Ordinalni kalkulator

Bašić, Bjanka

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Bjanka Bašić

ORDINALNI KALKULATOR

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Vedran Čačić

Zagreb, rujan 2020.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Roditeljima, za bezuvjetnu ljubav i podršku.
Sestrama, zato što su stvorile dobro utabane staze koje sam mogla pratiti i proširiti.
Prijateljicama, bez kojih bi vjerojatno puno brže napisala ovaj rad, no i puno dosadnije.
I dedi, zato što je uvijek držao fige.

Sadržaj

Uvod

Proučavanje i razmišljanje o beskonačnosti vuče svoje korijene još iz antičkog doba. Ta promišljanja su često nailazila na protivljenje od strane ljudi koji su prihvaćali samo ono što je oku vidljivo, dok je beskonačnost opisana kao nešto dostupno samo umu. Današnju opću prihvaćenost tog pojma u velikoj mjeri dugujemo njemačkom matematičaru Georgu Cantoru i njegovoj teoriji skupova u kojoj se bavio proučavanjem beskonačnih skupova te beskonačnih brojeva.

Začetkom teorije skupova kao grane matematike se često smatra Cantorov rad iz 1874. godine, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*. U njemu prvi put Cantor pokazuje da postoji više vrsta beskonačnosti. Dvadesetak godina poslije on radom *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* predstavlja dobro razvijen koncept transfinitnih brojeva, koji uz manje izmjene živi i danas.

Dvije vrste brojeva koje se proučavaju u teoriji skupova su *ordinalni* i *kardinalni* brojevi. Zbog čestog korištenja, pojam „ordinalni broj" ponekad ćemo skraćivati u „ordinal". Iako će u ovom radu fokus biti na ordinalnim brojevima, za bolje razumijevanje bilo bi dobro shvatiti osnovnu razliku ordinalnih u odnosu na kardinalne brojeve. Pojednostavljeno, kardinalni broj kazuje koliko nečega ima, dok ordinalni broj ima veze s time kako je nešto uređeno. Promatrajući primjerice skup prirodnih brojeva znamo da ga uglavnom promatramo u obliku $0, 1, 2, \dots$, no mogli bismo ga urediti na druge načine poput $1, 2, 3, \dots, 0$ ili $0, 2, 4, \dots, 1, 3, 5, \dots$. U sva tri prikaza koristimo isti skup elemenata pa je broj elemenata ostao jednak, no način na koji je taj skup uređen se promijenio. Ovdje nismo mogli promatrati skup cijelih brojeva umjesto skupa prirodnih brojeva sa standardnim uređajem, jer iako pojam kardinalnog broja nije povezan s posebnom vrstom uređaja na skupovima, ordinalni brojevi su izravno povezani s dobro uređenim skupovima.

Cilj je ovog rada implementirati ordinalni kalkulator koji bi omogućavao računanje s ordinalima, slično kao što obični kalkulator računa s decimalnim brojevima. Ordinalni kalkulator može služiti studentima kao alat za olakšavanje shvaćanja ordinala i provjeru rezultata pri vježbanju. U prvom dijelu rada ćemo se upoznati s osnovnim pojmovima potrebnima za razumijevanje ordinalnih brojeva. Pretpostavljat ćemo osnovno znanje o skupovima, a pobliže ćemo predstaviti dobro uređene skupove. Kao prikladnu metodu za dokazivanje tvrdnji o ordinalima uvest ćemo metodu transfinitne indukcije.

Zatim ćemo opisati aritmetiku ordinala. Dokazat ćemo osnovna svojstva operacija i općenito opisati kako aritmetika ordinala proširuje aritmetiku prirodnih brojeva „preko granice beskonačnosti" ω. U zadnjem poglavlju ćemo za svaku operaciju opisati detaljnije kako smo je implementirali u programu. Više detalja o samom ordinalnom kalkulatoru se može saznati čitanjem dokumentacije ili samog koda.

Poglavlje 1

Ordinalni brojevi

U ovom poglavlju ćemo opisati pojmove nužne za shvaćanje daljnjeg sadržaja ovog rada. Ponovimo da cilj ovog rada nije razrada teorije skupova, nego implementacija kalkulatora s ordinalnim brojevima i aritmetičkim operacijama koje ćemo detaljnije opisati u idućem poglavlju. Zato će razrada pojedinih pojmova u ovom poglavlju biti vrlo rudimentarna.

Definicije su uglavnom preuzete iz [5].

1.1 Uređeni skupovi

Neka je A skup. Za binarnu relaciju $R \subseteq A \times A$ kažemo da je:

- **refleksivna na** A, ako za sve $x \in A$ vrijedi $x\,R\,x$;
- **irefleksivna**, ako ne postoji $x \in A$ tako da vrijedi $x\,R\,x$;
- **antisimetrična**, ako za sve $x, y \in A$ takve da vrijedi $x\,R\,y$ i $y\,R\,x$ slijedi $x = y$;
- **tranzitivna**, ako za sve $x, y, z \in A$ takve da vrijedi $x\,R\,y$ i $y\,R\,z$ slijedi $x\,R\,z$;

gdje za parove (x, y) u relaciji R pišemo $x\,R\,y$.
Za parove (x, y) koji nisu u relaciji R pišemo $x\,\not R\,y$.

Definicija 1.1.1. *Neka je $R \subseteq A \times A$ binarna relacija na A. Kažemo da je R* ***relacija parcijalnog uređaja*** *ako je irefleksivna i tranzitivna.*
Uređeni par (A, R) gdje je R relacija parcijalnog uređaja zovemo ***parcijalno uređen skup****.*

Ako se uređaj podrazumijeva, možemo umjesto „$(A, <)$ je parcijalno uređen skup” pisati „A je parcijalno uređen skup”.

Relacije parcijalnog uređaja najčešće označavamo oznakama $<$ i $\prec$. Neki primjeri koje često susrećemo u matematici su $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\mathbb{R}, <)$ gdje s $<$ označavamo standardni uređaj na skupovima $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ redom.

Osim običnog (strogog) parcijalnog uređaja, znamo govoriti i o **nestrogom parcijalnom uređaju** koji je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija. Označavamo ga s $\leq$ i $\leq$ ovisno o vezi s relacijama $<$ i $\prec$. Relacije $<$ i $\leq$ su međusobno definabilne:

- ako imamo relaciju $<$, tada definiramo $\leq$ sa: $x \leq y$ ako i samo ako je $x < y$ ili $x = y$;
- ako imamo relaciju $\leq$, tada definiramo $<$ sa: $x < y$ ako i samo ako je $x \leq y$ i $x \neq y$.

Također, kad pišemo $x > y$ to znači da je $y < x$ i $x \geq y$ znači da je $y \leq x$. Koristeći sada tako definirane uređaje možemo navesti neka svojstva elemenata parcijalno uređenog skupa koja ćemo koristiti u daljnjem proučavanju uređenih skupova.

Definicija 1.1.2. *Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup. Kažemo:*

- *elementi $x, y \in A$ su **usporedivi** ako vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$;*
- *skup $B \subseteq A$ je **lanac** ako su svaka dva elementa iz B usporediva;*
- *element $x \in A$ je **maksimalan** ako ne postoji $y \in A$ takav da vrijedi $x < y$;*
- *element $x \in A$ je **minimalan** ako ne postoji $y \in A$ takav da vrijedi $y < x$;*
- *element $x \in A$ je **najveći** ako za svaki $y \in A$ vrijedi $y \leq x$;*
- *element $x \in A$ je **najmanji** ako za svaki $y \in A$ vrijedi $x \leq y$.*

Definicija 1.1.3. *Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup i $B \subseteq A$.*
Za element $x \in A$ kažemo da je:

- ***gornja međa** od B, ako za svaki $y \in B$ vrijedi $y \leq x$;*
- ***donja međa** od B, ako za svaki $y \in B$ vrijedi $x \leq y$;*
- ***supremum** od B, ako je x najmanja gornja međa od B;*
- ***infimum** od B, ako je x najveća donja međa od B.*

Definicija 1.1.4. *Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup i $x \in A$.*
*Tada skup $p_A(x) := \{y \in A : y < x\}$ nazivamo **početni komad** skupa A ispred elementa x.*

U parcijalno uređenom skupu mogu postojati *neusporedivi* elementi: to su elementi $x, y \in A$ takvi da vrijedi $x \not R y$ i $y \not R x$. Primjer takvog uređaja je $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subset)$, gdje ne vrijedi ni $\{2, 3\} \subset \{3, 7\}$ ni $\{3, 7\} \subset \{2, 3\}$. Ponekad nam je korisno promatrati skupove u kojima možemo usporediti sve elemente pa zato uvodimo sljedeću klasu uređenih skupova.

Definicija 1.1.5. *Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup. Kažemo da je $(A, <)$ **totalno uređen skup** ako su svaka dva njegova elementa usporediva.*

$(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\mathbb{R}, <)$ su totalno uređeni skupovi, dok $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subset)$ nije iz prethodno opisanog razloga.

Trebamo još opisati kako možemo uspoređivati različite uređene skupove.

Definicija 1.1.6. *Neka su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ parcijalno uređeni skupovi. Kažemo da $f \colon A \to B$ **čuva uređaj** ako vrijedi:*

$$(\forall x, y \in A)\big(x < y \Rightarrow f(x) \prec f(y)\big).$$

*Bijekcija $g \colon A \to B$ takva da g i g^{-1} čuvaju uređaj naziva se **sličnost** između A i B. Kažemo da su A i B **slični skupovi** ako postoji sličnost između njih. To označavamo s $A \simeq B$.*

Prije uvođenja ordinalnih brojeva još nam je preostalo uvesti posebnu klasu totalno uređenih skupova.

1.2 Dobro uređeni skupovi

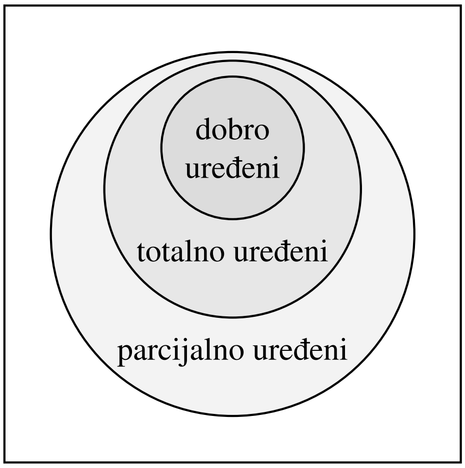
Definicija 1.2.1. *Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup. Za $(A, <)$ kažemo da je **dobro uređen skup** ako svaki njegov neprazni podskup ima najmanji element.*

Na slici 1.1 prikazan je odnos dosad nabrojenih klasa uređenih skupova. Svaki dobro uređeni skup $(A, <)$ je totalno uređen: svaka dva elementa $x, y \in A$ su usporedivi jer neprazni podskup $\{x, y\}$ skupa A mora imati najmanji element.

Prisjetimo se primjera parcijalno uređenih skupova koje smo naveli. Intuitivno je jasno da je $(\mathbb{N}, <)$ dobro uređen skup, dok $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$ i $(\mathbb{R}, <)$ to nisu jer njihov neprazni podskup $\mathbb{Z}$ nema najmanji element.

Navest ćemo neka svojstva dobro uređenih skupova bez njihovih dokaza. Dokazi svih navedenih tvrdnji mogu se naći u [5, pogl. 1.8].

- Dobro uređen skup ne može biti sličan podskupu nijednog svog početnog komada.
- Različiti početni komadi istog dobro uređenog skupa nisu slični.
- Sličnost između sličnih dobro uređenih skupova je jedinstvena.



Slika 1.1: Odnos različitih klasa uređenih skupova

Teorem 1.2.2 (O usporedivosti dobro uređenih skupova)**.** *Neka su* $(A, <)$ *i* $(B, \prec)$ *dobro uređeni skupovi. Tada vrijedi točno jedno od sljedećeg:*

- $A \simeq B$,
- *postoji jedinstveni* $a \in A$ *takav da vrijedi* $p_A(a) \simeq B$, *ili*
- *postoji jedinstveni* $b \in B$ *takav da vrijedi* $p_B(b) \simeq A$.

Dobro uređeni skupovi su nam bitni jer su ordinalni brojevi njihovi „reprezentanti”, što će službeno biti iskazano teorem 1.3.5 i definicijom 1.3.6. Sljedeći odjeljak govori o principu koji se koristi za dokazivanje univerzalnih tvrdnji na dobro uređenim skupovima. U našem slučaju taj će princip biti vrlo koristan za dokazivanje svojstava aritmetičkih operacija na ordinalnim brojevima.

Transfinitna indukcija

Već od ranog matematičkog obrazovanja uči se matematička indukcija kao način dokazivanja da neko svojstvo imaju svi prirodni brojevi. Stroži oblik matematičke indukcije glasi: ako je P neko svojstvo prirodnih brojeva takvo da vrijedi:

$$(\forall n \in \mathbb{N})((\forall k < n)\, P(k) \Rightarrow P(n)),$$

onda vrijedi $P(n)$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Ovakav pristup dokazivanju nije svojstven samo prirodnim brojevima: postoji *transfinitna indukcija* koja vrijedi za sve dobro uređene skupove [5, teorem 1.88].

Definicija 1.2.3. *Neka je $(A, <)$ totalno uređen skup. Kažemo da A zadovoljava* ***princip transfinitne indukcije*** *ako za svaki podskup $B \subseteq A$ takav da je*

$$(\forall x \in A)(p_A(x) \subseteq B \Rightarrow x \in B),$$

vrijedi $B = A$.

Teorem 1.2.4. *Neka je $(A, <)$ totalno uređen skup. Skup A ima najmanji element i zadovoljava princip transfinitne indukcije ako i samo ako je A neprazni dobro uređen skup.*

1.3 Osnovno o ordinalnim brojevima

U uvodu smo već spomenuli Georga Cantora i njegov ogromni doprinos otkrivanju ordinalnih brojeva, no vrijedan spomena je i poljski matematičar Wacław Sierpiński. On je također pokazivao veliko zanimanje za beskonačne brojeve te u njegovoj knjizi [3] zainteresirani čitatelj može produbiti znanje o ordinalima. Uz njega se veže i anegdota koja daje dobru podlogu za daljnji razvoj intuicije, a preuzeta je iz [2]. Priča kaže da se Sierpiński, jednom dok je putovao sa suprugom, zabrinuo da su izgubili jedan komad prtljage. Supruga mu je rekla da nisu, da su svih šest komada ovdje. Na to joj je onda Sierpiński rekao: „To ne može biti istina. Prebrojio sam ih nekoliko puta: nula, jedan, dva, tri, četiri, pet."

Brojenje od nule je čudan koncept jer smo navikli drugačije, no u većini programskih jezika uobičajeno je da se elementi liste indeksiraju od nule. Tada treba paziti jer je broj izbrojenih objekata najraniji sljedeći neiskorišteni broj, što bi u našoj priči bio broj šest. Slično će funkcionirati ordinalni brojevi jer njih koristimo za „brojenje" uređenih skupova koji mogu biti beskonačni. Njih često uspoređujemo s rednim brojevima te predstavljamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset, \\ 1 &= \{0\} = \{\emptyset\}, \\ 2 &= \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Primijetimo da je svaki ordinalni broj skup svih ordinala manjih od njega. To znači da za svako monotono svojstvo P (svojstvo koje, kad postane istinito za neki element, je istinito za sve veće elemente), prvi ordinal za koji vrijedi P je skup svih ordinala za koje ne vrijedi. Tako je prvi višeznamenkasti ordinal (10) skup svih jednoznamenkastih te je prvi beskonačni ordinal (ω) skup svih konačnih ordinala.

Kao što smo već spomenuli, ordinali postaju zanimljiviji kada dođemo do beskonačnosti jer tada ne postoji nužno„zadnji brojeni objekt". Kada bismo koristili brojenje od jedan, tu bi nastao problem jer je u tom slučaju broj izbrojenih objekata upravo zadnji korišteni broj. No, kako takav broj u slučaju beskonačnih skupova ne mora postojati, umjesto konvencionalnijeg brojenja od jedan koristimo brojenje od nule.

Podsjetimo se, skup x je **tranzitivan** ako za svaki $y \in x$ vrijedi $y \subseteq x$.

Definicija 1.3.1. *Za skup x kažemo da je **ordinalni broj** ako je x tranzitivan i $(x, \in)$ dobro uređen skup.*

Svi prirodni brojevi su ordinalni brojevi te je $\omega := \{0, 1, 2, \dots\}$ također ordinalni broj — i to vrlo bitan. Ordinalne brojeve najčešće označavamo malim grčkim slovima, poput α, β, γ. Kada govorimo specifično o **konačnim ordinalnim brojevima** $n \in \omega$ (odnosno prirodnim brojevima), označavat ćemo ih malim latiničnim slovima.

Uređaj $<$ za uspoređivanje ordinalnih brojeva α i β definiramo kao:

$$\alpha < \beta :\Leftrightarrow \alpha \in \beta.$$

Lema 1.3.2. *Ako je α ordinalni broj i $\beta \in \alpha$, tada je β ordinalni broj.*

Teorija ordinalnih brojeva je kompleksna pa ćemo ovdje navesti samo neke bitnije tvrdnje. Prvo navodimo teorem koji kaže da su svi ordinalni brojevi usporedivi; to nam je potrebno kasnije pri razvijanju algoritma za uspoređivanje ordinala. Taj teorem podsjeća na teorem 1.2.2 te se pomoću njega i dokazuje.

Teorem 1.3.3 (Totalnost uređaja na ordinalnim brojevima)**.** *Ako su α i β ordinalni brojevi, tada vrijedi točno jedno od sljedećeg:*

$$\alpha = \beta,\ \alpha < \beta \text{ ili } \alpha > \beta.$$

Korolar 1.3.4. *Svaki skup ordinalnih brojeva je dobro uređen relacijom $\in$.*

Sljedeći teorem iznimno je važan jer opravdava definiciju ordinalnog broja kao reprezentanta klase svih međusobno sličnih dobro uređenih skupova.

