno je:*

- *$f$ je sličnost;*
- *$f$ je surjekcija koja čuva uređaj.*

**Zadatak 6.** Koji su od sljedećih TUS-eva (uz standardni uređaj) međusobno slični?

(a) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \setminus [0,1\rangle$;

(b) $[0,1\rangle$, $[0,+\infty\rangle$ i $\mathbb{Q} \cap [0,1\rangle$;

(c) skup prostih brojeva $\mathbb{P}$, $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}_{\geq 0}$;

(d) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, skup algebarskih brojeva $\mathbb{A}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$?

*Rješenje.*

(a)


Sličnost između $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \setminus [0,1\rangle$ je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus [0,1\rangle$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

(Lako se vidi da je $f$ surjekcija i da čuva uređaj.) $\mathbb{Q}$ ne može biti sličan s $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \setminus [0,1\rangle$ jer im nije ni ekvipotentan.

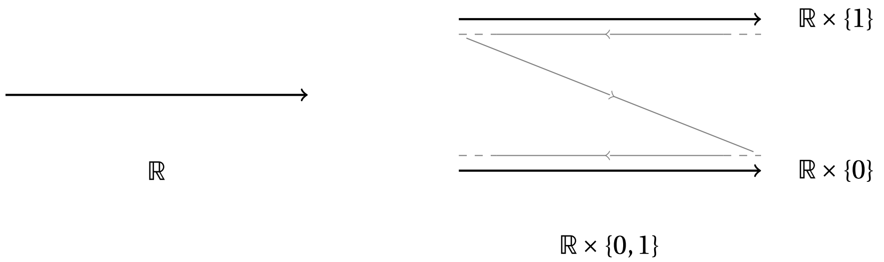
(b) Funkcija $g : [0,1\rangle \to [0,+\infty\rangle$, $g(x) = \frac{x}{1-x}$ je sličnost – lako se vidi da je rastuća, tj. da čuva uređaj, a surjekcija je jer ima desni inverz $y \mapsto \frac{y}{y+1}$. $\mathbb{Q} \cap [0,1\rangle$ ne može biti sličan s $[0,1\rangle$ zbog kardinalnosti.

(c) $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ otpada zbog gustoće – on je gust u sebi, a $\mathbb{P}$ i $\mathbb{N}$ nisu. Zatim, $\mathbb{P}$ je beskonačan i početno konačan, pa je sličan s $\mathbb{N}$.

(d) Skup algebarskih brojeva je prebrojiv, pa kardinalnost eliminira $\mathbb{R}\setminus\mathbb{A}$. Kako je $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{A}\subseteq\mathbb{R}$, vidimo da je $\mathbb{A}$ obostrano neograničen i gust u sebi. Jasno je i da je $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$ obostrano neograničen. Također, lako se vidi i da je $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$ gust u sebi: za $q_1<q_2$ stavimo $p=\frac{q_1+n}{2}$, gdje je $n$ najmanji prirodan broj iz intervala $\langle q_1,q_2\rangle$, i $p=\frac{q_1+q_2}{2}$ ako takav $n$ ne postoji. Tada je $p\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$ i $q_1<p<q_2$. Dakle, $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$ i $\mathbb{A}$ zadovoljavaju uređajnu karatkerizaciju od $\mathbb{Q}$, pa su slični s $\mathbb{Q}$, a onda i međusobno.

**Zadatak 7.** Jesu li skupovi $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}\times\{0,1\}$, uz standardni, odnosno antileksikografski uređaj, slični?

*Rješenje.*




Skupovi nisu slični. Naime, $\mathbb{R}\times\{0,1\}$ nije potpun: skup $\mathbb{R}\times\{0\}=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}\times\{0,1\}$ je neprazan i ograničen odozgo. Skup svih njegovih gornjih međa je $\mathbb{R}\times\{1\}=\{(y,1)\mid y\in\mathbb{R}\}$. (Svaki element tog oblika je očito gornja međa, a nema drugih jer za svaki $(z,0)$ imamo $(z,0)<(z+1,0)\in A$.) Kako skup gornjih međa od $A$ nije ograničen odozdo (jer je $(y-1,1)<(y,1)$), slijedi da $A$ nema supremum.

**Zadatak 8.** Jesu li $\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$, uz antileksikografski uređaj, slični?

*Rješenje.* Svojstvo "postoji prebrojiv segment" je invarijanta sličnosti. ($\boxed{\text{DZ}}$ provjeriti!)

U $\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$ postoji prebrojiv segment: primjerice,

$$[(0,0),(1,0)]=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\}\sim\mathbb{Q}\cap[0,1].$$

S druge strane, svaki segment u $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$ je neprebrojiv. Da bismo to pokazali, odaberimo $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$ takve da je $(x_1,y_1)<(x_2,y_2)$. Ako je $y_1=y_2$, imamo

$$[(x_1,y_1),(x_2,y_2)]\sim[x_1,x_2]\subseteq\mathbb{R},$$

pa je $[(x_1,y_1),(x_2,y_2)]$ neprebrojiv. Ako je $y_1<y_2$, imamo $[(x_1,y_1),(x_1+1,y_1)]\subseteq[(x_1,y_1),(x_2,y_2)]$. Kao gore, vrijedi $[(x_1,y_1),(x_1+1,y_1)]\sim[x_1,x_1+1]$, pa je $[(x_1,y_1),(x_1+1,y_1)]$, a stoga i $[(x_1,y_1),(x_2,y_2)]$, neprebrojiv.

# 7 Dobro uređeni skupovi

Za parcijalno uređen skup $(A, <)$ kažemo da je **dobro uređen** ako svaki neprazan podskup od $A$ ima najmanji element.

Vrijede sljedeće tvrdnje:

1. Dobro uređen skup ne može biti sličan podskupu svog početnog komada.
2. Dva različita početna komada dobro uređenog skupa ne mogu biti slična.
3. Između dva dobro uređena skupa postoji najviše jedna sličnost.