Teorem 1.3.5 (Teorem enumeracije)**.** *Za svaki dobro uređeni skup $(A, <)$ postoji jedinstveni ordinalni broj α takav da je $(\alpha, \in) \simeq (A, <)$.*

Definicija 1.3.6. *Neka je $(A, <)$ dobro uređen skup. Jedinstveni ordinalni broj α za koji vrijedi $(\alpha, \in) \simeq (A, <)$ zovemo **ordinalni broj skupa A**. Označavamo ga s $o(A)$.*

Vidjeli smo da je $(\mathbb{N}, <)$ dobro uređen skup. Ordinalni broj $o((\mathbb{N}, <))$ je upravo ω. Za klasu svih ordinalnih brojeva koristimo oznaku **On**.

Za definiciju aritmetičkih operacija još će biti bitno da za svaki neprazan skup ordinalnih brojeva postoji supremum i infimum: ako je $A \neq \emptyset$ neki skup ordinalnih brojeva, vrijedi

$$\inf A = \bigcap_{\alpha \in A} \alpha \ \text{ i } \ \sup A = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha.$$

Znamo da je svaki prirodni broj osim nule sljedbenik nekog prirodnog broja. Promatrajući ordinale vidimo da takva tvrdnja ne vrijedi, odnosno da nam treba još jedna kategorija za brojeve poput ω. Kako bismo mogli definirati te kategorije, prvo iskažimo sljedeću propoziciju.

Propozicija 1.3.7. *Za svaki ordinalni broj α, skup $\alpha^+ := \alpha \cup \{\alpha\}$ je ordinalni broj, koji zovemo **neposrednim sljedbenikom** od α. Također, za ordinalne brojeve α i β vrijedi $\alpha < \beta$ ako i samo ako je $\alpha^+ \leq \beta$.*

Definicija 1.3.8. *Za ordinalni broj α kažemo da je **sljedbenik** ako postoji ordinalni broj β takav da vrijedi $\alpha = \beta^+$. Ako je ordinalni broj različit od nule i nije sljedbenik, tada za njega kažemo da je **granični ordinal**.*

Kao što smo već spomenuli, svi prirodni brojevi osim nule su sljedbenici. No postoje i sljedbenici koji nisu prirodni brojevi, poput $\omega + 1 := \omega^+$ i $\omega + 2 := (\omega^+)^+$. S druge strane, ω je najmanji granični ordinal. Primjenjujući aritmetičke operacije dobivamo još mnogo ordinala, kao što ćemo vidjeti u sljedećem poglavlju. No, prije nastavka trebamo navesti teorem transfinitne indukcije za ordinalne brojeve, koji ćemo koristiti u dokazivanju svojstava spomenutih aritmetičkih operacija. Transfinitna indukcija je generalizacija matematičke indukcije u smislu da umjesto *skupa* prirodnih brojeva promatramo *klasu* ordinalnih brojeva. Zbog toga nam je potrebna sljedeća pomoćna tvrdnja.

Lema 1.3.9. *Ako je P svojstvo ordinalnih brojeva takvo da postoji ordinalni broj s tim svojstvom, onda postoji i najmanji ordinalni broj sa svojstvom P.*

Dokaz. Neka je α neki ordinalni broj takav da vrijedi $P(\alpha)$. Označimo $B := \{\beta \in \alpha : P(\beta)\}$. To je skup ordinalnih brojeva jer vrijedi $B \subseteq \alpha$. Ako je B prazan, tada je upravo α najmanji ordinal sa svojstvom P. Ako je B neprazan, prema korolaru 1.3.4 znamo da ima najmanji element: označimo ga s γ. Pretpostavimo da postoji ordinal $\delta < \gamma$ koji ima svojstvo P. Tada prema tranzitivnosti iz $\delta < \gamma < \alpha$ slijedi $\delta < \alpha$ pa bi bio $\delta \in B$, što je u kontradikciji s minimalnošću elementa γ. Dakle, γ je najmanji ordinal sa svojstvom P. □

Teorem 1.3.10 (Stroga transfinitna indukcija)**.** *Neka je P neko svojstvo ordinalnih brojeva. Ako vrijedi:*

$$(\forall \alpha \in \mathbf{On})((\forall \beta < \alpha)\, P(\beta) \Rightarrow P(\alpha)) \tag{$*$}$$

tada za svaki ordinalni broj α vrijedi $P(\alpha)$.

Dokaz. Neka vrijedi $(*)$. Pretpostavimo suprotno, da postoji ordinalni broj α takav da ne vrijedi $P(\alpha)$. Definiramo svojstvo R pomoću $R(\xi) :\Leftrightarrow \neg P(\xi)$. Tada vrijedi $R(\alpha)$ pa prema lemi 1.3.9 postoji najmanji ordinal sa svojstvom R, označimo ga s γ. Zbog minimalnosti od γ znamo da za sve $\beta < \gamma$ vrijedi $P(\beta)$ pa prema $(*)$ vrijedi $P(\gamma)$. Došli smo do kontradikcije s $R(\gamma)$, pa zaključujemo da je pretpostavka bila kriva. □

Često je zgodnije koristiti oblik transfinitne indukcije koji odvojeno promatra slučajeve ovisno o kategoriji ordinala.

Teorem 1.3.11 (Transfinitna indukcija)**.** *Neka je P neko svojstvo ordinalnih brojeva. Ako vrijedi:*

(I) $P(0)$,

(II) *za svaki ordinalni broj α, ako $P(\alpha)$ onda $P(\alpha^+)$, te*

(III) *za svaki granični ordinalni broj γ, ako $(\forall\beta < \gamma)P(\beta)$ onda $P(\gamma)$,*

tada za svaki ordinalni broj α vrijedi $P(\alpha)$.

Dokaz. Neka vrijede (I), (II) i (III). Pretpostavimo suprotno, da postoji ordinalni broj α takav da ne vrijedi $P(\alpha)$.

Definiramo svojstvo R pomoću $R(\xi) :\Leftrightarrow \neg P(\xi)$. Tada vrijedi $R(\alpha)$ pa prema lemi 1.3.9 postoji najmanji ordinal sa svojstvom R, označimo ga s γ. Raspišimo slučajeve ovisno o tome kakav je γ.

Ako je $\gamma = 0$, to znači da ne vrijedi P(0) što je u kontradikciji s tvrdnjom (I).

Ako je γ sljedbenik, postoji β takav da $\gamma = \beta^+$. Po definiciji neposrednog sljedbenika znamo da vrijedi $\beta < \beta^+ = \gamma$ pa zbog minimalnosti γ mora vrijediti $P(\beta)$. No, sada smo došli do kontradikcije s tvrdnjom (II) jer vrijedi $P(\beta)$ i $\neg P(\beta^+)$.

Ako je γ granični ordinal, zbog minimalnosti od γ znamo da za sve $\beta < \gamma$ vrijedi $P(\beta)$. No, sada smo došli do kontradikcije s tvrdnjom (III).

To znači da ne postoji ordinalni broj za koji ne vrijedi svojstvo P, odnosno, za svaki ordinalni broj α vrijedi $P(\alpha)$. □

Kako bismo mogli uvesti operacije zbrajanja, množenja i potenciranja ordinalnih brojeva, nije dovoljno imati princip transfinite indukcije, nego je definiciju potrebno opravdati transfinitnom rekurzijom iskazanom u sljedećem teoremu. Dokaz teorema se može naći u [4].

Teorem 1.3.12 (Teorem rekurzije)**.** *Neka je $\mathbf{S}$ klasa. Neka je $s_0 \in \mathbf{S}$ i neka je $\mathbf{G}\colon \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ proizvoljna skupovna operacija. Označimo*

$$\mathbf{\Phi} := \{f : \text{postoji granični ordinalni broj } \beta \text{ takav da je } f\colon \beta \to \mathbf{S}\}.$$

Neka je $\mathbf{F}\colon \mathbf{\Phi} \to \mathbf{S}$ proizvoljna skupovna operacija. Tada postoji jedinstvena skupovna operacija $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbf{On} \to \mathbf{S}$ takva da za sve $\beta \in \mathbf{On}$ vrijedi

$$\boldsymbol{\varphi}(\beta) = \begin{cases} s_0, & \text{ako je } \beta = 0, \\ \mathbf{G}\big(\boldsymbol{\varphi}(\gamma)\big), & \text{ako je } \beta = \gamma^+, \\ \mathbf{F}\left(\boldsymbol{\varphi}|_\beta\right), & \text{ako je } \beta \text{ granični ordinal.} \end{cases}$$

Napomena 1.3.13. *Na osnovi teorema rekurzije možemo konstruirati opću rekurzivnu shemu.*
Neka je $x \in \mathbf{On}$ i $\mathbf{G} \colon \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ skupovna operacija. Tada iz teorema rekurzije slijedi da postoji jedinstvena $\boldsymbol{\varphi} \colon \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ takva da vrijedi:

(i) $\boldsymbol{\varphi}(0) = x$;

(ii) $\boldsymbol{\varphi}(\beta^+) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\varphi}(\beta))$;

(iii) $\boldsymbol{\varphi}(\beta) = \sup\{\boldsymbol{\varphi}(\gamma) : \gamma < \beta\}$, *ako je β granični ordinal.*

Zbog te napomene, ubuduće ćemo navođenje tri svojstva operacije iz rekurzivne sheme smatrati *definicijom*, što ona i jest jer doista u potpunosti određuje traženu operaciju.

Binarnu operaciju $*$ rekurzivno definiramo tako da fiksiramo lijevi operand $\alpha \in \mathbf{On}$. Ako $\alpha * \beta$ za fiksni α označimo s $\boldsymbol{\varphi}_\alpha(\beta)$, tada svaku funkciju $\boldsymbol{\varphi}_\alpha$ možemo definirati rekurzivnom shemom. Nakon toga jednostavno definiramo $\alpha * \beta := \boldsymbol{\varphi}_\alpha(\beta)$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$. Slično možemo, koristeći ekvivalencije umjesto jednakosti, definirati i relacije na **On** (pogledajte definiciju 2.0.6 za primjer).

Poglavlje 2

Aritmetika ordinalnih brojeva

U prethodnom smo se poglavlju upoznali s pojmom ordinalnih brojeva; u ovome nam je cilj predstaviti aritmetičke operacije s njima. U prva tri potpoglavlja ćemo rekurzivno definirati operacije zbrajanja, množenja i potenciranja te dokazati njihova svojstva. Zatim ćemo opisati Cantorovu normalnu formu u kojoj zapisujemo ordinalne brojeve te koja služi kao osnova implementacije ordinala u kalkulatoru. Za kraj pokazujemo svojstvo apsorpcije za zbrajanje i množenje.

Prije nego krenemo s definiranjem operacija pokazat ćemo nekoliko tvrdnji koje će nam pomoći u dokazivanju njihovih svojstava. U svim tvrdnjama ćemo pretpostavljati da su α, β, γ, δ i ε ordinalni brojevi.

Lema 2.0.1. *Neka su A, B skupovi ordinala. Ako vrijedi $(\forall\alpha \in A)(\exists\beta \in B)(\alpha \leq \beta)$, tada je $\sup A \leq \sup B$.*

Dokaz. Iz definicije 1.1.3 znamo da je supremum skupa A najmanja gornja među skupa A. Dovoljno će nam biti pokazati da je svaka gornja međa od B (pa specijalno i $\sup B$) ujedno i gornja međa od A (i kao takva veća ili jednaka $\sup A$).

Neka je γ gornja međa od B, i neka je α' proizvoljni element skupa A. Tada po pretpostavci postoji $\beta' \in B$ takav da $\beta' \geq \alpha'$ pa je onda $\gamma \geq \beta' \geq \alpha'$. To znači da je $\gamma \geq \alpha$ za sve $\alpha \in A$, odnosno γ je gornja međa skupa A. Dobili smo $\sup A \leq \sup B$. □

Sljedeću lemu navodimo kao shemu u koju ćemo po potrebi moći uvesti operacije zbrajanja, množenja ili potenciranja. Podsjetimo se: za binarnu operaciju $\circ$ kažemo da je *strogo monotona slijeva* ako postoji $\mu_\circ \in \mathbf{On}$ takav da $\alpha \geq \mu_\circ$ i $\beta < \gamma$ povlače $\alpha \circ \beta < \alpha \circ \gamma$. Vidjet ćemo da je $\mu_+ = 0$, $\mu_\cdot = 1$ i $\mu_\wedge = 2$.

Lema 2.0.2. *Neka su $\circ$ i $*$ binarne operacije definirane pomoću rekurzivne sheme uvedene napomenom 1.3.13 za koje vrijedi stroga monotonost slijeva. Neka su $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{On}$ takvi da su $\alpha \geq \mu_\circ$ i $\beta \geq \mu_*$ te γ granični ordinal. Tada skupovi ordinala $A := \{\alpha \circ \varepsilon : \varepsilon < \beta * \gamma\}$ i $B := \{\alpha \circ (\beta * \delta) : \delta < \gamma\}$ imaju isti supremum.*

Dokaz. Pokažimo da su A i B skupovi ordinala. Za $\alpha \circ \varepsilon \in A$ vrijedi $\varepsilon < \beta * \gamma$. Koristeći strogu lijevu monotonost od $\circ$ dobivamo $\alpha \circ \varepsilon < \alpha \circ (\beta * \gamma)$. To znači da je $A \subseteq \alpha \circ (\beta * \gamma)$.

Za $\alpha \circ (\beta * \delta) \in B$ vrijedi $\delta < \gamma$. Koristeći strogu lijevu monotonost od $*$ dobivamo $\beta * \delta < \beta * \gamma$, a onda koristeći strogu lijevu monotonost od $\circ$ dobivamo $\alpha \circ (\beta * \delta) < \alpha \circ (\beta * \gamma)$. To znači da je $B \subseteq \alpha \circ (\beta * \gamma)$.

Preostalo je pokazati $\sup A = \sup B$. Neka je $\delta < \gamma$ (dakle, $\alpha \circ (\beta * \delta) \in B$). Označimo $\varepsilon := \beta * \delta$. Primjenjujući lijevu monotonost operacije $*$ (vrijedi $\beta \geq \mu_*$) dobivamo $\varepsilon < \beta * \gamma$, odnosno vrijedi $\alpha \circ \varepsilon \in A$. Iz jednakosti $\alpha \circ (\beta * \delta) = \alpha \circ \varepsilon$ slijedi $\alpha \circ (\beta * \delta) \leq \alpha \circ \varepsilon$. Dakle, vrijedi pretpostavka leme 2.0.1 pa slijedi $\sup B \leq \sup A$.

Neka je $\varepsilon < \beta * \gamma$ (dakle, $\alpha \circ \varepsilon \in A$). Označimo $\mathbf{D} := \{\zeta : \beta * \zeta \geq \varepsilon\}$. Vrijedi $\gamma \in \mathbf{D}$, odnosno $\mathbf{D}$ je neprazna. Tada prema lemi 1.3.9 postoji najmanji ordinalni broj δ takav da vrijedi $\beta * \delta \geq \varepsilon$. Iz $\gamma \in \mathbf{D}$ slijedi $\delta \leq \gamma$. Ako je $\delta = \gamma$, tada za svaki $\zeta < \gamma$ vrijedi $\zeta \notin D$, odnosno $\beta * \zeta < \varepsilon$. Tada koristeći tvrdnju (iii) definicije operacije $*$ imamo :

$$\varepsilon < \beta * \gamma \overset{\text{(iii)}}{=} \sup\{\beta * \zeta : \zeta < \gamma\} \leq \varepsilon,$$

a znamo da ne može vrijediti $\varepsilon < \varepsilon$ zbog irefleksivnosti. Dobili smo da vrijedi $\delta < \gamma$, odnosno vrijedi $\alpha \circ (\beta * \gamma) \in B$. Odabrali smo δ takav da je $\varepsilon \leq \beta * \delta$ pa primjenjujući lijevu monotonost operacije $\circ$ (vrijedi $\alpha \geq \mu_\circ$) dobivamo $\alpha \circ \varepsilon \leq \alpha \circ (\beta * \delta)$. Dakle, vrijedi pretpostavka leme 2.0.1 pa slijedi $\sup A \leq \sup B$. □

Lema 2.0.3. *Neka je α granični ordinal. Ako je $\beta \in \alpha$, tada je $\beta^+ \in \alpha$.*

Dokaz. Zbog $\beta \in \alpha$, vrijedi $\beta < \alpha$ pa je $\beta^+ \leq \alpha$ prema propoziciji 1.3.7. Ne može vrijediti $\alpha = \beta^+$ jer je α granični ordinal. Dobivamo $\beta^+ < \alpha$, odnosno $\beta^+ \in \alpha$. □

Lema 2.0.4. *Ako je α granični ordinal, tada vrijedi* $\sup\{\beta : \beta < \alpha\} = \alpha$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada zbog totalnosti uređaja na ordinalima (teorem 1.3.3) vrijedi $\sup\{\beta : \beta < \alpha\} < \alpha$ ili $\sup\{\beta : \beta < \alpha\} > \alpha$.

Ako vrijedi $\sup\{\beta : \beta < \alpha\} < \alpha$, tada je $(\sup\{\beta : \beta < \alpha\})^+ < \alpha$ prema lemi 2.0.3. Onda znamo da je on, kao element skupa $\{\beta : \beta < \alpha\}$, sigurno manji od supremuma tog skupa: $(\sup\{\beta : \beta < \alpha\})^+ \leq \sup\{\beta : \beta < \alpha\}$, a s druge strane po definiciji 1.3.7 znamo $\sup\{\beta : \beta < \alpha\} < (\sup\{\beta : \beta < \alpha\})^+$. Dakle, došli smo do kontradikcije s teoremom 1.3.3.

Ako vrijedi $\sup\{\beta : \beta < \alpha\} > \alpha$, to znači da postoji $\beta < \alpha$ takav da je $\alpha < \beta$. Iz toga po tranzitivnosti uređaja slijedi $\beta < \beta$, što ne može vrijediti zbog irefleksivnosti pa smo došli do kontradikcije.

Dakle, pretpostavka je bila kriva, odnosno vrijedi $\sup\{\beta : \beta < \alpha\} = \alpha$. □

Direktna posljedica leme 2.0.3 je sljedeća tvrdnja.

Korolar 2.0.5. *Ako je $n \in \omega$, tada je $n^+ \in \omega$.*

Napišimo još transfinitnu definiciju relacije $<$.

Definicija 2.0.6. *Postoji jedinstvena binarna relacija* $(<) \subseteq \mathbf{On} \times \mathbf{On}$ *takva da za sve* $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$ *vrijedi:*

u(i) $\alpha < 0 \Leftrightarrow \bot$*;*

u(ii) $\alpha < \beta^+ \Leftrightarrow \alpha < \beta \vee \alpha = \beta$*;*

u(iii) $\alpha < \beta \Leftrightarrow (\exists \gamma \in \beta)(\alpha < \gamma)$*, ako je* β *granični ordinalni broj.*

Teorem 2.0.7. *Definicija 2.0.6 je ekvivalentna uobičajenoj definiciji:*

$$\alpha < \beta :\Leftrightarrow \alpha \in \beta.$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti transfinitnom indukcijom po β.

I. Neka je $\alpha \in 0$. Ako je $\beta = 0$, to zapravo znači da je $\beta = \emptyset$. Znamo da ni za koji ordinal α ne vrijedi $\alpha \in \emptyset$. Dobili smo kontradikciju pa je prema tvrdnji u(i) to ekvivalentno s $\alpha < 0$.

II. Neka je $\beta = \gamma^+$, i pretpostavimo da vrijedi $\alpha < \gamma \Leftrightarrow \alpha \in \gamma$. Prema definiciji neposrednog sljedbenika 1.3.7 znamo da je $\gamma^+ = \gamma \cup \{\gamma\}$ pa koristeći tvrdnju u(ii) imamo:

$$\alpha \in \beta \Leftrightarrow \alpha \in \gamma \cup \{\gamma\} \Leftrightarrow \alpha \in \gamma \vee \alpha \in \{\gamma\} \overset{\text{p.i.}}{\Leftrightarrow} \alpha < \gamma \vee \alpha = \gamma \overset{\text{u(ii)}}{\Leftrightarrow} \alpha < \beta.$$

III. Neka je β granični ordinal, i pretpostavimo da za sve $\gamma < \beta$ vrijedi $\alpha < \gamma \Leftrightarrow \alpha \in \gamma$. Prema lemi 2.0.4 znamo da vrijedi $\beta = \sup\{\gamma : \gamma \in \beta\} = \bigcup\{\gamma : \gamma \in \beta\}$ pa koristeći tvrdnju u(iii) imamo:

$$\alpha \in \beta \Leftrightarrow \alpha \in \bigcup\{\gamma : \gamma \in \beta\} \Leftrightarrow (\exists \gamma \in \beta)(\alpha \in \gamma) \overset{\text{p.i.}}{\Leftrightarrow} (\exists \gamma \in \beta)(\alpha < \gamma) \overset{\text{u(iii)}}{\Leftrightarrow} \alpha < \beta. \qquad \square$$

2.1 Zbrajanje ordinalnih brojeva

Prije formalne definicije objasnimo intuiciju zbrajanja ordinalnih brojeva. Principi aritmetike ordinalnih brojeva u velikoj se mjeri temelje na tome kako su elementi poredani (prisjetimo se usporedbe s rednim brojevima).

Zbrajanje konačnih ordinala odgovara u potpunosti zbrajanju prirodnih brojeva pa nema smisla dublje ga objašnjavati. Kod beskonačnih ordinala je drugačije — na primjer, zbrajanje više nije komutativno. Uzmimo za primjer izraze $\omega + 3$ i $3 + \omega$ te ih izračunajmo. Broj $\omega + 3$ možemo prikazati na sljedeći način:

$$0, 1, 2, \ldots; \ 0, 1, 2$$

i računamo ga tako da iznova prebrojimo niz te stavimo prikladne „redne brojeve” za svaki njegov član:

$$0, 1, 2, \dots ; \omega, \omega + 1, \omega + 2.$$

Prikladnim smatramo prvi neiskorišteni ordinal, a kako znamo da će se među $0, 1, \dots$ pojaviti svi ordinali manji od ω, prvi neiskorišten će biti upravo ω. Ovo se možda na prvi pogled čini vrlo jasnim jer smo dobili sve ordinalne brojeve manje od $\omega+3$, no pogledajmo što se dogodi kod računanja $3 + \omega$. Njega prikazujemo kao:

$$0, 1, 2; \ 0, 1, 2, \dots$$

i ponovnim prebrojavanjem dobivamo:

$$0, 1, 2; \ 3, 4, 5, \dots$$

Imamo navedene sve ordinale manje od ω pa je $3 + \omega = \omega$. Znači, poredak pribrojnika u zbrajanju ordinalnih brojeva je bitan, odnosno ne vrijedi svojstvo komutativnosti.

Sada možemo formalno uvesti zbrajanje ordinala koristeći rekurzivnu shemu uvedenu napomenom 1.3.13, rekurzivnu s obzirom na oblik desnog pribrojnika. Definicija je preuzeta iz [5].

Definicija 2.1.1. *Postoji jedinstvena funkcija* $+ \colon \mathbf{On} \times \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ *takva da za sve* $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$ *vrijedi:*

z(i) $\alpha + 0 = \alpha$*;*

z(ii) $\alpha + \beta^{+} = (\alpha + \beta)^{+}$*;*

z(iii) $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\}$*, ako je* β *granični ordinalni broj.*

Upravo opisanu funkciju zovemo ***zbrajanje ordinalnih brojeva****.*

Svojstva zbrajanja

Pokazat ćemo elementarna svojstva zbrajanja ordinalnih brojeva. U svim tvrdnjama ćemo pretpostavljati da su α, β, γ, δ, ε i ξ ordinalni brojevi.

Lema 2.1.2. $0 + \alpha = \alpha$.

Dokaz. Dokaz ćemo provesti koristeći transfinitnu indukciju (1.3.11) u tri koraka.

I. Neka je $\alpha = 0$. Trebamo pokazati da je $0 + 0 = 0$, a to vrijedi prema tvrdnji z(i).

II. Pretpostavimo da je $0 + \alpha = \alpha$. Tada koristeći tvrdnju z(ii) dobivamo traženo:

$$0 + \alpha^+ \overset{\text{z(ii)}}{=} (0 + \alpha)^+ \overset{\text{p.i.}}{=} \alpha^+.$$

III. Neka je α granični ordinal. Pretpostavimo da za svaki $\beta < \alpha$ vrijedi $0 + \beta = \beta$. Tada koristeći tvrdnju z(iii) dobivamo traženo:

$$0 + \alpha \overset{\text{z(iii)}}{=} \sup\{0 + \beta : \beta < \alpha\} \overset{\text{p.i.}}{=} \sup\{\beta : \beta < \alpha\} \overset{2.0.4}{=} \beta.$$

Sada možemo zaključiti da $0 + \alpha = \alpha$ vrijedi za sve ordinalne brojeve α. □

Lema 2.1.3. $\alpha + 1 = \alpha^+$.

Dokaz. Koristeći tvrdnje definicije 2.1.1 dobivamo:

$$\alpha + 1 = \alpha + 0^+ \overset{\text{z(ii)}}{=} (\alpha + 0)^+ \overset{\text{z(i)}}{=} \alpha^+.$$ □

Pokazat ćemo da je zbrajanje strogo monotono slijeva, dok zdesna imamo monotonost, no ne strogu.

Teorem 2.1.4. *Ako je $\beta < \gamma$, tada je $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti koristeći transfinitnu indukciju po γ.

I. Neka je $\gamma = 0$. Prema tvrdnji u(i) ne može vrijediti $\beta < 0$ pa tvrdnja trivijalno vrijedi.

II. Pretpostavimo da ako $\beta < \gamma$, tada je $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$. Sada neka je $\beta < \gamma^+$, što po tvrdnji u(ii) znači da je ili $\beta < \gamma$ ili $\beta = \gamma$. Raspišimo što vrijedi ovisno o slučaju.

$\beta < \gamma$: Znamo da po definiciji neposrednog sljedbenika 1.3.7 vrijedi $\alpha + \gamma < (\alpha + \gamma)^+$ pa dobivamo:

$$\alpha + \beta \overset{\text{p.i.}}{<} \alpha + \gamma \overset{1.3.7}{<} (\alpha + \gamma)^+ \overset{\text{z(ii)}}{=} \alpha + \gamma^+.$$

$\beta = \gamma$: Tada vrijedi $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$. Ponovno koristeći definiciju neposrednog sljedbenika imamo:

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma \overset{1.3.7}{<} (\alpha + \gamma)^+ \overset{\text{z(ii)}}{=} \alpha + \gamma^+.$$

III. Neka je γ granični ordinal. Pretpostavimo da za svaki $\delta < \gamma$ vrijedi: ako je $\beta < \delta$ onda je $\alpha + \beta < \alpha + \delta$. Sada neka je $\beta < \gamma$. Znamo po lemi 2.0.3 da tada vrijedi $\beta^+ < \gamma$. Koristeći tvrdnju z(iii) dobivamo:

$$\alpha + \gamma \overset{\text{z(iii)}}{=} \sup\{\alpha + \delta : \delta < \gamma\} \overset{(*)}{\geq} \alpha + \beta^+ > \alpha + \beta,$$

gdje $(*)$ vrijedi jer je supremum skupa ordinalnih brojeva sigurno veći ili jednak bilo kojem elementu tog skupa, a znamo da je β^+ jedan od mogućih δ. □

Direktne posljedice teorema 2.1.4 i teorema 1.3.3 su sljedeće dvije tvrdnje.

Korolar 2.1.5. *Ako vrijedi $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, tada je $\beta = \gamma$.*

Dokaz. Pretpostavimo $\alpha+\beta = \alpha+\gamma$ i $\beta \neq \gamma$. Tada po teoremu 1.3.3 mora biti $\beta < \gamma$ ili $\beta > \gamma$. Ako je $\beta < \gamma$, prema teoremu 2.1.4 slijedi $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ što je u kontradikciji s početnom tvrdnjom po irefleksivnosti. U slučaju $\beta > \gamma$ bismo jednako tako dobili kontradikciju. Znači, mora biti $\beta = \gamma$. □

Korolar 2.1.6. *Ako je $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$, tada je $\beta < \gamma$.*

Dokaz. Pretpostavimo $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ i $\beta \geq \gamma$. Ako je $\beta = \gamma$, tada je $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ što je kontradikcija s teoremom 1.3.3. Ako je $\beta > \gamma$, tada po teoremu 2.1.4 vrijedi $\alpha + \beta > \alpha + \gamma$ što je ponovno kontradikcija s teoremom 1.3.3. Znači, mora biti $\beta < \gamma$. □

Teorem 2.1.7. *Ako je $\alpha \leq \beta$, tada je $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.*

Dokaz. Neka su α i β proizvoljni ordinalni brojevi takvi da je $\alpha \leq \beta$.
Sada tvrdnju $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ dokazujemo koristeći transfinitnu indukciju po γ.

I. Neka je $\gamma = 0$. Prema tvrdnji z(i) direktno slijedi:

$$\alpha + 0 \overset{\text{z(i)}}{=} \alpha \ \leq \ \beta \overset{\text{z(i)}}{=} \beta + 0.$$

II. Pretpostavimo da je $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$. Ako je $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$, po propoziciji 1.3.7 znamo da onda vrijedi $(\alpha + \gamma)^+ \leq \beta + \gamma < (\beta + \gamma)^+$, a ako je $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ onda vrijedi $(\alpha + \gamma)^+ = (\beta + \gamma)^+$ pa dobivamo:

$$\alpha + \gamma^+ \overset{\text{z(ii)}}{=} (\alpha + \gamma)^+ \overset{\text{p.i.}}{\leq} (\beta + \gamma)^+ \overset{\text{z(ii)}}{=} \beta + \gamma^+.$$

III. Neka je γ granični ordinal. Pretpostavimo da za svaki $\delta < \gamma$ vrijedi $\alpha + \delta \leq \beta + \delta$. Koristeći tvrdnju z(iii) dobivamo:

$$\alpha + \gamma \overset{\text{z(iii)}}{=} \sup\{\alpha + \delta : \delta < \gamma\} \overset{(*)}{\leq} \sup\{\beta + \delta : \delta < \gamma\} \overset{\text{z(iii)}}{=} \beta + \gamma.$$

Do nejednakosti $(*)$ dolazimo koristeći lemu 2.0.1 uz oznake $A := \{\alpha + \delta : \delta < \gamma\}$ i $B := \{\beta + \delta : \delta < \gamma\}$. Prema pretpostavci indukcije znamo da vrijedi $\alpha + \delta \leq \beta + \delta$ pa slijedi $\sup A \leq \sup B$. □

Napomena 2.1.8. *Monotonost zdesna nije stroga, što lako vidimo iz sljedećeg protuprimjera. Znamo da je $1 < 2$ jer je $1 \in 2 = \{0, 1\}$. Odredimo odnos između $1 + \omega$ i $2 + \omega$:*

$$1 + \omega = \sup\{1 + n : n < \omega\} = \omega = \sup\{2 + n : n < \omega\} = 2 + \omega,$$

što znači da ne vrijedi $1 + \omega < 2 + \omega$ po irefleksivnosti.

Lema 2.1.9. *Ako je β granični ordinal, tada je $\alpha + \beta$ također granični ordinal.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\alpha + \beta$ nije granični ordinal. Kako za svaki ordinal zbog teorema 1.3.3 i tvrdnje u(i) vrijedi $\alpha \geq 0$, dobivamo:

$$\alpha + \beta \overset{2.1.7}{\geq} 0 + \beta \overset{2.1.2}{=} \beta > 0,$$

tako da $\alpha + \beta$ mora biti sljedbenik. Tada postoji γ takav da je $\gamma^+ = \alpha + \beta$. Primjenjujući tvrdnju z(iii) definicije 2.1.1 dobivamo $\gamma^+ = \sup\{\alpha + \delta : \delta < \beta\}$. Prema propoziciji 1.3.7 znamo da je onda $\gamma < \sup\{\alpha + \delta : \delta < \beta\}$, pa to znači (po u(iii)) da postoji $\delta < \beta$ takav da $\gamma < \alpha + \delta$. Ponovno koristeći propoziciju 1.3.7 i onda teorem 2.1.4 dobivamo:

$$\gamma^+ \leq \alpha + \delta \overset{2.1.4}{<} \alpha + \beta.$$

Sada imamo $\gamma^+ = \alpha + \beta$ i $\gamma^+ < \alpha + \beta$, a to je kontradikcija s teoremom 1.3.3. Dakle, pretpostavka je bila kriva. □

Sljedeće pokazujemo asocijativnost zbrajanja.

Teorem 2.1.10. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Dokaz. Dokaz ćemo provesti koristeći transfinitnu indukciju po γ.

I. Neka je $\gamma = 0$. Tada očito vrijedi $\alpha + (\beta + 0) = \alpha + \beta = (\alpha + \beta) + 0$ prema tvrdnji z(i).

II. Pretpostavimo da je $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ za sve α, β i γ. Pokažimo da tvrdnja vrijedi za sljedbenik od γ:

$$\begin{aligned} \alpha + (\beta + \gamma^+) &\overset{z(ii)}{=} \alpha + (\beta + \gamma)^+ \\ &\overset{z(ii)}{=} \Big(\alpha + (\beta + \gamma)\Big)^+ \\ &\overset{p.i.}{=} \Big((\alpha + \beta) + \gamma\Big)^+ \\ &\overset{z(ii)}{=} (\alpha + \beta) + \gamma^+. \end{aligned}$$

III. Neka je γ granični ordinal. Pretpostavimo da za svaki $\delta < \gamma$ vrijedi $\alpha + (\beta + \delta) = (\alpha + \beta) + \delta$. Tada koristeći tvrdnju z(iii) i činjenicu da je $\beta + \gamma$ granični ordinal (lema 2.1.9) dobivamo:

$$\begin{aligned} \alpha + (\beta + \gamma) &\overset{\substack{2.1.9 \\ z(iii)}}{=} \sup\{\alpha + \varepsilon : \varepsilon < \beta + \gamma\} \\ &\overset{(*)}{=} \sup\{\alpha + (\beta + \delta) : \delta < \gamma\} \\ &\overset{p.i.}{=} \sup\{(\alpha + \beta) + \delta) : \delta < \gamma\} \\ &\overset{z(iii)}{=} (\alpha + \beta) + \gamma. \end{aligned}$$

Pojasnimo kako smo došli do jednakosti $(*)$. U shemu leme 2.0.2 stavimo $\circ := * := +$. Za strogu lijevu monotonost zbrajanja vrijedi $\mu_+ = 0$, odnosno to svojstvo vrijedi i za α i za β. Označimo skupove

$$A := \sup\{\alpha + \varepsilon : \varepsilon < \beta + \gamma\} \text{ i } B := \sup\{\alpha + (\beta + \delta) : \delta < \gamma\}.$$

Vrijede pretpostavke leme 2.0.2 pa je $\sup A = \sup B$. □

Od sada nadalje, zbog asocijativnosti, možemo izostavljati zagrade u višestrukim zbrojevima ordinalnih brojeva.

Napomena 2.1.11. *Zbrajanje ordinalnih brojeva nije komutativno. To smo već pokazali kod opisivanja intuicije zbrajanja, no navedimo sada formalni protuprimjer:*

$$1 + \omega = \sup\{1 + n : n < \omega\} = \omega < \omega^+ = \omega + 1.$$

Dobili smo $1 + \omega < \omega + 1$ *pa prema teoremu 1.3.3 znamo da ne vrijedi* $1 + \omega = \omega + 1$.

Za kraj dokažimo teorem koji pokazuje da za ordinale postoji operacija slična oduzimanju.

Teorem 2.1.12. *Ako je* $\beta \leq \alpha$*, tada postoji jedinstveni* γ *takav da je* $\alpha = \beta + \gamma$.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $\beta \leq \alpha$. Označimo $A := \{\xi : \beta + \xi \leq \alpha\}$. To je skup ordinala jer je $A \subseteq \alpha^+$, što lako vidimo:

$$\xi \in A \Rightarrow \alpha \geq \beta + \xi \overset{2.1.7}{\geq} 0 + \xi \overset{2.1.2}{=} \xi \Rightarrow \alpha^+ > \xi \Rightarrow \xi \in \alpha^+.$$

Znamo i da je neprazan jer prema tvrdnji z(i) vrijedi $\beta + 0 = \beta \leq \alpha$, odnosno $0 \in A$. Sada znamo da postoji supremum skupa A te ga označimo s γ. Tvrdimo da vrijedi $\beta + \gamma = \alpha$.