**Teorem 7.1.** *Za dobro uređene skupove $(A, <)$ i $(B, \prec)$ vrijedi točno jedno od sljedećeg:*

- *$A$ i $B$ su slični,*
- *$A$ je sličan nekom (jedinstvenom) početnom komadu od $B$, ili*
- *$B$ je sličan nekom (jedinstvenom) početnom komadu od $A$.*

**Zadatak 1.** Definirajte neki dobar uređaj $\prec$ na skupu $\mathbb{Q}$. Odredite sve sličnosti između $(\mathbb{Q}, \prec)$ i $(\mathbb{Q}, \prec)$.

*Rješenje.* Znamo da je skup $\mathbb{Q}$ prebrojiv. Neka je $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ neka fiksirana bijekcija. Na skupu $\mathbb{Q}$ definiramo uređaj $\prec$ ovako:

$$p \prec q \quad \text{ako i samo ako} \quad f(p) < f(q).$$

Pokažimo da je $\prec$ dobar uređaj na $\mathbb{Q}$. Neka je $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{Q}$. Tada je $f[A]$ neprazan podskup dobro uređenog skupa $\mathbb{N}$, pa ima najmanji element $y_0$. Označimo $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Lako se vidi da je $x_0$ najmanji element skupa $A$: za $a \in A$ vrijedi $y_0 \leq f(a)$, pa po definiciji uređaja $\prec$ imamo $x_0 \preceq a$. Dakle, $(\mathbb{Q}, \prec)$ je dobro uređen.

Budući da je sličnost između dobro uređenih skupova jedinstvena, identiteta je jedina funkcija sličnosti sa skupa $(\mathbb{Q}, \prec)$ na samog sebe.

**Zadatak 2.** Koliko ima sličnosti između

(a) $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}$,

(b) $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$,

(c) $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}$,

(uz pretpostavku standardnih uređaja)?

*Rješenje.*

(a) Kako je $\mathbb{N}$ sa standardnim uređajem dobro uređen skup, znamo da postoji jedinstvena sličnost između $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}$, i to je identiteta.

(b) Budući da $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ nisu slični (na primjer, $\mathbb{N}$ ima najmanji element, a $\mathbb{Z}$ nema), ne postoji nijedna sličnost između $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$.

(c) Može se pokazati da sve takve sličnosti moraju biti translacije, tj. oblika $x \mapsto x+n$ za neki $n \in \mathbb{Z}$. Lako je vidjeti i obrnuto, da sve translacije zaista jesu sličnosti između $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}$ ($x \mapsto x+n$ je bijekcija, s inverznim preslikavanjem $x \mapsto x-n$, te $x < y$ povlači $x+n < y+n$). Stoga je skup svih sličnosti između $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}$ ekvipotentan skupu $\mathbb{Z}$ (svaki $n \in \mathbb{Z}$ jednoznačno određuje sličnost $x \mapsto x+n$).

**Zadatak 3.** Neka je $(S,<)$ totalno uređen skup. Dokažite da je $S$ konačan ako i samo ako su $(S,<)$ i $(S,>)$ dobro uređeni skupovi.

*Rješenje.*

$\boxed{\Rightarrow}$ Ako je $(S,<)$ konačan, svaki njegov neprazan podskup je konačan, pa iz zadatka 5.4 (i činenice da je uređaj totalan) slijedi da ima najmanji i najveći element. To znači da su i $(S,<)$ i $(S,>)$ dobro uređeni.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da je $S$ beskonačan, i da je dobro uređen relacijom $<$. Dokažimo da ne može biti dobro uređen i relacijom $>$. Definirajmo niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $S$ induktivno pomoću

$$x_n := \min(S \setminus \{x_0, \ldots, x_{n-1}\})$$

(kako je $S$ beskonačan, uvijek tražimo najmanji element nepraznog podskupa od $S$). Iz definicije niza vidimo da je $x_{n+1} > x_n$ (usporedivi su jer je $S$ totalno uređen, jednaki nisu jer je $x_n$ izbačen iz skupa čiji minimum je $x_{n+1}$, a $x_{n+1} < x_n$ bi bila kontradikcija s minimalnošću od $x_n$ u skupu iz kojeg još nije izbačen $x_{n+1}$). To znači da neprazan podskup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq S$ ne može imati najveći ($>$-najmanji) element, pa $>$ ne može biti dobar uređaj na $S$.

**Zadatak 4.** Dokažite da je svaki podskup od $\mathbb{R}$, koji je dobro uređen restrikcijom standardnog uređaja $<$, konačan ili prebrojiv.

*Rješenje.* Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$, takav da je $(A,<)$ dobro uređen skup. Tada svaki element $a \in A$, osim eventualno najvećeg, ima neposrednog sljedbenika $a^+$ ($a^+ = \min\{b \in A \mid a < b\}$). Kako je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, znamo da postoji racionalni broj u intervalu $\langle a, a^+\rangle_{\mathbb{R}}$. Fiksirajmo neki takav i označimo ga s $f(a)$.

Označimo s $A'$ skup $A$ bez eventualnog najvećeg elementa (ako postoji). Očito je $k(A) \leq k(A')+1$. Gore definirano preslikavanje $f$ je strogo rastuća funkcija sa $A'$ u $\mathbb{Q}$: ako je $a < b$ u $A'$, tada je $f(a) < a^+ \leq b < f(b)$. To znači da je $f$ injekcija, pa je $k(A') \leq k(\mathbb{Q}) = \aleph_0$. No tada je i $k(A) \leq k(A')+1 \leq \aleph_0 + 1 = \aleph_0$, pa je $A$ konačan ili prebrojiv.

# 8 Ordinali

Za skup $A$ kažemo da je **tranzitivan** ako $x \in y \in A$ povlači $x \in A$. Ekvivalentno, $A$ je tranzitivan ako $x \in A$ povlači $x \subseteq A$.

Kažemo da je $A$ **ordinal** ako je $A$ tranzitivan i totalno uređen relacijom $\in$.