Prvo ćemo pokazati da vrijedi $\beta + \gamma \leq \alpha$. Dokaz ćemo rastaviti na slučajeve ovisno o kategoriji od γ. Za $\gamma = 0$ smo već vidjeli da ta nejednakost vrijedi. To znači da nam je preostalo provjeriti tvrdnju za $\gamma = \delta^+$ i za γ granični ordinal. U prvom slučaju prema definiciji neposrednog sljedbenika 1.3.7 znamo da vrijedi $\delta < \gamma$. Tada je $\delta \in \gamma$, odnosno δ nije gornja međa od A, pa postoji $\xi \in A$ takav da je $\delta \in \xi$ te $\beta + \xi \leq \alpha$. Koristeći teorem 2.1.4 dobivamo $\beta + \delta < \beta + \xi \leq \alpha$. Prema propoziciji 1.3.7 i tvrdnji z(ii) će onda vrijediti $\alpha \geq (\beta + \delta)^+ = \beta + \delta^+ = \beta + \gamma$.

U drugom slučaju γ je granični ordinal. Znamo (kao u prvom slučaju) da za sve $\delta < \gamma$ vrijedi $\beta + \delta \leq \alpha$ pa koristeći lemu 2.0.1 dobivamo:

$$\beta + \gamma \overset{z(iii)}{=} \sup\{\beta + \delta : \delta < \gamma\} \overset{2.0.1}{\leq} \sup\{\alpha\} = \alpha.$$

Dakle, vrijedi $\beta + \gamma \leq \alpha$.

Pretpostavimo da je $\beta + \gamma < \alpha$, tada po propoziciji 1.3.7 imamo $(\beta + \gamma)^+ \leq \alpha$. Prema tvrdnji z(ii) znamo da je $\beta + \gamma^+ = (\beta + \gamma)^+ \leq \alpha$ pa iz toga slijedi $\gamma^+ \in A$. Dobili smo kontradikciju jer je $\gamma^+ > \gamma = \sup A$. Kako pretpostavka $\beta + \gamma < \alpha$ vodi na kontradikciju, a znamo da vrijedi $\beta + \gamma \leq \alpha$, po teoremu 1.3.3 mora biti $\beta + \gamma = \alpha$.

Pretpostavimo li sada da postoje γ_1 i γ_2 takvi da je

$$\alpha + \gamma_1 = \beta = \alpha + \gamma_2,$$

oni će prema korolaru 2.1.5 biti jednaki: $\gamma_1 = \gamma_2$. Dobili smo da je γ jedinstven. □

Za kraj ponovimo zaključke o svojstvima zbrajanja ordinalnih brojeva izvedene iz teorema i protuprimjera. Pokazali smo da je 0 neutralni element za zbrajanje (lema 2.1.2 i tvrdnja z(i)). Zbrajanje je asocijativno te monotono zdesna, a strogo monotono slijeva. Komutativnost ne vrijedi općenito.

2.2 Množenje ordinalnih brojeva

Množenje shvaćamo kao ponavljanje zbrajanja — pa kako smo već vidjeli da se ordinalno zbrajanje ne ponaša kao zbrajanje prirodnih brojeva, nije teško pretpostaviti da to neće biti slučaj ni s ordinalnim množenjem.

Slično kao kod zbrajanja demonstrirat ćemo intuiciju množenja ordinalnih brojeva tako da izračunamo $\omega \cdot 2$ i $2 \cdot \omega$. Prvi izraz možemo shvatiti na način da svakom elementu ordinala $2 = \{0, 1\}$ dodijelimo jednu kopiju ordinala $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$, time dobivamo:

$$0, 1, 2, \dots ; \ 0, 1, 2, \dots$$

i sada prebrojimo ponovno sve elemente:

$$0, 1, 2, \dots ; \ \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots$$

Vidimo da su navedeni svi ordinali manji od $\omega + \omega$. Drugi izraz shvaćamo tako da svakom elementu ordinala $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ dodijelimo jednu kopiju ordinala $2 = \{0, 1\}$:

$$0, 1; \ 0, 1; \ 0, 1; \dots$$

te onda ponovnim brojenjem:

$$0, 1; \ 2, 3; \ 4, 5; \dots$$

Navedeni su svi ordinali manji od ω pa vidimo da vrijedi $2 \cdot \omega = \omega$. Dolazimo do istog zaključka (kao kod zbrajanja), da je poredak faktora bitan.

Sada možemo formalno uvesti množenje ordinala koristeći rekurzivnu shemu uvedenu napomenom 1.3.13, rekurzivnu s obzirom na oblik desnog faktora. Definicija je preuzeta iz [5].

Definicija 2.2.1. *Postoji jedinstvena funkcija* $\cdot :$ **On** $\times$ **On** $\to$ **On** *takva da za sve* $\alpha, \beta \in$ **On** *vrijedi:*

m(i) $\alpha \cdot 0 = 0$*;*

m(ii) $\alpha \cdot \beta^+ = \alpha \cdot \beta + \alpha$*;*

m(iii) $\alpha \cdot \beta = \sup \{\alpha \cdot \gamma : \gamma < \beta\}$*, ako je* β *granični ordinalni broj.*

Upravo opisanu funkciju zovemo ***množenje ordinalnih brojeva****.*

Svojstva množenja

Pokazat ćemo elementarna svojstva množenja ordinalnih brojeva. U svim tvrdnjama ćemo pretpostavljati da su α, β, γ, δ, ε, ζ i ξ ordinalni brojevi.

Teorem 2.2.2. $0 \cdot \alpha = 0$.

Dokaz. Dokaz ćemo provesti koristeći transfinitnu indukciju po α.

I. Neka je $\alpha = 0$. Tada vrijedi $0 \cdot 0 = 0$ prema tvrdnji m(i).

II. Pretpostavimo da je $0 \cdot \alpha = 0$. Koristeći tvrdnju m(ii) dobivamo:

$$0 \cdot \alpha^+ \overset{\text{m(ii)}}{=} 0 \cdot \alpha + 0 \overset{\text{p.i.}}{=} 0 + 0 \overset{2.1.2}{=} 0.$$

III. Neka je α granični ordinal. Pretpostavimo da za svaki $\beta < \alpha$ vrijedi $0 \cdot \beta = 0$. Koristeći tvrdnju m(iii) dobivamo traženo:

$$0 \cdot \alpha \overset{\text{m(iii)}}{=} \sup \{0 \cdot \beta : \beta < \alpha\} \overset{\text{p.i.}}{=} \sup \{0 : \beta < \alpha\} = 0.$$ □

Iz narednih lema slijedit će da je 1 neutralni element za ordinalno množenje.

Lema 2.2.3. $\alpha \cdot 1 = \alpha$.

Dokaz. Znamo da je $1 = 0^+$ pa koristeći tvrdnju m(ii) dobivamo:

$$\alpha \cdot 1 \overset{\text{m(ii)}}{=} \alpha \cdot 0 + \alpha \overset{\text{z(i)}}{=} 0 + \alpha \overset{2.1.2}{=} \alpha.$$ □

Lema 2.2.4. $1 \cdot \alpha = \alpha$.

Dokaz. Dokaz ćemo provesti koristeći transfinitnu indukciju po α.

I. Neka je $\alpha = 0$. Tada vrijedi $1 \cdot 0 = 0$ prema tvrdnji m(i).

II. Pretpostavimo da je $1 \cdot \alpha = \alpha$. Koristeći tvrdnju m(ii) dobivamo:

$$1 \cdot \alpha^+ \overset{\text{m(ii)}}{=} 1 \cdot \alpha + 1 \overset{\text{p.i.}}{=} \alpha + 1 = \alpha^+.$$

III. Neka je α granični ordinal. Pretpostavimo da za svaki $\beta < \alpha$ vrijedi $1 \cdot \beta = \beta$. Koristeći tvrdnju m(iii) dobivamo :

$$1 \cdot \alpha \overset{\text{m(iii)}}{=} \sup\{1 \cdot \beta : \beta < \alpha\} \overset{\text{p.i.}}{=} \sup\{\beta : \beta < \alpha\} \overset{2.0.4}{=} \alpha.$$ □

Množenje ordinalima većima od nule je strogo monotono slijeva, dok zdesna ponovno nemamo strogu monotonost. U iskazu stroge monotonosti moramo dodati uvjet $\alpha > 0$ zbog teorema 2.2.2. Odnosno, vrijedit će $\mu_\cdot = 1$ iz definicije stroge lijeve monotnonosti.

Teorem 2.2.5. *Ako je $\beta < \gamma$ i $\alpha > 0$, tada je $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$.*

Dokaz. Neka je α proizvoljni ordinalni broj takav da je $\alpha > 0$. Sada tvrdnju da $\beta < \gamma$ povlači $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$ dokazujemo koristeći transfinitnu indukciju po γ.

I. Neka je $\gamma = 0$. Prema tvrdnji u(i) ne može vrijediti $\beta < 0$ pa tvrdnja trivijalno vrijedi.

II. Pretpostavimo da $\beta < \gamma$ povlači $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$. Sada pretpostavka $\beta < \gamma^+$ po tvrdnji u(ii) znači da je ili $\beta < \gamma$ ili $\beta = \gamma$. Raspišimo što vrijedi ovisno o slučaju.

$\beta < \gamma$: Kako je $\alpha > 0$, koristeći strogu lijevu monotonost zbrajanja dobivamo:

$$\alpha \cdot \beta \overset{\text{p.i.}}{<} \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + 0 \overset{2.1.4}{<} \alpha \cdot \gamma + \alpha \overset{\text{m(ii)}}{=} \alpha \cdot \gamma^+.$$

$\beta = \gamma$: Tada vrijedi $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$. Ponovno koristeći nejednakost kao u prethodnom slučaju imamo:

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + 0 \overset{2.1.4}{<} \alpha \cdot \gamma + \alpha \overset{\text{m(ii)}}{=} \alpha \cdot \gamma^+.$$

III. Neka je γ granični ordinal. Pretpostavimo da za svaki $\delta < \gamma$ vrijedi: ako je $\beta < \delta$, tada je $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \delta$. Neka je $\beta < \gamma$. Znamo po lemi 2.0.4 da tada vrijedi $\beta^+ < \gamma$. Koristeći tvrdnju m(iii) i nejednakost iz II. koraka dobivamo:

$$\alpha \cdot \gamma \overset{\text{m(iii)}}{=} \sup\{\alpha \cdot \delta : \delta < \gamma\} \overset{(*)}{\geq} \alpha \cdot \beta^+ \overset{\text{II.}}{>} \alpha \cdot \beta,$$

gdje $(*)$ vrijedi jer je supremum skupa ordinalnih brojeva sigurno veći ili jednak bilo kojem elementu tog skupa, a znamo da je β^+ jedan od mogućih δ. □

Kao posljedicu ovog teorema i totalnosti uređaja lako je pokazati da vrijedi i suprotni smjer.

Korolar 2.2.6. *Ako je $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$, tada je $\beta < \gamma$ i $\alpha > 0$.*

Dokaz. Neka je $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$.

Znamo da za ordinalni broj α sigurno vrijedi $\alpha \geq 0$ zbog teorema 1.3.3 i tvrdnje u(i). Pretpostavimo da je $\alpha = 0$. Tada koristeći teorem 2.2.2 dobivamo:

$$\alpha \cdot \beta = 0 \cdot \beta = 0 = 0 \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma,$$

što je u kontradikciji s teoremom 1.3.3. To znači da je pretpostavka kriva, odnosno vrijedi $\alpha > 0$.

Sada pretpostavimo da nije $\beta < \gamma$. Tada je ili $\beta = \gamma$ ili $\beta > \gamma$. Ako je $\beta = \gamma$, tada vrijedi ponovno $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$ što je u kontradikciji s teoremom 1.3.3. Ako je $\beta > \gamma$, prema teoremu 2.2.5 (već smo pokazali $\alpha > 0$) je $\alpha \cdot \beta > \alpha \cdot \gamma$. Ponovno smo došli do kontradikcje s teoremom 1.3.3. Dakle, pokazali smo da vrijedi $\alpha > 0$ i $\beta < \gamma$. □

Teorem 2.2.7. *Ako je $\alpha \leq \beta$, tada je $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$.*

Dokaz. Neka su α i β proizvoljni ordinalni brojevi takvi da je $\alpha \leq \beta$.

Sada tvrdnju $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$ dokazujemo koristeći transfinitnu indukciju po γ.

I. Neka je $\gamma = 0$. Prema tvrdnji m(i) direktno slijedi:

$$\alpha \cdot 0 = 0 \leq 0 = \beta \cdot 0.$$

II. Pretpostavimo da je $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$. Tada vrijedi:

$$\alpha \cdot \gamma^+ \overset{\text{m(ii)}}{=} \alpha \cdot \gamma + \alpha \overset{2.1.7}{\leq} \beta \cdot \gamma + \alpha \overset{2.1.4}{\leq} \beta \cdot \gamma + \beta \overset{\text{m(ii)}}{=} \beta \cdot \gamma^+.$$

III. Neka je γ granični ordinal. Pretpostavimo da za svaki $\delta < \gamma$ vrijedi $\alpha \cdot \delta \leq \beta \cdot \delta$. Koristeći tvrdnju m(iii) dobivamo:

$$\alpha \cdot \gamma \overset{\text{m(iii)}}{=} \sup \{\alpha \cdot \delta : \delta < \gamma\} \overset{(*)}{\leq} \sup \{\beta \cdot \delta : \delta < \gamma\} \overset{\text{m(iii)}}{=} \beta \cdot \gamma.$$

Do nejednakosti $(*)$ dolazimo koristeći lemu 2.0.1 uz oznake $A := \{\alpha \cdot \delta : \delta < \gamma\}$ i $B := \{\beta \cdot \delta : \delta < \gamma\}$. Prema pretpostavci indukcije znamo da vrijedi $\alpha \cdot \delta \leq \beta \cdot \delta$ pa slijedi $\sup A \leq \sup B$. □

Napomena 2.2.8. *Monotonost zdesna nije stroga. Za protuprimjer uzmimo ponovno* $1 < 2$ *te odredimo odnos između* $1 \cdot \omega$ *i* $2 \cdot \omega$*:*

$$1 \cdot \omega = \sup\{1 \cdot n : n < \omega\} \overset{2.0.4}{=} \omega = \sup\{2 \cdot n : n < \omega\} = 2 \cdot \omega,$$

što znači da ne vrijedi $1 \cdot \omega < 2 \cdot \omega$ *po irefleksivnosti.*

Lema 2.2.9. *Ako je* β *granični ordinal i* $\alpha > 0$*, tada je* $\alpha \cdot \beta$ *također granični ordinal.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\alpha \cdot \beta$ nije granični ordinal. Iz $\alpha > 0$ prema propoziciji 1.3.7 slijedi $\alpha \geq 0^+ = 1$ pa dobivamo:

$$\alpha \cdot \beta \overset{2.2.7}{\geq} 1 \cdot \beta \overset{2.2.4}{=} \beta > 0,$$

tako da $\alpha \cdot \beta$ mora biti sljedbenik. Onda postoji γ takav da $\gamma^+ = \alpha \cdot \beta$. Primjenjujući tvrdnju m(iii) dobivamo $\gamma^+ = \sup\{\alpha \cdot \delta : \delta < \beta\}$. Prema propoziciji 1.3.7 znamo da je onda $\gamma < \sup\{\alpha \cdot \delta : \delta < \beta\}$, što znači da postoji $\delta < \beta$ takav da je $\gamma < \alpha \cdot \delta$. Ponovno koristeći propoziciju 1.3.7 i onda teorem 2.2.5 dobivamo:

$$\gamma^+ \overset{1.3.7}{\leq} \alpha \cdot \delta \overset{2.2.5}{<} \alpha \cdot \beta.$$

Sada imamo $\gamma^+ = \alpha \cdot \beta$ i $\gamma^+ < \alpha \cdot \beta$, što je kontradikcija s teoremom 1.3.3. Dakle, pretpostavka je bila kriva. □

Kao i zbrajanje, množenje je također asocijativno. No, prvo trebamo pokazati njegovu distributivnost prema zbrajanju.

Teorem 2.2.10. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Dokaz. Ako je $\alpha = 0$, koristeći teorem 2.2.2 i lemu 2.1.2 lako dobivamo

$$0 \cdot (\beta + \gamma) = 0 = 0 + 0 = 0 \cdot \beta + 0 \cdot \gamma.$$

To znači da u daljnjem dokazu možemo pretpostavljati $\alpha > 0$ (to će biti bitno kasnije zbog primjene stroge lijeve monotonosti). Dokaz ćemo provesti koristeći transfinitnu indukciju po γ.

I. Neka je $\gamma = 0$. Tada vrijedi:

$$\alpha \cdot (\beta + 0) \overset{\text{z(i)}}{=} \alpha \cdot \beta \overset{\text{z(i)}}{=} \alpha \cdot \beta + 0 \overset{\text{m(i)}}{=} \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0.$$

II. Pretpostavimo da je $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$. Pokažimo da tvrdnja vrijedi za sljedbenik od γ:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma^+) \overset{\text{z(ii)}}{=} \alpha \cdot (\beta + \gamma)^+ \overset{\text{m(ii)}}{=} \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \overset{\text{p.i.}}{=} \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma + \alpha \overset{\text{m(ii)}}{=} \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma^+.$$

Kod jednakosti gdje smo primijenili pretpostavku indukcije, također implicitno koristimo i asocijativnost zbrajanja (teorem 2.1.10).