Za ordinale vrijedi:

1. Ako je $\alpha$ ordinal i $\beta \in \alpha$, onda je i $\beta$ ordinal i vrijedi $p_\alpha(\beta) = \beta$.

2. Za svaka dva ordinala $\alpha$ i $\beta$ vrijedi točno jedno od: $\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$ ili $\beta \in \alpha$.

3. Svaki tranzitivan skup ordinala je ordinal.

4. Klasa **On** svih ordinala je dobro uređena relacijom $\in$ (ekvivalentno, $\subset$).

5. Ako je $\alpha$ ordinal, onda je i $\alpha^+ := \alpha \cup \{\alpha\}$ (**sljedbenik od** $\alpha$) ordinal.

6. Unija svakog skupa ordinala je ordinal. Presjek svake neprazne klase ordinala je ordinal.

Kažemo da je ordinal $\alpha$ **sljedbenik** ako postoji ordinal $\beta$ takav da je $\alpha = \beta^+$. Kažemo da je **granični** ako je različit od nule i nije sljedbenik.

Za ordinal $\alpha$ vrijedi:

- $\alpha$ je granični ili 0 ako i samo ako je $\alpha = \sup \alpha$ $(= \bigcup \alpha)$,

- $\alpha$ je sljedbenik ako i samo ako je $\alpha = (\sup \alpha)^+$.

Za dokazivanje svojstava ordinalnih brojeva koristit ćemo **princip transfinitne indukcije**.

**Teorem 8.1** (Stroga transfinitna indukcija)**.** *Neka je* $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{On}$ *proizvoljna klasa ordinala takva da* $\alpha \subseteq \mathbf{B}$ *povlači* $\alpha \in \mathbf{B}$ *(za sve ordinale* $\alpha$*). Tada je* $\mathbf{B} = \mathbf{On}$.

Gornji teorem najčešće koristimo u sljedećem obliku:

**Teorem 8.2** (Transfinitna indukcija)**.** *Neka je* $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{On}$. *Ako* $\mathbf{B}$ *ima sljedeća tri svojstva:*

- $0 \in \mathbf{B}$,

- *za svaki ordinal* $\alpha$, $\alpha \in \mathbf{B}$ *povlači* $\alpha^+ \in \mathbf{B}$, *te*

- *za svaki granični ordinal* $\gamma$, $\gamma \subseteq \mathbf{B}$ *povlači* $\gamma \in \mathbf{B}$,

*tada je* $\mathbf{B} = \mathbf{On}$.

## Aritmetika ordinala

Nije teško provjeriti da za sve ordinale $\alpha$ i $\beta$ vrijedi

(i) $\neg(\alpha < 0)$

(ii) $\alpha < \beta^+ \iff \alpha < \beta \vee \alpha = \beta$

(iii) $\alpha < \beta \iff (\exists \gamma \in \beta)(\alpha < \gamma)$ ako je $\beta$ granični ordinal.

(podsjetimo se, uređaj na ordinalima je $\in$). Može se pokazati da postoji samo jedna binarna relacija na **On** sa svojstvima (i)-(iii).

Kod uspoređivanja ordinala paralelno ćemo koristiti oznake $<$ i $\in$ (ponekad i $\subset$), kao i sup i $\bigcup$, te inf i $\bigcap$.

**Definicija.** Postoji jedinstvena skupovna operacija $+ : \mathbf{On} \times \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ takva da za sve $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$ vrijedi

(i) $\alpha + 0 = \alpha$,

(ii) $\alpha + \beta^+ = (\alpha + \beta)^+$, i

(iii) $\alpha + \beta = \sup_{\gamma \in \beta}(\alpha + \gamma)$, ako je $\beta$ granični ordinal.

Ovako definiranu operaciju nazivamo **zbrajanje ordinalnih brojeva**.

**Definicija.** Postoji jedinstvena skupovna operacija $\cdot : \mathbf{On} \times \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ takva da za sve $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$ vrijedi

(i) $\alpha \cdot 0 = 0$,

(ii) $\alpha \cdot \beta^+ = \alpha \cdot \beta + \alpha$, i

(iii) $\alpha \cdot \beta = \sup_{\gamma \in \beta}(\alpha \cdot \gamma)$, ako je $\beta$ granični ordinal.

Ovako definiranu operaciju nazivamo **množenje ordinalnih brojeva**.

**Definicija.** Postoji jedinstvena skupovna operacija $\mathbf{On} \times \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ takva da za sve $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$ vrijedi

(i) $\alpha^0 = 1$,

(ii) $\alpha^{\beta^+} = \alpha^\beta \cdot \alpha$,

(iii) $\alpha^\beta = \sup_{\gamma \in \beta}(\alpha^\gamma)$, ako je $\beta$ granični ordinal i $\alpha > 0$, i

(iv) $0^\beta = 0$ za $\beta > 0$.

Ovako definiranu operaciju nazivamo **potenciranje ordinalnih brojeva**.

**Teorem 8.3** (Svojstva operacija na ordinalima)**.** *Za sve ordinale $\alpha, \beta$ i $\gamma$ vrijedi:*

$$
\begin{array}{ccc}
0+\alpha=\alpha & 1\cdot\alpha=\alpha\cdot 1=\alpha & \alpha^1=\alpha \wedge 1^\alpha=1\\
\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma & \alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma & \alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^\beta\alpha^\gamma\\
\alpha+\beta=\alpha+\gamma\Rightarrow\beta=\gamma & \alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma & \beta<\gamma\Rightarrow\alpha^\beta<\alpha^\gamma \text{ za } \alpha>1\\
\beta<\gamma\Rightarrow\alpha+\beta<\alpha+\gamma & \beta<\gamma\Rightarrow\alpha\beta<\alpha\gamma \text{ za } \alpha>0 & \alpha\le\beta\Rightarrow\alpha^\gamma\le\beta^\gamma\\
\alpha\le\beta\Rightarrow\alpha+\gamma\le\beta+\gamma & \alpha\le\beta\Rightarrow\alpha\gamma\le\beta\gamma & (\alpha^\beta)^\gamma=\alpha^{\beta\gamma}\\
 & \alpha\beta=\alpha\gamma\Rightarrow\beta=\gamma \text{ za } \alpha>0 &
\end{array}
$$