III. Neka je γ granični ordinal. Pretpostavimo da za svaki $\delta < \gamma$ vrijedi $\alpha \cdot (\beta + \delta) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta$. Koristeći to da su $\beta + \gamma$ (lema 2.1.9) i $\alpha \cdot \gamma$ (lema 2.2.9) granični ordinali dobivamo:

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (\beta + \gamma) &\overset{\substack{2.1.9\\ \text{m(iii)}}}{=} \sup\{\alpha \cdot \varepsilon : \varepsilon < \beta + \gamma\}\\ &\overset{(*)}{=} \sup\{\alpha \cdot (\beta + \delta) : \delta < \gamma\}\\ &\overset{\text{p.i.}}{=} \sup\{\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta : \delta < \gamma\}\\ &\overset{(**)}{=} \sup\{\alpha \cdot \beta + \zeta : \zeta < \alpha \cdot \gamma\}\\ &\overset{\substack{2.2.9\\ \text{z(iii)}}}{=} \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.\end{aligned}$$

Pojasnimo kako smo došli do jednakosti $(*)$. U shemu leme 2.0.2 stavimo $\circ := \cdot$ i $* := +$. Za strogu lijevu monotonost množenja vrijedi $\mu_\cdot = 1$ pa prema pretpostavci vrijedi $\alpha \geq \mu_\cdot$. Za strogu lijevu monotonost zbrajanja je $\mu_+ = 0$ pa je $\beta \geq \mu_+$ uvijek zadovoljeno. Označimo skupove

$$A := \sup\{\alpha \cdot \varepsilon : \varepsilon < \beta + \gamma\} \text{ i } B := \sup\{\alpha \cdot (\beta + \delta) : \delta < \gamma\}.$$

Dakle, vrijede pretpostavke leme 2.0.2 pa je $\sup A = \sup B$.

Još pojasnimo kako smo došli do jednakosti $(**)$. Označimo $\eta := \alpha \cdot \beta$. U shemu leme 2.0.2 stavimo $\circ := +$ i $* := \cdot$. Ponovno znamo da je $\eta \geq \mu_+$ i $\alpha \geq \mu_\cdot$. Uvedimo skupove

$$\begin{aligned}B &:= \{\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta : \delta < \gamma\} = \{\eta + \alpha \cdot \delta : \delta < \gamma\}, \text{ i}\\ A &:= \{\alpha \cdot \beta + \zeta : \zeta < \alpha \cdot \gamma\} = \{\eta + \zeta : \zeta < \alpha \cdot \gamma\}.\end{aligned}$$

Tada jednakost dobivamo primjenom leme 2.0.2. □

Napomena 2.2.11. *Množenje ordinalnih brojeva općenito nije distributivno zdesna, odnosno ne vrijedi* $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$. *Navedimo konkretan protuprimjer za to svojstvo:*

$$(1 + 1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega = \omega \cdot 1 < \omega \cdot 2 = \omega \cdot 1^+ = \omega \cdot 1 + \omega = \omega + \omega = 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega.$$

Dobili smo $(1 + 1) \cdot \omega < 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega$ *pa prema teoremu 1.3.3 znamo da ne vrijedi* $(1 + 1) \cdot \omega = 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega$.

Teorem 2.2.12. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

Dokaz. Ako je $\alpha = 0$, koristeći teorem 2.2.2 dobivamo

$$0 \cdot (\beta \cdot \gamma) \overset{2.2.2}{=} 0 \overset{2.2.2}{=} 0 \cdot \gamma \overset{2.2.2}{=} (0 \cdot \alpha) \cdot \gamma.$$

Ako je $\beta = 0$, koristeći teorem 2.2.2 i tvrdnju m(i) dobivamo

$$\alpha \cdot (0 \cdot \gamma) \overset{2.2.2}{=} \alpha \cdot 0 \overset{\text{m(i)}}{=} 0 \overset{2.2.2}{=} 0 \cdot \gamma \overset{\text{m(i)}}{=} (\alpha \cdot 0) \cdot \gamma.$$

To znači da u daljnjem dokazu možemo pretpostavljati $\alpha > 0$ i $\beta > 0$ (što će biti bitno kasnije zbog primjene stroge lijeve monotonosti). Dokaz ćemo provesti koristeći transfinitnu indukciju po γ.

I. Neka je $\gamma = 0$. Tada očito vrijedi:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot 0) \overset{\text{m(i)}}{=} \alpha \cdot 0 \overset{\text{m(i)}}{=} 0 \overset{\text{m(i)}}{=} (\alpha \cdot \beta) \cdot 0.$$

II. Pretpostavimo da je $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$. Pokažimo da tvrdnja vrijedi za sljedbenik od γ:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma^+) \overset{\text{m(ii)}}{=} \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma + \beta) \overset{2.2.10}{=} \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) + \alpha \cdot \beta \overset{\text{p.i.}}{=} (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma + \alpha \cdot \beta \overset{\text{m(ii)}}{=} (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma^+.$$

III. Neka je γ granični ordinal. Pretpostavimo da za svaki $\delta < \gamma$ vrijedi $\alpha \cdot (\beta \cdot \delta) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \delta$. Tada koristeći da je $\beta \cdot \gamma$ granični ordinal (lema 2.2.9) i tvrdnju m(iii) dobivamo:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) &\overset{\substack{2.2.9 \\ \text{m(iii)}}}{=} \sup \{\alpha \cdot \varepsilon : \varepsilon < \beta \cdot \gamma\} \\ &\overset{(*)}{=} \sup \{\alpha \cdot (\beta \cdot \delta) : \delta < \gamma\} \\ &\overset{\text{p.i.}}{=} \sup \{(\alpha \cdot \beta) \cdot \delta : \delta < \gamma\} \\ &\overset{\text{m(iii)}}{=} (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma. \end{aligned}$$

Do jednakosti $(*)$ dolazimo tako da u shemu leme 2.0.2 stavimo $\circ := * := \cdot$. Za strogu lijevu monotonost množenja je $\mu_\cdot = 1$ pa prema pretpostavci i propoziciji 1.3.7 vrijedi $\alpha \geq \mu_\cdot$ i $\beta \geq \mu_\cdot$. Označimo skupove

$$A := \sup \{\alpha \cdot \varepsilon : \varepsilon < \beta \cdot \gamma\} \text{ i } B := \sup \{\alpha \cdot (\beta \cdot \delta) : \delta < \gamma\}.$$

Dakle, vrijede pretpostavke leme 2.0.2 pa je $\sup A = \sup B$. □

Od sada nadalje ne trebamo koristiti zagrade pri zapisivanju višestrukih umnožaka.

Napomena 2.2.13. *Množenje ordinalnih brojeva nije komutativno. Protuprimjer:*

$$2 \cdot \omega = \sup \{2 \cdot n : n < \omega\} = \omega < \omega \cdot 2.$$

Dobili smo $2 \cdot \omega < \omega \cdot 2$ pa prema teoremu 1.3.3 znamo da ne vrijedi $2 \cdot \omega = \omega \cdot 2$.

Slično kao što smo vidjeli da za ordinale postoji operacija slična oduzimanju (teorem 2.1.12), ovdje ćemo pokazati da za ordinale postoji operacija slična dijeljenju s ostatkom.

Teorem 2.2.14. *Ako je $\beta > 0$ i α proizvoljni ordinal, tada postoje jedinstveni ordinalni brojevi δ i ρ takvi da je $\alpha = \beta \cdot \delta + \rho$ i $\rho < \beta$.*

Dokaz. Neka je $\beta > 0$. Dokažimo prvo egzistenciju δ i ρ. Označimo $A := \{\xi : \beta \cdot \xi \leq \alpha\}$. To je skup ordinala jer je $A \subseteq \alpha^+$, što lako vidimo:

$$\xi \in A \Rightarrow \alpha \geq \beta \cdot \xi \overset{2.1.7}{\geq} 1 \cdot \xi \overset{2.2.4}{=} \xi \Rightarrow \alpha^+ > \xi \Rightarrow \xi \in \alpha^+.$$

Znamo i da je neprazan jer vrijedi $\beta \cdot 0 = 0 \leq \alpha$, odnosno $0 \in A$. Sada znamo da postoji supremum skupa A te ga označimo s δ. Tvrdimo da vrijedi $\beta \cdot \delta \leq \alpha$.

Dokaz ćemo rastaviti na slučajeve ovisno o kategoriji od δ. Za $\delta = 0$ smo već vidjeli da ta nejednakost vrijedi. To znači da nam je preostalo provjeriti tvrdnju za $\delta = \varepsilon^+$ i za δ granični ordinal. U prvom slučaju prema definiciji neposrednog sljedbenika 1.3.7 znamo da vrijedi $\varepsilon < \delta$. Tada je $\varepsilon \in \delta$ pa postoji $\xi \in A$ takav da je $\varepsilon \in \xi$ te $\beta \cdot \xi \leq \alpha$. Prema propoziciji 1.3.7 iz $\varepsilon < \xi$ slijedi $\delta \leq \xi$. Ne može vrijediti $\delta < \xi$ jer bi to bilo u kontradikciji s time da je δ supremum skupa A. Dakle, vrijedi $\delta = \xi$, odnosno $\beta \cdot \delta = \beta \cdot \xi \leq \alpha$.

U drugom slučaju imamo da je δ granični ordinal. Znamo da za sve $\gamma < \delta$ vrijedi $\beta \cdot \gamma \leq \alpha$ pa koristeći lemu 2.0.1 dobivamo:

$$\beta \cdot \delta \overset{\text{m(iii)}}{=} \sup\{\beta \cdot \gamma : \gamma < \delta\} \overset{2.0.1}{\leq} \sup\{\alpha\} = \alpha.$$

To znači da vrijedi $\beta \cdot \delta \leq \alpha$ pa iz teorema o oduzimanju 2.1.12 znamo da postoji ρ takav da je $\alpha = \beta \cdot \delta + \rho$. Trebamo još dokazati da je $\rho < \beta$.

Pretpostavimo suprotno, da vrijedi $\rho \geq \beta$. Tada imamo:

$$\alpha = \beta \cdot \delta + \rho \overset{2.1.4}{\geq} \beta \cdot \delta + \beta \overset{\text{m(ii)}}{=} \beta \cdot \delta^+,$$

pa iz toga slijedi $\delta^+ \in A$. Dobili smo kontradikciju jer je $\delta^+ > \delta = \sup A$. To znači da mora vrijediti $\rho < \beta$.

Preostalo nam je provjeriti jedinstvenost od δ i ρ. Provjerimo je li moguće da vrijedi $\alpha = \beta \cdot \zeta + \gamma$, za neke $\zeta \neq \delta$ i $\gamma < \beta$. Vrijedi $\zeta \neq \delta$ pa je prema teoremu 1.3.3 ili $\zeta < \delta$ ili $\zeta > \delta$. U prvom slučaju, prema propoziciji 1.3.7 je $\zeta^+ \leq \delta$ pa imamo:

$$\alpha = \beta \cdot \zeta + \gamma \overset{2.1.4}{<} \beta \cdot \zeta + \beta \overset{\text{m(ii)}}{=} \beta \cdot \zeta^+ \overset{2.2.5}{\leq} \beta \cdot \delta \overset{2.1.4}{\leq} \beta \cdot \delta + \gamma = \alpha,$$

što je kontradikcija s irefleksivnošću relacije $<$. U drugom slučaju, prema propoziciji 1.3.7 je $\zeta \geq \delta^+$ pa imamo:

$$\alpha = \beta \cdot \zeta + \gamma \overset{2.1.4}{\geq} \beta \cdot \zeta \overset{2.2.5}{\geq} \beta \cdot \delta^+ \overset{\text{m(ii)}}{=} \beta \cdot \delta + \beta \overset{2.1.4}{>} \beta \cdot \delta + \gamma = \alpha,$$

što je opet kontradikcija s irefleksivnošću. Dobili smo da je δ jedinstven. Pretpostavimo li sada da postoje ρ_1 i ρ_2 takvi da je

$$\beta \cdot \delta + \rho_1 = \alpha = \beta \cdot \delta + \rho_2,$$

oni će prema korolaru 2.1.5 biti jednaki: $\rho_1 = \rho_2$. Dobili smo da je i ρ jedinstven. □

Za kraj ponovimo zaključke o svojstvima množenja ordinalnih brojeva izvedene iz teorema i protuprimjera. Ordinal 1 je neutralni element za množenje. Množenje je strogo monotono slijeva (za lijevi faktor barem $\mu. = 1$) i nestrogo monotono zdesna. Vrijedi asocijativnost, dok komutativnost ne vrijedi općenito. Distributivnost množenja prema zbrajanju vrijedi općenito samo slijeva.

2.3 Potenciranje ordinalnih brojeva

Potenciranje shvaćamo kao ponavljanje množenja pa će nam razumijevanje operacije množenja pomoći u daljnjem razvoju intuicije. S obzirom na to da ni kod konačnih ordinalnih brojeva potenciranje nije komutativno, nema smisla promatrati razliku između 2^ω i ω^2. Pokažimo za sada kako računamo izraz 2^ω.

Za svaki element ordinala $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ pomnožit ćemo dosadašnji rezultat (počevši od $1 = \{0\}$) ordinalom $2 = \{0, 1\}$ na način opisan kod intuicije množenja: svakom elementu rezultata ćemo dodijeliti jednu kopiju $2 = \{0, 1\}$. Postupak je prikazan na slici 2.1.

Ovdje za razliku od zbrajanja i množenja nemamo više jedan niz kojem bi svaka prethodna razina bila početni podniz, nego

$$\begin{array}{ll}
0. & 0 \\
1. & 0, \qquad\quad 1 \\
2. & 0, \quad 1; \quad 0, \quad 1 \\
3. & 0, 1, 0, 1; 0, 1, 0, 1 \\
 & \vdots
\end{array}$$

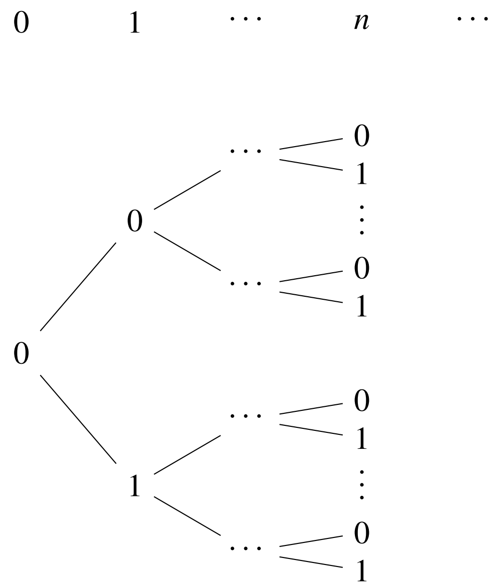
— grupe postaju sve veće i veće, a redoslijed elemenata se zadržava. To znači da 2^ω možemo prikazati kao

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

i onda ponovnim prebrojavanjem na način opisan kod zbrajanja dobivamo

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Dobili smo da je u ordinalnoj aritmetici $2^\omega = \omega$. Prethodno smo pokazali da je i $2 \cdot \omega = \omega$. To znači da, množimo li ili zbrajamo ordinal 2 „ω puta”, dolazimo do istog rezultata.



Slika 2.1: Vizualizacija potencije 2^ω.

Sada možemo formalno uvesti potenciranje ordinala koristeći rekurzivnu shemu uvedenu teoremom 1.3.12, rekurzivnu s obzirom na oblik eksponenta.
Definicija je preuzeta iz [5] uz sitnu izmjenu po uzoru na [4].

Definicija 2.3.1. *Postoji jedinstvena skupovna operacija na* $\mathbf{On} \times \mathbf{On}$ *takva da za sve* $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$ *vrijedi:*

p(i) $\alpha^0 = 1$*;*

p(ii) $\alpha^{\beta^+} = \alpha^\beta \cdot \alpha$*;*

p(iii) $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma : \gamma < \beta\}$*, ako je* β *granični ordinalni broj i* $\alpha > 0$*;*

p(iv) $0^\beta = 0$*, ako je* β *granični ordinalni broj.*

Upravo opisanu skupovnu operaciju zovemo ***potenciranje ordinalnih brojeva****.*

Napomena 2.3.2. *Kada budemo specifično trebali potenciranje promatrati kao binarnu operaciju koristit ćemo notaciju* $\alpha \wedge \beta$ *za izraz* α^β*.*

Svojstva potenciranja

Istaknimo osnovna svojstva potenciranja ordinalnih brojeva. U svim tvrdnjama ćemo pretpostavljati da su α, β, γ, δ, ε i ζ ordinalni brojevi.

Teorem 2.3.3. *Ako je $\alpha > 0$, tada je $0^\alpha = 0$.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti koristeći transfinitnu indukciju po α.

I. Neka je $\alpha = 0$. Tada ne vrijedi $\alpha > 0$ pa je tvrdnja trivijalno istinita.

II. Pretpostavimo da je $0^\alpha = 0$ za svaki $\alpha > 0$. Koristeći tvrdnje p(ii) i m(ii) dobivamo:

$$0^{\alpha^+} \overset{\text{p(ii)}}{=} 0^\alpha \cdot 0 \overset{\text{m(ii)}}{=} 0.$$

III. Neka je α granični ordinal. Tada direktno prema tvrdnji p(iv) slijedi $0^\alpha = 0$. □

Iz zadnjeg dijela dokaza prethodnog teorema je jasno zašto nam je potrebno bilo dodati tvrdnju p(iv) u definiciju 2.3.1. Inače bismo korištenjem tvrdnje p(iii) trebali promatrati supremum skupa $\{0^\gamma : \gamma < \beta\}$. Znamo da je $0 < \beta$ za proizvoljni granični ordinal β pa bismo imali $0^\beta = \sup\{0^\gamma : \gamma < \beta\} \geq 0^0 = 1$ prema tvrdnji p(i), što ne želimo.

Sada ćemo karakterizirati kada je potencija jednaka nuli.

Korolar 2.3.4. $\alpha^\beta = 0$ *ako i samo ako je* $\alpha = 0$ *i* $\beta > 0$.

Dokaz. Jedan smjer ekvivalencije (ako je $\alpha = 0$ i $\beta > 0$, tada je $\alpha^\beta = 0$) je upravo teorem 2.3.3. Preostalo nam je pokazati drugi smjer.

Pokazat ćemo obrat po kontrapoziciji: ako vrijedi $\alpha > 0$ ili $\beta = 0$, tada je $\alpha^\beta > 0$. Ako je $\beta = 0$, tada je $\alpha^\beta = \alpha^0 = 1$ prema tvrdnji p(i). Preostaje promotriti slučaj $\alpha > 0$. U tom slučaju tvrdnju $\alpha^\beta > 0$ dokazujemo koristeći transfinitnu indukciju po β.

I. Ako je $\beta = 0$, tada prema tvrdnji p(i) vrijedi $\alpha^\beta = \alpha^0 = 1 > 0$.

II. Pretpostavimo da je $\alpha^\beta > 0$. Iz $\alpha > 0$ slijedi $\alpha \geq 1$. Koristeći tvrdnju p(ii) dobivamo:

$$\alpha^{\beta^+} \overset{\text{p(ii)}}{=} \alpha^\beta \cdot \alpha \overset{2.2.5}{\geq} \alpha^\beta \cdot 1 \overset{2.2.3}{=} \alpha^\beta \overset{\text{p.i.}}{>} 0.$$

III. Neka je β granični ordinal. Koristeći tvrdnju p(iii) (znamo da je $\alpha > 0$) dobivamo:

$$\alpha^\beta \overset{\text{p(iii)}}{=} \sup\{\alpha^\gamma : \gamma < \beta\} \overset{(*)}{\geq} \alpha^0 = 1 > 0,$$

gdje $(*)$ vrijedi jer znamo da je supremum skupa veći ili jednak od bilo kojeg elementa tog skupa, a $0 < \beta$ po teoremu 1.3.3. □

Lema 2.3.5. $\alpha^1 = \alpha$.

Dokaz. Znamo da je $1 = 0 + 1 = 0^+$. Koristeći tvrdnje definicije 2.3.1 dobivamo:

$$\alpha^1 = \alpha^{0^+} \overset{\text{p(ii)}}{=} \alpha^0 \cdot \alpha \overset{\text{p(i)}}{=} 1 \cdot \alpha \overset{2.2.4}{=} \alpha. \qquad \square$$

Lema 2.3.6. $1^\alpha = 1$.

Dokaz. Dokaz ćemo provesti koristeći transfinitnu indukciju po α.

I. Neka je $\alpha = 0$. Tada prema tvrdnji p(i) dobivamo $1^0 = 1$.

II. Pretpostavimo da je $1^\alpha = 1$. Koristeći tvrdnju p(ii) dobivamo:

$$1^{\alpha^+} \overset{\text{p(ii)}}{=} 1^\alpha \cdot 1 \overset{\text{p.i.}}{=} 1 \cdot 1 \overset{2.2.4}{=} 1.$$

III. Neka je α granični ordinal. Pretpostavimo da za sve $\beta < \alpha$ vrijedi $1^\beta = 1$. Koristeći tvrdnju p(iii) dobivamo:

$$1^\alpha \overset{\text{p(iii)}}{=} \sup\{1^\beta : \beta < \alpha\} \overset{\text{p.i.}}{=} \sup\{1 : \beta < \alpha\} = 1. \qquad \square$$

Potenciranje je (za dovoljno velike baze) kao i prijašnje operacije strogo monotono slijeva te nestrogo monotono zdesna. Pri ispitivanju monotonosti morat ćemo dodati uvjete na bazu zbog prethodnih lema, odnosno bit će $\mu_\wedge = 2$.

Teorem 2.3.7. *Ako je $\beta < \gamma$ i $\alpha > 1$, tada je $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$.*

Dokaz. Neka je α proizvoljni ordinalni broj takav da je $\alpha > 1$. Sada tvrdnju da $\beta < \gamma$ povlači $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$ dokazujemo koristeći transfinitnu indukciju po γ.

I. Neka je $\gamma = 0$. Tada prema tvrdnji u(i) ne može vrijediti $\beta < 0$ pa tvrdnja trivijalno vrijedi.

II. Pretpostavimo da $\beta < \gamma$ povlači $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$. Sada iz pretpostavke $\beta < \gamma^+$ slijedi po u(ii) ili $\beta < \gamma$ ili $\beta = \gamma$. Raspišimo što vrijedi ovisno o slučaju.

$\beta < \gamma$: Kako je $\alpha > 1$ te onda i $\alpha^\gamma > 0$ zbog korolara 2.3.4, po strogoj lijevoj monotonosti množenja dobivamo:

$$\alpha^\beta \overset{\text{p.i.}}{<} \alpha^\gamma \overset{2.2.3}{=} \alpha^\gamma \cdot 1 \overset{2.2.5}{<} \alpha^\gamma \cdot \alpha \overset{\text{p(ii)}}{=} \alpha^{\gamma^+}.$$

$\beta = \gamma$: Tada vrijedi $\alpha^\beta = \alpha^\gamma$. Ponovno koristeći nejednakost kao u prethodnom slučaju imamo:

$$\alpha^\beta = \alpha^\gamma \overset{2.2.3}{=} \alpha^\gamma \cdot 1 \overset{2.2.5}{<} \alpha^\gamma \cdot \alpha \overset{\text{p(ii)}}{=} \alpha^{\gamma^+}.$$

III. Neka je γ granični ordinal. Pretpostavimo da za sve $\delta < \gamma$ vrijedi: ako je $\beta < \delta$, tada je $\alpha^\beta < \alpha^\delta$. Neka je $\beta < \gamma$. Tada po lemi 2.0.3 vrijedi $\beta^+ < \gamma$. Iz $\alpha > 1$ slijedi $\alpha^\beta > 0$ prema korolaru 2.3.4. Koristeći tvrdnju p(iii) dobivamo:

$$\alpha^\gamma \overset{\text{p(iii)}}{=} \sup\{\alpha^\delta : \delta < \gamma\} \overset{(*)}{\geq} \alpha^{\beta^+} \overset{\text{p(ii)}}{=} \alpha^\beta \cdot \alpha \overset{2.2.5}{>} \alpha^\beta \cdot 1 \overset{2.2.3}{=} \alpha^\beta,$$

gdje $(*)$ vrijedi jer je supremum skupa ordinalnih brojeva sigurno veći ili jednak bilo kojem elementu tog skupa, a znamo da je β^+ jedan od mogućih δ. □

Korolar 2.3.8. *Ako je $\alpha > 0$ i $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$, tada je $\beta < \gamma$ i $\alpha > 1$.*

Dokaz. Neka je $\alpha > 0$ te $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$.

Iz $\alpha > 0$ slijedi $\alpha \geq 0^+ = 1$. Pretpostavimo da je $\alpha = 1$. Koristeći lemu 2.3.6 dobivamo:

$$\alpha^\beta = 1^\beta \overset{2.3.6}{=} 1 \overset{2.3.6}{=} 1^\gamma = \alpha^\gamma,$$

što je u kontradikciji s $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$ prema teoremu 1.3.3. Dakle, mora biti $\alpha > 1$.

Sada pretpostavimo da nije $\beta < \gamma$. Tada je ili $\beta = \gamma$ ili $\beta > \gamma$. Za $\beta = \gamma$ vrijedi $\alpha^\beta = \alpha^\gamma$, što je u kontradikciji s teoremom 1.3.3. Ako je $\beta > \gamma$, prema teoremu 2.3.7 (već smo pokazali $\alpha > 1$) je $\alpha^\beta > \alpha^\gamma$. Ponovno smo došli do kontradikcije s teoremom 1.3.3. Time smo pokazali da vrijedi $\alpha > 1$ i $\beta < \gamma$. □

Teorem 2.3.9. *Ako je $\alpha \leq \beta$, tada je $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.*

Dokaz. Neka su α i β proizvoljni ordinalni brojevi takvi da je $\alpha \leq \beta$. Tvrdnju $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$ dokazujemo koristeći transfinitnu indukciju po γ.

I. Neka je $\gamma = 0$. Tada koristeći tvrdnju p(i) imamo:

$$\alpha^0 \overset{\text{p(i)}}{=} 1 \overset{\text{p(i)}}{=} \beta^0,$$

pa vrijedi $\alpha^0 \leq \beta^0$.

II. Pretpostavimo da vrijedi $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$. Koristeći te nejednakosti i tvrdnju p(ii) dobivamo:

$$\alpha^{\beta^+} \overset{\text{p(ii)}}{=} \alpha^\beta \cdot \alpha \overset{2.2.7}{\leq} \alpha^\gamma \cdot \alpha \overset{\text{p(ii)}}{=} \alpha^{\gamma^+}.$$

III. Neka je γ granični ordinal. Pretpostavimo da za sve $\delta < \gamma$ vrijedi: ako je $\alpha \leq \beta$, tada je $\alpha^\beta \leq \alpha^\delta$. Koristeći tvrdnju p(iii) dobivamo:

$$\alpha^\gamma \overset{\text{p(iii)}}{=} \sup\{\alpha^\delta : \delta < \gamma\} \overset{(*)}{\leq} \sup\{\beta^\delta : \delta < \gamma\} \overset{\text{p(iii)}}{=} \beta^\gamma.$$

Do nejednakosti $(*)$ dolazimo koristeći lemu 2.0.1 uz oznake $A := \{\alpha^\delta : \delta < \gamma\}$ i $B := \{\beta^\delta : \delta < \gamma\}$. Prema pretpostavci indukcije znamo da vrijedi $\alpha^\delta \leq \beta^\delta$ pa slijedi $\sup A \leq \sup B$. □

Napomena 2.3.10. *Monotonost zdesna nije stroga. Za protuprimjer uzmimo* $2 < 3$ *te odredimo odnos između* 2^ω *i* 3^ω*:*

$$2^\omega = \sup\{2^n : n < \omega\} = \omega = \sup\{3^n : n < \omega\} = 3^\omega,$$

što znači da ne vrijedi $2^\omega < 3^\omega$ *po irefleksivnosti.*

Lema 2.3.11. *Ako je* β *granični ordinal i* $\alpha > 1$*, tada je* α^β *također granični ordinal.*

Dokaz. Pretpostavimo da α^β nije granični ordinal. Iz $\alpha > 1$ slijedi $\alpha \geq 1$ pa dobivamo:

$$\alpha^\beta \overset{2.3.9}{\geq} 1^\beta \overset{2.3.6}{=} 1 > 0,$$

tako da α^β mora biti sljedbenik. Tada postoji γ takav da je $\gamma^+ = \alpha^\beta$. Primjenjujući tvrdnju p(iii) (iz $\alpha > 1$ slijedi $\alpha > 0$) dobivamo $\gamma^+ = \sup\{\alpha^\delta : \delta < \beta\}$. Prema propoziciji 1.3.7 znamo da je onda $\gamma < \sup\{\alpha^\delta : \delta < \beta\}$, pa to znači da postoji $\delta < \beta$ takav da $\gamma < \alpha^\delta$. Ponovno koristeći propoziciju 1.3.7 i onda teorem 2.3.7 (ovdje nam je potrebno $\alpha > 1$) dobivamo:

$$\gamma^+ \overset{1.3.7}{\leq} \alpha^\delta \overset{2.3.7}{<} \alpha^\beta.$$

Sada imamo $\gamma^+ = \alpha^\beta$ i $\gamma^+ < \alpha^\beta$, što je kontradikcija s teoremom 1.3.3. Dakle, pretpostavka je bila kriva. □

Lema 2.3.12. *Za sve* $k > 1$ *takve da je* $k < \omega$ *vrijedi* $k^\omega = \omega$.

Dokaz. Neka je $k < \omega$. Tada koristeći da je potencija dva prirodna broja ponovno prirodan broj, odnosno $k^n < \omega$, dobivamo:

$$k^\omega = \sup\{k^n : n < \omega\} \leq \omega.$$

S druge strane, prema lemi 2.3.11 slijedi da je k^ω granični ordinal pa mora biti veći ili jednak najmanjem graničnom ordinalu: $\omega \leq k^\omega$. Dakle vrijedi $\omega \leq k^\omega \leq \omega$, odnosno po antisimetričnosti $k^\omega = \omega$. □

Pokažimo da vrijedi „distributivnost" potenciranja prema zbrajanju.

Teorem 2.3.13. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.

Dokaz. Dokažimo za početak da tvrdnja vrijedi za rubne slučajeve.

Ako je $\beta + \gamma = 0$, tada koristeći $\beta \geq 0$ i $\gamma \geq 0$ prema teoremu 2.1.7 dobivamo:

$$0 \leq \gamma \overset{2.1.2}{=} 0 + \gamma \overset{2.1.7}{\leq} \beta + \gamma = 0.$$

Po antisimetričnosti, tada je $\gamma = 0$. Analogno pokažemo da je $\beta = 0$. Koristeći tvrdnju p(i) definicije 2.3.1 imamo:

$$\alpha^0 \overset{\text{p(i)}}{=} 1 \overset{2.2.4}{=} 1 \cdot 1 \overset{\text{p(i)}}{=} \alpha^0 \cdot \alpha^0.$$

Dakle, dalje možemo pretpostaviti $\beta + \gamma > 0$.

Ako je $\beta = 0$, tada imamo:

$$\alpha^{0+\gamma} \overset{2.1.2}{=} \alpha^\gamma \overset{2.2.4}{=} 1 \cdot \alpha^\gamma \overset{\text{p(i)}}{=} \alpha^0 \cdot \alpha^\gamma,$$

pa dalje možemo pretpostaviti $\beta > 0$.

Ako je $\alpha \in \{0, 1\}$, tada imamo:

$$0^{\beta+\gamma} \overset{2.3.3}{=} 0 \overset{2.1.2}{=} 0 \cdot 0^\gamma \overset{2.3.3}{=} 0^\beta \cdot 0^\gamma,$$
$$1^{\beta+\gamma} \overset{2.3.6}{=} 1 \overset{2.2.4}{=} 1 \cdot 1 \overset{2.3.6}{=} 1^\beta \cdot 1^\gamma,$$

pa napokon možemo pretpostaviti $\alpha > 1$. Daljnji dokaz ćemo provesti koristeći transfinitnu indukciju po γ.

I. Neka je $\gamma = 0$. Tada vrijedi:

$$\alpha^{\beta+0} \overset{\text{z(i)}}{=} \alpha^\beta = \alpha^\beta \cdot 1 \overset{\text{p(i)}}{=} \alpha^\beta \cdot \alpha^0.$$

II. Pretpostavimo da je $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$. Pokažimo da tvrdnja vrijedi za γ^+:

$$\alpha^{\beta+\gamma^+} \overset{\text{z(ii)}}{=} \alpha^{(\beta+\gamma)^+} \overset{\text{p(ii)}}{=} \alpha^{\beta+\gamma} \cdot \alpha \overset{\text{p.i.}}{=} \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma \cdot \alpha \overset{\text{p(ii)}}{=} \alpha^\beta \cdot \alpha^{\gamma^+}.$$

Kod jednakosti gdje smo primijenili pretpostavku indukcije, također implicitno koristimo i asocijativnost množenja (teorem 2.2.12).

III. Neka je γ granični ordinal. Pretpostavimo da za svaki $\delta < \gamma$ vrijedi $\alpha^{\beta+\delta} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\delta$. Koristeći to da su $\beta + \gamma$ (lema 2.1.9) i α^γ (lema 2.3.11) granični ordinali dobivamo:

$$\begin{aligned}
\alpha^{\beta+\gamma} &\overset{\substack{2.1.9\\ \text{p(iii)}}}{=} \sup\{\alpha^\varepsilon : \varepsilon < \beta + \gamma\} \\
&\overset{(*)}{=} \sup\{\alpha^{\beta+\delta} : \delta < \gamma\} \\
&\overset{\text{p.i.}}{=} \sup\{\alpha^\beta \cdot \alpha^\delta : \delta < \gamma\} \\
&\overset{(**)}{=} \sup\{\alpha^\beta \cdot \zeta : \zeta < \alpha^\gamma\} \\
&\overset{\substack{2.3.11\\ \text{m(iii)}}}{=} \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma.
\end{aligned}$$

Pojasnimo kako smo došli do jednakosti ($*$). U shemu leme 2.0.2 stavimo $\circ := \wedge$ i $* := +$. Za strogu lijevu monotonost potenciranja je $\mu_\wedge = 2$, a prema pretpostavci i propoziciji 1.3.7 vrijedi $\alpha \geq 1^+ = 2$. Za strogu lijevu monotonost zbrajanja je $\mu_+ = 0$ pa je $\beta \geq \mu_+$ uvijek zadovoljeno. Označimo skupove

$$A := \sup\{\alpha^\varepsilon : \varepsilon < \beta + \gamma\} \text{ i } B := \sup\{\alpha^{\beta+\delta} : \delta < \gamma\}.$$

Dakle, vrijede pretpostavke leme 2.0.2 pa je $\sup A = \sup B$.

Još pojasnimo kako smo došli do jednakosti ($**$). Označimo s $\eta := \alpha^\beta$. U shemu leme 2.0.2 stavimo $\circ := \cdot$ i $* := \wedge$. Za strogu lijevu monotonost množenja vrijedi $\mu_\cdot = 1$, a $\eta \geq 1$ slijedi iz $\alpha > 0$ prema korolaru 2.3.4 i propoziciji 1.3.7. Već smo pokazali da vrijedi $\alpha \geq \mu_\wedge$. Uvedimo skupove

$$B := \{\alpha^\beta \cdot \alpha^\delta : \delta < \gamma\} = \{\eta \cdot \alpha^\delta : \delta < \gamma\} \text{ i } A := \{\alpha^\beta \cdot \zeta : \zeta < \alpha^\gamma\} = \{\eta \cdot \zeta : \zeta < \alpha^\gamma\}.$$

Tada jednakost dobivamo primjenom leme 2.0.2. $\square$

Napomena 2.3.14. *Desna distibutivnost potenciranja prema množenju ne vrijedi općenito, odnosno ne vrijedi $(\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$ (iako vrijedi za prirodne brojeve). Navedimo protuprimjer. Znamo da je $2 < 4$ jer je $2 \in 4 = \{0, 1, 2, 3\}$ pa imamo:*

$$(\omega \cdot 2)^2 \overset{\text{p(ii)}}{=} (\omega \cdot 2)^1 \cdot (\omega \cdot 2) \overset{2.3.5}{=} \omega \cdot 2 \cdot \omega \cdot 2 \overset{2.2.13}{=} \omega \cdot \omega \cdot 2 \overset{\text{p(ii)}}{=} \omega^2 \cdot 2 \overset{2.2.5}{<} \omega^2 \cdot 4 = \omega^2 \cdot 2^2.$$

Dobili smo $(\omega \cdot 2)^2 < \omega^2 \cdot 2^2$ pa prema teoremu 1.3.3 znamo da ne vrijedi $(\omega \cdot 2)^2 = \omega^2 \cdot 2^2$.