*Dokaz.* (Diplomski rad B. Bašić.) □

- Zbrajanje i množenje nisu komutativne operacije na ordinalima. Naime, imamo

  $$1+\omega=\sup_{n\in\omega}(1+n)=\omega<\omega^+=(\omega+0)^+=\omega+1$$

  i

  $$2\omega=\sup_{n\in\omega}2n=\omega=\omega+0<\omega+\omega=\omega\cdot 1+\omega=\omega\cdot 2.$$

- Ne vrijedi desna distributivnost množenja prema zbrajanju ordinala. Naime, imamo

  $$(1+1)\omega=2\omega=\omega<\omega+\omega=1\cdot\omega+1\cdot\omega.$$

- Ne vrijedi desna distributivnost potenciranja prema množenju. Naime, imamo

  $$(\omega\cdot 2)^2=(\omega\cdot 2)\cdot(\omega\cdot 2)=\omega\cdot(2\cdot\omega)\cdot 2=\omega\cdot\omega\cdot 2=\omega^2\cdot 2.$$

  S druge strane, vrijedi

  $$\omega^2\cdot 2^2=\omega^2(2\cdot 2)=\omega^2(2\cdot 1+2)=\omega^2(2+2)=\omega^2\cdot 2+\omega^2\cdot 2>\omega^2\cdot 2.$$

- Ne vrijedi stroga monotonost zdesna:

  $$1<2, \text{ ali } 1+\omega=\omega=1+(1+\omega)=(1+1)+\omega=2+\omega \text{ i } 1\cdot\omega=\omega=2\cdot\omega,$$

  $$2<3, \text{ ali } 2^\omega=\sup_{n\in\omega}2^n=\omega=\sup_{n\in\omega}3^n=3^\omega.$$

**Zadatak 1.** Dokažite da za sve ordinale $\alpha$ i $\beta$ vrijedi

$$\alpha+\beta=\alpha\cup\{\alpha+\gamma\mid\gamma\in\beta\}.$$

*Rješenje.* Neka je $\alpha \in \mathbf{On}$ proizvoljan. Transfinitnom indukcijom dokazujemo da za sve ordinale $\beta \in \mathbf{On}$ vrijedi tvrdnja zadatka.

Najprije, za $\beta = 0$ imamo

$$\alpha + 0 = \alpha = \alpha \cup \emptyset = \alpha \cup \underbrace{\{\alpha + \gamma \mid \gamma \in 0\}}_{=\emptyset}.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $\gamma$. Pokažimo da tada vrijedi i za $\beta = \gamma^+$:

$$\begin{aligned}\alpha + \gamma^+ = (\alpha+\gamma)^+ &= (\alpha+\gamma) \cup \{\alpha+\gamma\}\\ &= \alpha \cup \{\alpha+\delta \mid \delta \in \gamma\} \cup \{\alpha+\gamma\}\\ &= \alpha \cup \{\alpha+\delta \mid \delta \in \gamma^+\}.\end{aligned}$$

Neka je sada $\beta$ granični ordinal. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za za svaki $\gamma \in \beta$. Pokažimo da tada vrijedi i za $\beta$. Za početak, budući da je $\beta$ granični ordinal, za svaki $\gamma \in \beta$ postoji $\delta \in \beta$ takav da je $\gamma \in \delta \in \beta$. Tada je

$$\{\gamma \mid \gamma \in \beta\} = \{\gamma \mid \gamma \in \delta \text{ za neki } \delta \in \beta\} = \bigcup_{\delta \in \beta} \{\gamma \mid \gamma \in \delta\}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\alpha \cup \{\alpha+\gamma \mid \gamma \in \beta\} &= \alpha \cup \bigcup_{\delta\in\beta} \{\alpha+\gamma \mid \gamma \in \delta\}\\ &= \bigcup_{\delta\in\beta} (\alpha \cup \{\alpha+\gamma \mid \gamma \in \delta\})\\ &= \bigcup_{\delta\in\beta} (\alpha+\delta)\\ &= \alpha + \sup_{\delta\in\beta} \delta = \alpha + \beta.\end{aligned}$$

Princip transfinitne indukcije garantira da tvrdnja vrijedi za sve ordinalne brojeve $\beta$.

**Zadatak 2.** Dokažite: $(\omega+1)^\omega = \omega^\omega$.

*Rješenje.* Budući da je $\omega + 1 \geq \omega$, zbog monotonosti potenciranja vrijedi $(\omega+1)^\omega \geq \omega^\omega$. S druge strane, imamo

$$\omega + 1 < \omega + \omega = \omega \cdot 2 < \omega \cdot \omega = \omega^2,$$

pa je $(\omega+1)^\omega \leq (\omega^2)^\omega = \omega^{2\omega} = \omega^\omega$.

**Zadatak 3.** Dokažite: ako su ordinali $\alpha$ i $\beta$ takvi da je $\alpha + \beta = \omega$, onda je $\alpha\beta \in \{0, \omega\}$.

*Rješenje.* Zbog totalnosti uređaja na ordinalima, imamo tri mogućnosti.

$\boxed{\alpha > \omega}$ Tada je $\alpha + \beta \geq \alpha + 0 = \alpha > \omega$, što je kontradikcija s pretpostavkom $\alpha + \beta = \omega$.

$\boxed{\alpha = \omega}$ Tada iz $\omega + \beta = \omega = \omega + 0$ slijedi $\beta = 0$, pa je $\alpha\beta = \omega \cdot 0 = 0$.

$\boxed{\alpha < \omega}$ Promotrimo odnos $\beta$ i $\omega$. Ako je $\beta > \omega$, onda je $\alpha + \beta \geq \beta > \omega$, pa ponovno dobivamo kontradikciju. Ako je $\beta < \omega$, onda je i $\alpha\beta < \omega$ (jer je $\omega = \mathbb{N}$ zatvoren na zbrajanje). Preostaje slučaj $\beta = \omega$. Sada za $\alpha = 0$ imamo $\alpha\beta = 0$, a za $0 < \alpha < \omega$ imamo $\alpha\beta = \sup_{n \in \omega} \alpha n = \omega$.

**Zadatak 4.** Izračunajte $\sum\limits_{i \in 4} (\omega + i)^i$.

*Napomena.* Za svaka dva ordinala $\alpha, \beta \in$ **On** vrijedi sljedeće:

- ako je $\beta \leq \alpha$, tada postoji jedinstveni ordinal $\gamma$ takav da je $\beta + \gamma = \alpha$;
- ako je $\beta > 0$, postoje jedinstveni ordinali $\delta$ i $\rho$ takvi da je $\alpha = \beta \cdot \delta + \rho$ i $\rho < \beta$.

**Teorem 8.4** (**Cantorova normalna forma**)**.** *Za svaki ordinalni broj $\alpha$ postoji prirodni broj $n \in \omega$, konačan niz ordinalnih brojeva $\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_n$ i prirodni brojevi $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \omega \setminus \{0\}$ takvi da je*

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot m_1 + \omega^{\gamma_2} \cdot m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_n} \cdot m_n.$$

**Lema.** *Ako je $\beta < \alpha$ i $k \in \omega$, onda je $\omega^\beta \cdot k + \omega^\alpha = \omega^\alpha$.*

**Teorem 8.5** (Apsorpcija)**.** *Ordinali oblika $\omega^\alpha$* apsorbiraju *manje ordinale slijeva, tj. za svaki $\beta < \omega^\alpha$ vrijedi $\beta + \omega^\alpha = \omega^\alpha$.*

**Zadatak 5.** Dokažite da za sve prirodne brojeve $k \in \omega$ i $n \in \omega \setminus \{0\}$ vrijedi

$$(\omega + k)^n = \omega^n + \omega^{n-1} \cdot k + \cdots + \omega \cdot k + k.$$

*Rješenje.* Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po $n$. Za $n = 1$ gornja formula očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Imamo

$$\begin{aligned}
(\omega + k)^{n+1} &= (\omega + k)^n(\omega + k) = (\omega^n + \omega^{n-1} \cdot k + \cdots + \omega \cdot k + k)(\omega + k) \\
&= (\omega^n + \cdots + \omega \cdot k + k) \cdot \omega + (\omega^n + \cdots + \omega \cdot k + k) \cdot k \\
&= \sup_{m \in \omega} \big((\omega^n + \cdots + \omega \cdot k + k) \cdot m\big) + \underbrace{(\omega^n + \cdots + k) + \cdots + (\omega^n + \cdots + k)}_{k \text{ puta}} \\
&= \sup_{m \in \omega} \Big(\underbrace{(\omega^n + \cdots + k) + \cdots + (\omega^n + \cdots + k)}_{m \text{ puta}}\Big) + \omega^n \cdot k + \omega^{n-1} \cdot k + \cdots + k \\
&= \sup_{m \in \omega} \Big(\underbrace{\omega^n \cdot m + \omega^{n-1} \cdot k + \cdots + k}_{\substack{\geq \omega^n \cdot m \longrightarrow \omega^n \cdot \omega \\ \leq \omega^n \cdot m + \omega^n = \omega^n \cdot (m+1) \longrightarrow \omega^n \cdot \omega}}\Big) + \omega^n \cdot k + \cdots + \omega \cdot k + k \\
&= \omega^{n+1} + \omega^{n-1} \cdot k + \cdots + \omega \cdot k + k
\end{aligned}$$

i tvrdnja je dokazana.

**Zadatak 6.** Izračunajte $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2} i$.

*Rješenje.*

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\omega\cdot 2} i &= \sum_{i\in\omega+\omega} i = \sup_{n\in\omega}\sum_{i\in n} i + \sup_{n\in\omega}\sum_{i\in n}(\omega+i) = \sup_{n\in\omega}\sum_{i=0}^{n-1} i + \sup_{n\in\omega}\sum_{i=0}^{n-1}(\omega+i)\\
&= \sup_{n\in\omega}(0+1+2+\cdots+n-1) + \sup_{n\in\omega}(\omega+\omega+1+\omega+2+\cdots+\omega+n-1)\\
&= \sup_{n\in\omega}\frac{n(n-1)}{2} + \sup_{n\in\omega}(\underbrace{\omega\cdot n+n-1}_{\substack{\geq\omega\cdot n\longrightarrow\omega\cdot\omega\\ \leq\omega\cdot n+\omega\longrightarrow\omega\cdot\omega}})\\
&= \omega+\omega^2 = \omega^2
\end{aligned}$$

**Zadatak 7.** Izračunajte $\sum\limits_{i\in\omega+3}(i\cdot\omega+\omega\cdot i)$.

*Rješenje.*

$$\sum_{i\in\omega+3}(i\cdot\omega+\omega\cdot i) = \sup_{n\in\omega}\sum_{i=0}^{n-1}(i\cdot\omega+\omega\cdot i) + \sum_{i=0}^{2}((\omega+i)\cdot\omega+\omega\cdot(\omega+i))$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\omega}\sum_{i=0}^{n-1}(i\cdot\omega+\omega\cdot i) &= \sup_{n\in\omega}(0\cdot\omega+\omega\cdot 0+1\cdot\omega+\omega\cdot 1+\cdots+(n-1)\cdot\omega+\omega\cdot(n-1))\\
&= \sup_{n\in\omega}(\omega+\omega+\omega+\omega\cdot 2+\cdots+\omega+\omega\cdot(n-1))\\
&= \sup_{n\in\omega}(\omega\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{2}) = \omega\cdot\omega = \omega^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2}\big((\omega+i)\cdot\omega+\omega\cdot(\omega+i)\big) &= \omega\cdot\omega+\omega\cdot\omega+(\omega+1)\cdot\omega+\omega\cdot(\omega+1)+(\omega+2)\cdot\omega+\omega\cdot(\omega+2)\\
&= \omega^2\cdot 2+\sup_{n\in\omega}((\omega+1)\cdot n)+\omega\cdot\omega+\omega\cdot 1+\sup_{n\in\omega}((\omega+2)\cdot n)+\omega\cdot\omega+\omega\cdot 2\\
&= \omega^2\cdot 2+\sup_{n\in\omega}(\omega\cdot n+1)+\omega^2+\omega+\sup_{n\in\omega}(\omega\cdot n+2)+\omega^2+\omega\cdot 2\\
&= \omega^2\cdot 2+\omega\cdot\omega+\omega^2+\omega+\omega^2+\omega^2+\omega\cdot 2 = \omega^2\cdot 6+\omega\cdot 2
\end{aligned}$$