Teorem 2.3.15. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.

Dokaz. Dokažimo za početak da tvrdnja vrijedi za rubne slučajeve.

Ako je $\beta = 0$, tada imamo:

$$\alpha^{0 \cdot \gamma} \overset{2.2.2}{=} \alpha^0 \overset{\text{p(i)}}{=} 1 \overset{2.3.6}{=} 1^\gamma \overset{\text{p(i)}}{=} (\alpha^0)^\gamma,$$

pa dalje možemo pretpostaviti $\beta > 0$.

Ako je $\gamma = 0$, tada imamo:

$$\alpha^{\beta \cdot 0} \overset{\text{m(i)}}{=} \alpha^0 \overset{\text{p(i)}}{=} 1 \overset{\text{p(i)}}{=} (\alpha^\beta)^0,$$

pa dalje možemo pretpostaviti $\gamma > 0$.

Ako je $\alpha \in \{0, 1\}$, tada imamo:

$$0^{\beta \cdot \gamma} \overset{2.3.3}{=} 0 \overset{2.3.3}{=} 0^\gamma \overset{2.3.3}{=} (0^\beta)^\gamma,$$
$$1^{\beta \cdot \gamma} \overset{2.3.6}{=} 1 \overset{2.3.6}{=} 1^\gamma \overset{2.3.6}{=} (1^\beta)^\gamma,$$

pa napokon možemo pretpostaviti $\alpha > 1$. Daljnji dokaz ćemo provesti koristeći transfinitnu indukciju po γ.

I. Neka je $\gamma = 0$. Tada vrijedi:

$$(\alpha^\beta)^0 \overset{\text{p(i)}}{=} 1 \overset{\text{p(i)}}{=} \alpha^0 \overset{\text{m(i)}}{=} \alpha^{\beta\cdot 0}.$$

II. Pretpostavimo da je $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$. Pokažimo da tvrdnja vrijedi za γ^+:

$$(\alpha^\beta)^{\gamma^+} \overset{\text{p(ii)}}{=} (\alpha^\beta)^\gamma \cdot \alpha^\beta \overset{\text{p.i.}}{=} \alpha^{\beta\cdot\gamma} \cdot \alpha^\beta \overset{2.3.13}{=} \alpha^{\beta\cdot\gamma+\beta} \overset{\text{m(ii)}}{=} \alpha^{\beta\cdot\gamma^+}.$$

III. Neka je γ granični ordinal. Pretpostavimo da za svaki $\delta < \gamma$ vrijedi $(\alpha^\beta)^\delta = \alpha^{\beta\cdot\delta}$. Tada koristeći da je $\beta \cdot \gamma$ granični ordinal (lema 2.2.9) i tvrdnju p(iii) dobivamo:

$$\begin{aligned}\alpha^{\beta\cdot\gamma} &\overset{\substack{2.2.9\\ \text{p(iii)}}}{=} \sup\{\alpha^\varepsilon : \varepsilon < \beta\cdot\gamma\}\\ &\overset{(*)}{=} \sup\{\alpha^{\beta\cdot\delta} : \delta < \gamma\}\\ &\overset{\text{p.i.}}{=} \sup\{(\alpha^\beta)^\delta : \delta < \gamma\}\\ &\overset{\text{p(iii)}}{=} (\alpha^\beta)^\gamma.\end{aligned}$$

Pojasnimo kako smo došli do jednakosti $(*)$. U shemu leme 2.0.2 stavimo $\circ := \wedge$ i $* := \cdot$. Za strogu lijevu monotonost potenciranja je $\mu_\wedge = 2$, a prema pretpostavci i propoziciji 1.3.7 vrijedi $\alpha \geq 1^+ = 2$. Za strogu lijevu monotonost množenja je $\mu_\wedge = 1$, a prema pretpostavci i propziciji 1.3.7 vrijedi $\beta \geq 0^+ = 1$. Označimo skupove $A := \sup\{\alpha^\varepsilon : \varepsilon < \beta\cdot\gamma\}$ i $B := \sup\{\alpha^{\beta\cdot\delta} : \delta < \gamma\}$. Dakle, vrijede pretpostavke leme 2.0.2 pa je $\sup A = \sup B$. □

Za kraj ponovimo zaključke o svojstvima potenciranja ordinalnih brojeva izvedene iz teorema i protuprimjera. Potencija s bazom ili eksponentom 1 je jednaka bazi. Potenciranje je strogo monotono slijeva (za baze barem $\mu_\wedge = 2$) i nestrogo monotono zdesna. „Distributivnost" potenciranja prema zbrajanju vrijedi općenito samo slijeva, dok distributivnost potenciranja prema množenju ne vrijedi.

2.4 Cantorova normalna forma

Koristeći do sada definirane aritmetičke operacije na ordinalnim brojevima možemo konstruirati hijerarhiju ordinala:

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega^2, \dots, \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots$$

i tako dalje.

Ordinal $\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} := \sup\{0, 1, \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}$ označavamo s ϵ_0 i to je najmanji ordinal takav da vrijedi $\epsilon = \omega^\epsilon$. Ordinale s tim svojstvom nazivamo **ϵ-ordinalima**. U ovom radu ćemo se usredotočiti na reprezentaciju ordinala manjih od ϵ_0. Prije dokaza da se svaki ordinalni broj može reprezentirati u Cantorovoj normalnoj formi pokažimo sljedeće pomoćne tvrdnje. Pretpostavljat ćemo da su α, β, γ, δ, ε, ζ, ξ i γ_i za $i \in \omega$ ordinalni brojevi.

Lema 2.4.1. $\omega^\alpha \geq \alpha$.

Dokaz. Dokaz ćemo provesti transfinitnom indukcijom po α.

I. Ako je $\alpha = 0$, tada imamo:
$$\omega^0 \overset{\text{p(i)}}{=} 1 \geq 0.$$

II. Pretpostavimo da vrijedi $\omega^\alpha \geq \alpha$. Prema korolaru 2.3.4 vrijedi $\omega^\alpha > 0$. Koristeći tvrdnju p(ii) definicije 2.3.1 dobivamo:
$$\omega^{\alpha^+} \overset{\text{p(ii)}}{=} \omega^\alpha \cdot \omega \overset{2.2.5}{>} \omega^\alpha \cdot 1 = \omega^\alpha \overset{\text{p.i.}}{\geq} \alpha.$$
Sada prema propoziciji 1.3.7 znamo da $\omega^{\alpha^+} > \alpha$ povlači $\omega^{\alpha^+} \geq \alpha^+$.

III. Pretpostavimo da za sve $\delta < \alpha$ vrijedi $\omega^\delta \geq \delta$. Koristeći tvrdnju p(iii) dobivamo:
$$\omega^\alpha \overset{\text{p(iii)}}{=} \sup\{\omega^\delta : \delta < \alpha\} \overset{(*)}{\geq} \sup\{\delta : \delta < \alpha\} \overset{2.0.4}{=} \alpha,$$
gdje $(*)$ dobivamo koristeći lemu 2.0.1 uz $A := \{\delta : \delta < \alpha\}$ i $B := \{\omega^\delta : \delta < \alpha\}$, a prema pretpostavci indukcije znamo $\delta \leq \omega^\delta$, iz čega slijedi $\sup B \geq \sup A$. □

Ubuduće ćemo koristiti notaciju $\omega^\gamma m$ za izraze oblika $\omega^\gamma \cdot m$.

Lema 2.4.2. *Ako je $n \in \omega$, $\alpha > \gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_n$ te $m_1, \ldots, m_n \in \omega$, tada je:*
$$\omega^\alpha > \omega^{\gamma_1} m_1 + \omega^{\gamma_2} m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_n} m_n.$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom po n.

BAZA: Ako je $n = 0$, tada je suma s desne strane nejednakosti prazna i vrijednost joj je 0 pa onda tvrdnja vrijedi.

Ako je $n = 1$, tada trebamo pokazati $\omega^\alpha > \omega^{\gamma_1} m_1$. Prema korolaru 2.3.4 vrijedi $\omega^{\gamma_1} > 0$. Iz $\alpha > \gamma_1$, prema propoziciji 1.3.7 je $\alpha \geq \gamma_1^+$ pa koristeći lijevu monotonost množenja (teorem 2.2.5) i potenciranja (teorem 2.3.7) imamo:
$$\omega^{\gamma_1} m_1 \overset{2.2.5}{<} \omega^{\gamma_1} \omega = \omega^{\gamma_1^+} \overset{2.3.7}{\leq} \omega^\alpha.$$

KORAK: Pretpostavimo da tvrdnja leme vrijedi za neki n. Želimo pokazati tu tvrdnju za n^+. Prema pretpostavci indukcije će vrijediti:

$$\omega^{\gamma_1} > \omega^{\gamma_2} m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_{n^+}} m_{n^+}.$$

Sada koristeći lijevu monotonost zbrajanja (teorem 2.1.4) i slučaj $n = 1$ uz $\alpha > \gamma_1$ imamo:

$$\omega^{\gamma_1} m_1 + \omega^{\gamma_2} m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_{n^+}} m_{n^+} \overset{2.1.4}{<} \omega^{\gamma_1} m_1 + \omega^{\gamma_1} = \omega^{\gamma_1} m_1^+ \overset{n=1}{<} \omega^{\alpha}.$$

□

Teorem 2.4.3 (Cantorova normalna forma)**.** *Za svaki ordinalni broj α postoji jedinstveni broj $n \in \omega$ te konačni nizovi ordinalnih brojeva $\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_n$ i $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \omega \setminus \{0\}$, takvi da vrijedi*

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} m_1 + \omega^{\gamma_2} m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_n} m_n.$$

Taj prikaz ordinalnog broja α nazivamo ***Cantorovom normalnom formom****.*

Dokaz. Prvo ćemo pokazati postojanje Cantorove normalne forme indukcijom po α. Ovdje koristimo strogu transfinitnu indukciju 1.3.10.

Ako je $\alpha = 0$, tada jednostavno uzmemo $n = 0$. Neka je $\alpha > 0$ proizvoljan. Pretpostavimo da svi ordinali $\zeta < \alpha$ imaju Cantorovu normalnu formu. Označimo $A := \{\xi : \omega^{\xi} \leq \alpha\}$. To je skup ordinala jer $A \subseteq \alpha^+$, što lako vidimo:

$$\xi \in A \Rightarrow \alpha \geq \omega^{\xi} \overset{2.4.1}{\geq} \xi \Rightarrow \alpha^+ > \xi \Rightarrow \xi \in \alpha^+.$$

Znamo i da je neprazan jer vrijedi $\omega^0 = 1 \leq \alpha$, odnosno $0 \in A$. Sada znamo da postoji supremum skupa A te ga označimo s β. Tvrdimo da vrijedi $\omega^{\beta} \leq \alpha$.

Za $\beta = 0$ smo već vidjeli da ta nejednakost vrijedi. To znači da nam je preostalo provjeriti tvrdnju za $\beta = \gamma^+$ i za β granični ordinal. U prvom slučaju prema definiciji neposrednog sljedbenika 1.3.7 znamo da vrijedi $\gamma < \beta$. Tada je $\gamma \in \beta$ pa postoji ξ takav da je $\gamma \in \xi$ te $\omega^{\xi} \leq \alpha$. Prema propoziciji 1.3.7 znamo da iz $\gamma < \xi$ slijedi $\beta \leq \xi$. Ne može vrijediti $\beta < \xi$ jer bi to bilo u kontradikciji s time da je β supremum skupa A. Dakle, vrijedi $\beta = \xi$, odnosno $\omega^{\beta} = \omega^{\xi} \leq \alpha$.

U drugom slučaju imamo da je β granični ordinal. Znamo da za sve $\gamma < \beta$ vrijedi $\omega^{\gamma} \leq \alpha$ pa koristeći tvrdnju p(iii) imamo:

$$\omega^{\beta} \overset{\text{p(iii)}}{=} \sup\{\omega^{\gamma} : \gamma < \beta\} \overset{2.0.1}{\leq} \sup\{\alpha : \gamma < \beta\} = \alpha.$$

Dakle, svakako vrijedi $\omega^{\beta} \leq \alpha$.

Prema teoremu 2.2.14 znamo da postoje δ i $\rho < \omega^\beta$ takvi da je $\alpha = \omega^\beta \cdot \delta + \rho$. Ordinal δ mora biti konačan. Inače je $\delta \geq \omega$ prema teoremu 1.3.3 te dobivamo:

$$\alpha = \omega^\beta \cdot \delta + \rho \overset{2.1.4}{\geq} \omega^\beta \cdot \delta \overset{2.2.5}{\geq} \omega^\beta \cdot \omega \overset{\text{p(ii)}}{=} \omega^{\beta^+}.$$

Iz toga slijedi da je $\beta^+ \in A$. Dobili smo kontradikciju jer je $\beta^+ > \beta = \sup A$. Također vrijedi $\delta \neq 0$, jer za $\delta = 0$ vrijedi $\alpha = \omega^\beta \cdot 0 + \rho = 0 + \rho = \rho < \omega^\beta$ što je u kontradikciji s $\alpha \geq \omega^\beta$ prema teoremu 1.3.3.

Ako je $\rho = 0$, tada je prema bazi indukcije $\alpha = \omega^\beta \cdot \delta$ već u normalnoj formi. Ako je $\rho > 0$, tada iz

$$\rho < \omega^\beta \overset{2.2.3}{=} \omega^\beta \cdot 1 \overset{2.2.5}{\leq} \omega^\beta \cdot \delta \overset{2.1.4}{\leq} \omega^\beta \cdot \delta + \rho = \alpha$$

slijedi $\rho < \alpha$ po tranzitivnosti pa prema pretpostavci indukcije postoji broj $n \in \omega$ te konačni nizovi ordinalnih brojeva $\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_n$ i $m_1, m_2, \ldots, m_n$ tako da

$$\rho = \omega^{\gamma_1} m_1 + \omega^{\gamma_2} m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_n} m_n.$$

To znači da se ordinal α može zapisati kao:

$$\alpha = \omega^\beta \cdot \delta + \omega^{\gamma_1} m_1 + \omega^{\gamma_2} m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_n} m_n.$$

Da bi to bila Cantorova normalna forma treba vrijediti:

- $n^+ \in \omega$. Kako je $n \in \omega$ to slijedi prema korolaru 2.0.5.
- $\beta > \gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_n$. Trebamo pokazati samo $\beta > \gamma_1$ jer ostale nejednakosti slijede prema pretpostavci indukcije. Prema lijevoj monotonosti zbrajanja (teorem 2.1.4) i množenja (teorem 2.2.5) znamo da vrijedi $\rho \geq \omega^{\gamma_1}$. Prethodno smo već dobili $\rho < \omega^\beta$ pa vrijedi $\omega^{\gamma_1} < \omega^\beta$. Direktno prema korolaru 2.3.8 slijedi $\gamma_1 < \beta$.
- $\delta, m_1, m_2, \ldots, m_n \in \omega \setminus \{0\}$. Pokazali smo to za δ, a za $m_1, m_2, \ldots, m_n$ tvrdnja vrijedi po pretpostavci indukcije.

Pokažimo sada da je Cantorova normalna forma jedinstvena za svaki ordinalni broj. Pretpostavimo suprotno. Tada po lemi 1.3.9 postoji najmanji ordinal α koji ima barem dvije Cantorove normalne forme, odnosno vrijedi

$$\alpha = \omega^{\beta_1} k_1 + \omega^{\beta_2} k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} k_n = \omega^{\gamma_1} l_1 + \omega^{\gamma_2} l_2 + \cdots + \omega^{\gamma_m} l_m,$$

gdje su te dvije Cantorove normalne forme različite.

Pokažimo da vrijedi $\beta_1 = \gamma_1$. Pretpostavimo li da je $\beta_1 > \gamma_1$, onda vrijedi $\beta_1 > \gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_n$ te $l_1, l_2, \ldots, l_m \in \omega$ pa možemo primijeniti lemu 2.4.2:

$$\omega^{\beta_1} > \omega^{\gamma_1} l_1 + \omega^{\gamma_2} l_2 + \cdots + \omega^{\gamma_m} l_m = \alpha.$$

No to je u kontradikciji s $\alpha > \omega^{\beta_1} k_1 \geq \omega^{\beta_1}$ prema teoremu 1.3.3. U slučaju da je $\gamma_1 > \beta_1$, na isti bismo način došli do kontradikcije. Zaključujemo po teoremu 1.3.3 da vrijedi $\beta_1 = \gamma_1$.

Sada ako uvedemo oznake

$$\begin{aligned} \delta &:= \omega_1^{\beta} = \omega_1^{\gamma}, \\ \rho_1 &:= \omega^{\beta_2} k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} k_n, \text{ i} \\ \rho_2 &:= \omega^{\gamma_2} l_2 + \cdots + \omega^{\gamma_m} l_m, \end{aligned}$$

imamo da je $\delta \cdot k_1 + \rho_1 = \alpha = \delta \cdot l_1 + \rho_2$ te znamo da su $\rho_1 < \delta$ i $\rho_2 < \delta$ prema lemi 2.4.2. Tada prema teoremu 2.2.14 vrijedi $k_1 = l_1$ i $\rho_1 = \rho_2$. Kako su $\rho_i < \alpha$ (uz isti dokaz kao za $\rho < \alpha$), oni moraju imati jedinstvenu Cantorovu normalnu formu pa bi stoga moralo biti $n = m, \beta_i = \gamma_i$ te $k_i = l_i$, što je kontradikcija. □

Sljedeća lema pokazuje da promatrajući samo ordinale manje od ϵ_0 eliminiramo mogućnost neograničene rekurzivnosti u Cantorovoj normalnoj formi.