Konačno rješenje:

$$\sum_{i\in\omega+3}(i\cdot\omega+\omega\cdot i) = \omega^2+\omega^2\cdot 6+\omega\cdot 2 = \omega^2\cdot 7+\omega\cdot 2$$

**Zadatak 8.** Za $n\in\omega$ izračunajte $\sum\limits_{i\in\omega+n} i^n$.

*Rješenje.* Za $n=0$ imamo $\sum\limits_{i\in\omega} i^0 = \sum\limits_{i\in\omega} 1 = \sup\limits_{n\in\omega} n = \omega$.

Za $n=1$ imamo $\sum\limits_{i\in\omega+1} i^1 = \sum\limits_{i\in\omega} i + \omega = \omega+\omega = \omega\cdot 2$.

Konačno, za $n>1$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\omega+n} i^n &= \sum_{i\in\omega} i^n + \sum_{i=0}^{n-1} (\omega+i)^n \\
&= \sup_{m\in\omega} \sum_{i=0}^{m-1} i^n + \omega^n + (\omega+1)^n + \cdots + (\omega+n-1)^n \\
&= \sup_{m\in\omega} (0+1+\cdots+(m-1)^n) + \omega^n + (\omega^n+\omega^{n-1}+\cdots+1) + \ldots \\
&\qquad\qquad + (\omega^n + \omega^{n-1}\cdot(n-1)+\cdots+\omega\cdot(n-1)+n-1) \\
&= \omega + \omega^n + \omega^n + \cdots + \omega^n + \omega^{n-1}\cdot(n-1) + \cdots + \omega\cdot(n-1)+n-1 \\
&= \omega^n\cdot n + \omega^{n-1}\cdot(n-1)+\cdots+\omega\cdot(n-1)+n-1,
\end{aligned}$$

pri čemu smo u trećoj jednakosti koristili formulu iz zadataka 8.5.

**Zadatak 9.** Izračunajte $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2+2} (2+i+2^i)$.

*Rješenje.*

$$\sum_{i\in\omega\cdot2+2} (2+i+2^i) = \underbrace{\sum_{i\in\omega}(2+i+2^i)}_{=:S_1} + \underbrace{\sum_{i\in\omega}(2+\omega+i+2^{\omega+i})}_{=:S_2} + \underbrace{\sum_{i=0}^{1}(2+\omega\cdot2+i+2^{\omega\cdot2+i})}_{=:S_3}.$$

Računamo redom:

$$S_1 = \sup_{n\in\omega}\sum_{i=0}^{n-1}(2+i+2^i) = \omega,$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sup_{n\in\omega}\sum_{i=0}^{n-1}(2+\omega+i+2^\omega\cdot 2^i) = \sup_{n\in\omega}\sum_{i=0}^{n-1}(\omega+i+\omega\cdot 2^i) \\
&= \sup_{n\in\omega}\left(\omega+0+\omega\cdot2^0+\omega+1+\omega\cdot2^1+\cdots+\omega+n-1+\omega\cdot2^{n-1}\right) \\
&= \sup_{n\in\omega}\left(\omega+\omega+\omega+\omega\cdot2+\cdots+\omega+\omega\cdot2^{n-1}\right) \\
&= \sup_{n\in\omega}\left(\omega\cdot(n+\textstyle\sum_{i=0}^{n-1}2^i)\right) = \omega\cdot\omega = \omega^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= 2+\omega\cdot2+2^{\omega\cdot2}+2+\omega\cdot2+1+2^{\omega\cdot2+1} \\
&= \omega\cdot2+(2^\omega)^2+2+\omega\cdot2+1+(2^\omega)^2\cdot2 \\
&= \omega\cdot2+\omega^2+\omega\cdot2+\omega^2\cdot2 \\
&= \omega^2\cdot3.
\end{aligned}$$

Konačno:

$$S_1 + S_2 + S_3 = \omega + \omega^2 + \omega^2 \cdot 3 = \omega^2 \cdot 4.$$

**Zadatak 10.** Izračunajte $\prod\limits_{i \in \omega+2} (\omega^2 + 2^i)$.

*Rješenje.*

$$\begin{aligned}
\prod_{i \in \omega+2} (\omega^2 + 2^i) &= \Bigg( \underbrace{\sup_{n \in \omega} \prod_{i=0}^{n-1} (\underbrace{\omega^2 + 2^i}_{\substack{\geq \omega^2 \\ \leq \omega^3}})}_{\substack{\geq \omega^{2n} \longrightarrow \omega^\omega \\ \leq \omega^{3n} \longrightarrow \omega^\omega}} \Bigg) \cdot (\omega^2 + 2^\omega) \cdot (\omega^2 + 2^{\omega+1}) \\
&= \omega^\omega (\omega^2 + \omega)(\omega^2 + \omega \cdot 2) \\
&= \omega^\omega \big( (\omega^2 + \omega) \cdot \omega^2 + (\omega^2 + \omega) \cdot \omega \cdot 2 \big) \\
&= \omega^\omega \big( \omega(\omega + 1)\omega^2 + \omega(\omega + 1)\omega \cdot 2 \big) \\
&= \omega^\omega \big( \omega \cdot \omega^3 + \omega \cdot \omega^2 \cdot 2 \big) \\
&= \omega^\omega \big( \omega^4 + \omega^3 \cdot 2 \big) \\
&= \omega^{\omega+4} + \omega^{\omega+3} \cdot 2.
\end{aligned}$$

**Zadatak 11.** Izračunajte $\sum\limits_{i \in \omega+1} \prod\limits_{j \in i} (j+2)^i$.

*Rješenje.* Označimo $\prod\limits_{j \in i} (j+2)^i := \alpha_i$. Računamo redom:

$$\alpha_n = \prod_{j=0}^{n-1} (j+2)^n = 2^n \cdot 3^n \cdot \dots \cdot (n+1)^n = (n+1)!^n$$

za $n \in \omega$, te

$$\begin{aligned}
\alpha_\omega = \prod_{j \in i\omega} (j+2)^\omega &= \sup_{n \in \omega} \prod_{j=0}^{n-1} (j+2)^\omega \\
&= \sup_{n \in \omega} \big( 2^\omega \cdot 3^\omega \cdot \dots \cdot (n-1)^\omega \big) \\
&= \sup_{n \in \omega} (\omega \cdot \omega \cdots \omega) \\
&= \sup_{n \in \omega} \omega^n = \omega^\omega.
\end{aligned}$$

Konačno, imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\omega+1}\prod_{j\in i}(j+2)^{i} &= \sum_{i\in\omega}\alpha_i+\alpha_\omega \\
&= \sup_{n\in\omega}(\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1})+\alpha_\omega \\
&= \sup_{n\in\omega}(1!^0+2!^1+\cdots+n!^{n-1})+\omega^\omega \\
&= \omega+\omega^\omega=\omega^\omega.
\end{aligned}$$

# 9 Zornova lema

Prisjetimo se: **lanac** u parcijalno uređenom skupu je svaki podskup (može i prazan) koji je totalno uređen.

### Zornova lema

Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup u kojem svaki lanac ima gornju među. Tada u $(A, <)$ postoji barem jedan maksimalni element.

Ako želimo dokazati da neki *neprazan* PUS ima maksimalni element, prema Zornovoj lemi dovoljno je pokazati da svaki *neprazni* lanac u tom PUS-u ima gornju među. Specijalno, ako želimo pokazati da neka neprazna familija skupova $\mathscr{F}$ ima maksimalni element s obzirom na inkluziju, dovoljno je pokazati da je za svaki neprazni lanac $\mathscr{L}$ u $\mathscr{F}$ skup $\bigcup \mathscr{L}$ također u $\mathscr{F}$. Naime, $\bigcup \mathscr{L}$ je gornja međa od $\mathscr{L}$ u $\mathscr{F}$, pa tada $(\mathscr{F}, \subset)$ zadovoljava uvjet Zornove leme.

**Zadatak 1.** Dokažite da svaki vektorski prostor ima bazu.

*Rješenje.* Primjer 9.7 u skripti iz predavanja.

**Zadatak 2.** Neka je $A$ neprazan totalno uređen. Dokažite da postoji maksimalan u sebi gust podskup od $A$.

*Rješenje.* Promatramo familiju skupova

$$\mathscr{F} = \{B \subseteq A \mid B \text{ je gust u sebi}\}.$$

Kako je $A$ neprazan, postoji $a \in A$, pa je $\{a\} \in \mathscr{F}$. Dakle, $(\mathscr{F}, \subset)$ je neprazan PUS.

Neka je $\mathscr{L}$ proizvoljan lanac u $\mathscr{F}$. Pokažimo da je tada $\bigcup \mathscr{L}$ također u $\mathscr{F}$. Treba pokazati

- $\bigcup \mathscr{L} \subseteq A$
- $\bigcup \mathscr{L}$ je gust u sebi.

Kako za svaki $B \in \mathscr{L}$ vrijedi $B \subseteq A$, to je i $\bigcup \mathscr{L} \subseteq A$. Nadalje, neka su $x, y \in \bigcup \mathscr{L}$ takvi da je $x < y$. Znamo da je $x \in B_1$ i $y \in B_2$ za neke $B_1, B_2 \in \mathscr{L}$. Kako je $\mathscr{L}$ po pretpostavci lanac, $B_1$ i $B_2$ su usporedivi, pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $B_1 \subseteq B_2$. Tada vrijedi $x, y \in B_2$. Kako je $B_2 \in \mathscr{L} \subseteq \mathscr{F}$,

$B_2$ je gust u sebi, pa postoji $z \in B_2$ takav da je $x < z < y$. No, kako je ujedno i $z \in \bigcup \mathscr{L}$, ovime smo pokazali da je $\bigcup \mathscr{L}$ gust u sebi. Dakle, vrijedi $\bigcup \mathscr{L} \in \mathscr{F}$.

Pokazali smo da svaki neprazan lanac $\mathscr{L}$ u $\mathscr{F}$ ima gornju među $\bigcup \mathscr{L}$ u $\mathscr{F}$. Prema Zornovoj lemi, $\mathscr{F}$ ima maksimalni element.

**Zadatak 3.** Dokažite da u svakom parcijalno uređenom skupu postoji maksimalan antilanac (podskup u kojem su svaka dva različita elementa međusobno neusporediva).

*Rješenje.* Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup. Promatramo familiju skupova

$$\mathscr{F} = \{X \subseteq A \mid X \text{ je antilanac}\}.$$

Kako je $\emptyset \in \mathscr{F}$, vidimo da je $(\mathscr{F}, \subset)$ neprazan PUS.

Neka je $\mathscr{L}$ neprazan lanac u $\mathscr{F}$. Dokažimo da je $\bigcup \mathscr{L} \in \mathscr{F}$. Jasno je da je $\bigcup \mathscr{L} \subseteq A$. Pretpostavimo da su $x \neq y \in \bigcup \mathscr{L}$. Tada postoje $X, Y \in \mathscr{L}$ takvi da je $x \in X$ i $y \in Y$. Kako je $\mathscr{L}$ lanac, $X$ i $Y$ su usporedivi. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti $X \subseteq Y$, pa je $x, y \in Y$. Kako je $Y \in \mathscr{L} \subseteq F$, $Y$ je antilanac, pa $x$ i $y$ nisu usporedivi. Dakle, $\bigcup \mathscr{L}$ je antilanac u $A$, odnosno $\bigcup \mathscr{L} \in \mathscr{F}$.

Kako je $\bigcup \mathscr{L}$ gornja međa lanca $\mathscr{L}$ u $\mathscr{F}$, iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $\mathscr{F}$ ima barem jedan maksimalni element.

**Zadatak 4.** Neka je $R$ binarna relacija na nekom skupu $X$. Dokažite da postoji maksimalna antisimetrična relacija na $X$ koja je disjunktna s $R$.

*Rješenje.* Neka je

$$\mathscr{F} = \{S \mid S \text{ je antisimetrična relacija } X \text{ i } R \cap S = \emptyset\}.$$

Budući da je $\emptyset \in \mathscr{F}$, tada je $(\mathscr{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{F}$ neki neprazan lanac. Dokažimo da je $\bigcup \mathscr{L}$ antisimetrična relacija na skupu $X$. Neka je $(x, y), (y, x) \in \bigcup \mathscr{L}$. Tada postoje $Y_1, Y_2 \in \mathscr{L}$ takvi da je $(x, y) \in Y_1$, $(y, x) \in Y_2$. Kako je $\mathscr{L}$ lanac, $Y_1$ i $Y_2$ su usporedivi. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je $Y_1 \subseteq Y_2$, pa je $(x, y), (y, x) \in Y_2$. Kako je $Y_2 \in \mathscr{L} \subseteq \mathscr{F}$, tada je $Y_2$ antisimetrična relacija. To znači da iz $(x, y), (y, x) \in Y_2$ slijedi $x = y$. Očito je $\bigcup \mathscr{L} \cap R = \emptyset$. Dakle, $\bigcup \mathscr{L}$ je gornja međa lanca $\mathscr{L}$ u $\mathscr{F}$. Iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $\mathscr{F}$ ima barem jedan maksimalni element.

**Zadatak 5.** Neka je $(V, E)$ jednostavan neusmjeren graf s barem jednim bridom. *Klika* u grafu je podgraf s bar dva vrha koji je potpun (tj. postoji brid između svaka dva vrha podgrafa). Dokažite da $(V, E)$ ima maksimalnu kliku.

*Rješenje.* Promatramo familiju

$$\mathscr{F} = \{W \subseteq V \mid k(W) \geq 2 \text{ i } (\forall x, y \in W)(x \neq y \Rightarrow xEy)\}$$

(tj. familiju svih klika u $(V, E)$). Budući da $(V, E)$ ima barem jedan brid, postoje $v_1 \neq v_2 \in V$ takvi da je $v_1 E v_2$, pa je $W = \{v_1, v_2\}$ klika u $V$, odnosno $W \in \mathscr{F}$. Dakle, $(\mathscr{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup.

Neka je $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{F}$ proizvoljan neprazan lanac. Pokažimo da je $\bigcup \mathscr{L} \subset \mathscr{F}$, tj. da je to klika u $V$. Jasno je da je $\bigcup \mathscr{L} \subseteq V$ i da je $k\big(\bigcup \mathscr{L}\big) \geq 2$. Neka su $v_1, v_2 \in \bigcup \mathscr{L}$ različiti. Tada postoje $W_1, W_2 \in \mathscr{L}$ takvi da je $v_1 \in W_1$ i $v_2 \in W_2$. Kako su $W_1$ i $W_2$ elementi lanca, oni su usporedivi, pa je bez smanjenja općenitosti $W_1 \subseteq W_2$. Tada je $v_1, v_2 \in W_2$, pa kako je $W_2$ klika, vrijedi $v_1 E v_2$.

Dakle, $\bigcup \mathscr{L}$ je gornja međa lanca $\mathscr{L}$ u $\mathscr{F}$. Iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $\mathscr{F}$ ima barem jedan maksimalni element.

**Zadatak 6.** Za $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ kažemo da je *aritmetički poluzatvoren* ako za sve $x, y \in A$ vrijedi $x + y \in A$ ili $x \cdot y \in A$ (može i oboje). Dokažite da postoji maksimalni (u smislu relacije inkluzije) aritmetički poluzatvoreni skup koji je disjunktan sa skupom $\mathbb{P}$ svih prostih brojeva.

*Rješenje.* Neka je $\mathscr{F} = \{A \subseteq \mathbb{N}$ aritmetički poluzatvoren, te $A \cap \mathbb{P} = \emptyset\}$. Kako je npr. $\{0\} \in \mathscr{F}$ tada je $(\mathscr{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $\mathscr{L} \subseteq \mathfrak{F}$ proizvoljan neprazan lanac.

Dokažimo prvo da je $\bigcup \mathscr{L}$ aritmetički poluzatvoren skup. Neka su $x, y \in \bigcup \mathscr{L}$ proizvoljni. Tada postoje $X, Y \in \mathscr{L}$ tako da je $x \in X$ i $y \in Y$. Budući da je $\mathscr{L}$ lanac, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $X \subseteq Y$. Tada su $x, y \in Y$. Kako je po pretpostavci skup $Y$ aritmetički poluzatvoren, tada je $x + y \in Y$ ili $x \cdot y \in Y$. No, onda je očito $x + y \in \bigcup \mathscr{L}$ ili $x \cdot y \in \bigcup \mathscr{L}$.

Dokažimo sada da vrijedi $\bigcup \mathscr{L} \cap \mathbb{P} = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno. Neka je $x \in \bigcup \mathscr{L} \cap \mathbb{P}$ proizvoljan. Tada postoji $X \in \mathscr{L}$ takav da je $x \in X$. Time imamo $x \in X \cap \mathbb{P}$. No, to je nemoguće zbog $X \in \mathscr{L} \subseteq \mathscr{F}$ i definicije skupa $\mathscr{F}$.

Iz svega sada dokazanog slijedi da je $\bigcup \mathscr{L}$ gornja međa lanca $\mathscr{L}$ u parcijalno uređenom skupu $(\mathscr{F}, \subset)$. Iz Zornove leme slijedi da postoji maksimalni element u parcijalno uređenom skupu $(\mathscr{F}, \subset)$.