Lema 2.4.4. *Neka je $\omega^{\gamma_1} m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_n} m_n$ Cantorova normalna forma ordinalnog broja α. Ako je $\alpha < \epsilon_0$, tada je $\gamma_1 < \alpha$ (pa su onda i svi ostali $\gamma_i < \alpha$).*

Dokaz. Neka je $\alpha < \epsilon_0$. Prvo pokažimo da je $\gamma_1 \leq \alpha$:

$$\alpha \overset{2.1.4}{\geq} \omega^{\gamma_1} m_1 \overset{2.2.5}{\geq} \omega^{\gamma_1} \overset{2.4.1}{\geq} \gamma_1.$$

Ako vrijedi $\alpha = \gamma_1$, tada je po antisimetričnosti $\gamma_1 = \omega^{\gamma_1}$ pa je γ_1 ϵ-ordinal. Kako je ϵ_0 najmanji takav ordinal vrijedi $\gamma_1 \geq \epsilon_0 > \alpha$. Sada imamo $\gamma_1 = \alpha$ i $\gamma_1 > \alpha$, što je kontradikcija s teoremom 1.3.3. Dakle, mora biti $\alpha > \gamma_1$. □

2.5 Apsorpcija

U ovom odjeljku cilj nam je pokazati apsorpcijsko svojstvo za zbrajanje i množenje.

Definicija 2.5.1. *Ordinalni broj α je* ***apsorpcijski za operaciju*** $\circ$ *ako za sve $\beta \geq \mu_\circ$ takve da je $\beta < \alpha$ vrijedi $\beta \circ \alpha = \alpha$.*

Apsorpcijsko svojstvo za zbrajanje

Još tijekom opisivanja zbrajanja ordinalnih brojeva u primjerima smo nailazili na jednakosti poput:

$$1 + \omega = \omega,\ 2 + \omega = \omega,\ 3 + \omega = \omega, \ldots$$

Vodeći se time dolazimo do ideje da bi moglo vrijediti $k + \omega = \omega$ za sve konačne ordinale $k < \omega$ (znamo da su konačni ordinali zapravo prirodni brojevi).

Teorem 2.5.2. *Za sve $k < \omega$ vrijedi $k + \omega = \omega$.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom po k.

BAZA: Ako je $k = 0$, tada prema lemi 2.1.2 znamo da je $0 + \omega = \omega$.

Ako je $k = 1$, tada koristeći tvrdnju z(iii) imamo:

$$1 + \omega = \sup\{1 + n : n < \omega\} = \omega.$$

KORAK: Pretpostavimo da $k + \omega = \omega$ vrijedi za neki k. Tada koristeći slučaj $k = 1$ iz baze dobivamo:

$$k^+ + \omega = k + 1 + \omega \overset{k=1}{=} k + \omega \overset{\text{p.i.}}{=} \omega.$$ □

Koristeći taj teorem možemo dobiti općenitiju verziju.

Korolar 2.5.3. *Ako je $\alpha > 0$, tada je $k + \omega^\alpha = \omega^\alpha$, za sve $k < \omega$.*

Dokaz. Iz $\alpha > 0$ prema propoziciji 1.3.7 slijedi $\alpha \geq 1$. Tada primjenom teorema 2.3.7 dobivamo $\omega \leq \omega^\alpha$ pa prema teoremu 2.1.12 postoji γ takav da $\omega^\alpha = \omega + \gamma$. Sada koristeći teorem 2.5.2 dobivamo za proizvoljni $k < \omega$:

$$k + \omega^\alpha = k + \omega + \gamma = \omega + \gamma = \omega^\alpha.$$ □

Lema 2.5.4. *Ako je $\beta < \alpha$ te $k < \omega$, tada je $\omega^\beta \cdot k + \omega^\alpha = \omega^\alpha$.*

Dokaz. Znamo da je $\beta < \alpha$ pa prema teoremu 2.1.12 postoji γ takav da $\alpha = \beta + \gamma$, a znamo da je $\gamma \neq 0$ jer inače bismo imali $\alpha = \beta$ što bi dalo kontradikciju s teoremom 1.3.3. Sada možemo prema teoremu 2.3.13 zapisati $\omega^\alpha = \omega^{\beta+\gamma} = \omega^\beta \cdot \omega^\gamma$. Koristeći teorem 2.2.10 i korolar 2.5.3 dobivamo:

$$\omega^\beta \cdot k + \omega^\alpha = \omega^\beta \cdot k + \omega^\beta \cdot \omega^\gamma = \omega^\beta \cdot (k + \omega^\gamma) = \omega^\beta \cdot \omega^\gamma = \omega^\alpha.$$ □

Teorem 2.5.5. *Ako je $\beta < \omega^\alpha$, tada je $\beta + \omega^\alpha = \omega^\alpha$.*

Dokaz. Prema teoremu 2.4.3 znamo da za ordinalni broj β postoji jedinstveni $n \in \omega$ te konačni nizovi $\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_n$ i $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \omega \setminus \{0\}$ takvi da:

$$\beta = \omega^{\gamma_1} m_1 + \omega^{\gamma_2} m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_n} m_n.$$

Ako je $\beta = 0$, tada $0 + \omega^\alpha = \omega^\alpha$ vrijedi prema lemi 2.1.2. To znači da dalje možemo pretpostavljati da je $\beta > 0$ te da suma s desne strane ima bar jedan pribrojnik.

Želimo pokazati da je $\alpha > \gamma_1$. Znamo da je $\beta \geq \omega^{\gamma_1}$ što vrijedi zbog:

$$\beta \overset{2.1.4}{\geq} \omega^{\gamma_1} m_1 \overset{2.2.5}{\geq} \omega^{\gamma_1},$$

gdje smo koristili $\omega^{\gamma_2} m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_n} m_n \geq 0$ i $m_1 \geq 1$. Iz upravo dokazane nejednakosti i pretpostavke leme slijedi $\omega^{\gamma_1} \leq \beta < \omega^\alpha$ pa prema korolaru 2.3.8 vrijedi $\alpha > \gamma_1$.

Dobili smo $\alpha > \gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_n$, odnosno $\alpha > \gamma_i$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Također znamo da vrijedi $m_i < \omega$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sada primjenjujući n puta lemu 2.5.4 dobivamo:

$$\begin{aligned} \beta + \omega^\alpha &= \omega^{\gamma_1} m_1 + \omega^{\gamma_2} m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_n} m_n + \omega^\alpha \\ &\vdots \\ &= \omega^{\gamma_1} m_1 + \omega^{\gamma_2} m_2 + \omega^\alpha \\ &= \omega^{\gamma_1} m_1 + \omega^\alpha \\ &= \omega^\alpha. \end{aligned}$$

□

Apsorpcijsko svojstvo za množenje

Razmišljamo slično kao kod zbrajanja.

Teorem 2.5.6. *Za sve $k > 0$ takve da je $k < \omega$ vrijedi $k \cdot \omega = \omega$.*

Dokaz. Neka je $k < \omega$. Tada koristeći da je umnožak dva prirodna broja ponovno prirodan broj, odnosno $k \cdot n < \omega$ za $n \in \omega$, dobivamo:

$$k \cdot \omega = \sup \{k \cdot n : n < \omega\} \leq \omega.$$

S druge strane, iz $k > 0$ prema propoziciji 1.3.7 slijedi $k \geq 0^+ = 1$. Koristeći desnu monotonost množenja (teorem 2.2.7) imamo:

$$k \cdot \omega \geq 1 \cdot \omega \overset{2.2.4}{=} \omega.$$

Dakle vrijedi $\omega \leq k \cdot \omega \leq \omega$, odnosno po antisimetričnosti $k \cdot \omega = \omega$. □

Lema 2.5.7. *Za sve $k > 0$ takve da je $k < \omega$ vrijedi $k \cdot \omega^{\omega^\alpha} = \omega^{\omega^\alpha}$.*

Dokaz. Neka je $k < \omega$ i $k > 0$. Ako je $\alpha = 0$, tada je:

$$\omega^{\omega^\alpha} = \omega^{\omega^0} \overset{\text{p(i)}}{=} \omega^1 \overset{2.3.5}{=} \omega.$$

Tvrdnja teorema tada direktno slijedi iz teorema 2.5.6.

Ako je pak $\alpha > 0$, tada koristeći lijevu monotonost potenciranja (teorem 2.3.7) imamo:

$$1 \overset{\text{p(i)}}{=} \omega^0 \overset{2.3.7}{<} \omega^\alpha.$$

Sada po teoremu 2.1.12 postoji γ takav da je $\omega^\alpha = 1 + \gamma$, a znamo da je $\gamma \neq 0$ jer inače bismo imali $\omega^\alpha = 1$ što bi dalo kontradikciju s teoremom 1.3.3. Sada možemo zapisati $\omega^{\omega^\alpha} = \omega^{1+\gamma} = \omega^1 \cdot \omega^\gamma = \omega \cdot \omega^\gamma$. Koristeći teorem 2.2.12 i teorem 2.5.6 dobivamo:

$$k \cdot \omega^{\omega^\alpha} = k \cdot \omega \cdot \omega^\gamma = \omega \cdot \omega^\gamma = \omega^{\omega^\alpha}$$

□

Teorem 2.5.8. *Ako je $\beta > 0$ i $\beta < \omega^{\omega^\alpha}$, tada je $\beta \cdot \omega^{\omega^\alpha} = \omega^{\omega^\alpha}$.*

Dokaz. Prema teoremu 2.4.3 znamo da za ordinalni broj β postoji jedinstveni $n \in \omega$ te konačni nizovi $\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_n$ i $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \omega \setminus \{0\}$ takvi da:

$$\beta = \omega^{\gamma_1} m_1 + \omega^{\gamma_2} m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_n} m_n.$$

Zbog $\beta > 0$ znamo da suma s desne strane ima bar jedan pribrojnik.

Dokaz ćemo provesti primjenom antisimetričnosti, odnosno pokazat ćemo $\beta \cdot \omega^{\omega^\alpha} \geq \omega^{\omega^\alpha}$ i $\beta \cdot \omega^{\omega^\alpha} \leq \omega^{\omega^\alpha}$.

$\geq$: Pokažimo prvo da je $\beta \geq \omega^{\gamma_1}$. Koristeći lijevu monotnost zbrajanja (teorem 2.1.4) i množenja (teorem 2.2.5) dobivamo:

$$\beta \overset{2.1.4}{\geq} \omega^{\gamma_1} m_1 \overset{2.2.5}{\geq} \omega^{\gamma_1},$$

gdje smo koristili $\omega^{\gamma_2} m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_n} m_n \geq 0$ i $m_1 \geq 1$.

Pokažimo još i $\gamma_1 < \omega^\alpha$ kako bismo mogli iskoristiti apsorpcijsko svojstvo zbrajanja. Iz nejednakosti $\omega^{\gamma_1} \leq \beta < \omega^{\omega^\alpha}$ prema korolaru 2.3.8 slijedi $\gamma_1 < \omega^\alpha$.

Sada koristeći teorem 2.2.7 zbog $\beta \geq \omega^{\gamma_1}$ imamo:

$$\beta \cdot \omega^{\omega^\alpha} \overset{2.2.7}{\geq} \omega^{\gamma_1} \cdot \omega^{\omega^\alpha} \overset{2.3.13}{=} \omega^{\gamma_1 + \omega^\alpha} \overset{2.5.5}{=} \omega^{\omega^\alpha}.$$

$\leq$: Pokažimo prvo da je $\beta < \omega^{\gamma_1} m_1^+$. Ako je $\beta = \omega^{\gamma_1} m_1$ tada direktno koristeći lijevu monotonost množenja (teorem 2.2.5) dobivamo $\beta = \omega^{\gamma_1} m_1 < \omega^{\gamma_1} m_1^+$. Inače prema lemi 2.4.2 znamo da vrijedi $\omega^{\gamma_1} > \omega^{\gamma_2} m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_n} m_n$ pa koristeći lijevu monotonost zbrajanja (teorem 2.1.4) dobivamo:

$$\beta < \omega^{\gamma_1} m_1 + \omega^{\gamma_1} = \omega^{\gamma_1} m_1^+.$$

Nejednakost $\gamma_1 < \omega^\alpha$ vrijedi kao i u prethodnom smjeru.

Sada koristeći teorem 2.2.7 zbog $\beta < \omega^{\gamma_1} \cdot m_1^+$ imamo:

$$\begin{aligned}\beta \cdot \omega^{\omega^\alpha} &\overset{2.2.7}{\leq} (\omega^{\gamma_1} \cdot m_1^+) \cdot \omega^{\omega^\alpha} \overset{2.2.12}{=} \omega^{\gamma_1} \cdot (m_1^+ \cdot \omega^{\omega^\alpha}) \\ &\overset{2.5.7}{=} \omega^{\gamma_1} \cdot \omega^{\omega^\alpha} \overset{2.3.13}{=} \omega^{\gamma_1 + \omega^\alpha} \overset{2.5.5}{=} \omega^{\omega^\alpha}. \quad \square\end{aligned}$$

Poglavlje 3

Ordinalni kalkulator

U ovom poglavlju navodimo neke detalje o implementaciji ordinalnog kalkulatora. Više detalja se može doznati čitajući dokumentaciju i kod, koji su dostupni na [1]. Za implementaciju smo koristili programski jezik Python zbog njegove javne dostupnosti i velikog broja korisnika. Također, postojanje grafičkog sučelja *Jupyter Notebook* za Python olakšava lijep prikaz računalne reprezentacije ordinalnih brojeva.

Čitav izvorni kod, koji uključuje glavnu biblioteku, aplikaciju za korištenje te Jupyterovu bilježnicu s mnogim primjerima, može se naći u [1].

3.1 Implementacija

Za početak je potrebno odabrati kako ćemo reprezentirati ordinalni broj. Zbog postojanja Cantorove normalne forme za sve ordinale te njezinog oblika odabiremo ga reprezentirati kao listu parova gdje svaki par predstavlja jedan pribrojnik Cantorove normalne forme. Znamo da su pribrojnici oblika $\omega^\gamma \cdot \beta$ pa u paru pamtimo eksponent i koeficijent, odnosno (γ, β).

Sada koristeći svojstva ordinalne aritmetike pokazana u prethodnom poglavlju želimo razviti algoritme za uspoređivanje, zbrajanje, množenje i potenciranje ordinalnih brojeva u Cantorovoj normalnoj formi. Promatrat ćemo ordinalne brojeve manje od ϵ_0:

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} m_1 + \omega^{\gamma_2} m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_i} m_i, \text{ i}$$
$$\beta = \omega^{\delta_1} n_1 + \omega^{\delta_2} n_2 + \cdots + \omega^{\delta_j} n_j.$$

S obzirom da promatramo ordinalne brojeve manje od ϵ_0, znamo prema lemi 2.4.4 da je $\alpha > \gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_i$. To znači da svaki γ_k možemo napisati u Cantorovoj normalnoj formi te će za njegove eksponente vrijediti da su strogo manji od γ_k itd. Čitav taj postupak stat će u konačno mnogo koraka zbog dobre utemeljenosti klase **On**.

Uspoređivanje

Za uspoređivanje ordinala α i β potrebno je leksikografski usporediti $(\gamma_1, m_1, \gamma_2, , \dots, m_i)$ i $(\delta_1, n_1, \delta_2, , \dots, n_j)$; odnosno, redom uspoređivati γ_1 i δ_1, pa m_1 i n_1, pa γ_2 i δ_2, ... Kada dođemo do prvih različitih komponenti, tada je veći onaj ordinal kojem pripada veća komponenta. Ako smo došli do kraja komponenti za uspoređivanje i sve su bile jednake, tada je manji onaj ordinal u kojem je ponestalo komponenti, a ako smo u oba došli do kraja, ordinali su jednaki.

Pokažimo korektnost algoritma. Ako je $\alpha = 0$ ili $\beta = 0$, tada odmah dolazimo do kraja algoritma te vidimo da točno radi. Pretpostavimo da su oba ordinala veća od nule, odnosno da njihove Cantorove normalne forme imaju barem jedan pribrojnik. Pokažimo da $\gamma_1 > \delta_1$ povlači $\alpha > \beta$. Pretpostavimo da je $\gamma_1 > \delta_1$, onda vrijedi $\gamma_1 > \delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_n$ te $n_1, n_2, \dots, n_j \in \omega$ pa možemo primijeniti lemu 2.4.2:

$$\alpha \overset{2.1.4}{\geq} \omega^{\gamma_1} m_1 \overset{2.2.5}{\geq} \omega^{\gamma_1} \overset{2.4.2}{>} \omega^{\delta_1} n_1 + \omega^{\delta_2} n_2 + \cdots + \omega^{\delta_j} n_j = \beta.$$

Analogno bismo pokazali da $\gamma_1 < \delta_1$ povlači $\alpha < \beta$. Neka je $\gamma_1 = \delta_1$. Pokažimo da onda $m_1 > n_1$ povlači $\alpha > \beta$. Pretpostavimo da je $m_1 > n_1$, onda prema propoziciji 1.3.7 vrijedi $m_1 \geq n_1^+$ pa dobivamo:

$$\alpha \overset{2.1.4}{\geq} \omega^{\gamma_1} m_1 = \omega^{\delta_1} m_1 \overset{2.2.5}{\geq} \omega^{\delta_1} n_1^+ \overset{z(ii)}{=} \omega^{\delta_1} n_1 + \omega^{\delta_1} \overset{2.4.2}{>} \omega^{\delta_1} n_1 + \omega^{\delta_2} n_2 + \cdots + \omega^{\delta_j} n_j = \beta.$$

Analogno bismo pokazali da $m_1 < n_1$ povlači $\alpha < \beta$. Ako vrijedi $m_1 = n_1$, tada imamo $\omega^{\gamma_1} m_1 = \omega^{\delta_1} n_1$. Koristeći teorem 2.1.4 znamo da pokažemo li za $\alpha_1 = \omega^{\gamma_2} m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_i} m_i$ i $\beta_1 = \omega^{\delta_2} n_2 + \cdots + \omega^{\delta_i} n_j$ da vrijedi $\alpha_1 < \beta_1$ ili $\alpha_1 > \beta_1$ ili $\alpha_1 = \beta_1$ isti odnos će vrijediti i za α i β, tako da nastavljamo uspoređivanje α_1 i β_1 istim postupkom.

Zbrajanje

Zbroj ordinala $\alpha + \beta$ možemo lako pojednostaviti koristeći svojstvo apsorpcije za zbrajanje. Ako je $\alpha = 0$, tada je $\alpha + \beta = \beta$ prema lemi 2.1.2. Ako je $\beta = 0$, tada je $\alpha + \beta = \alpha$ prema tvrdnji z(i). Pretpostavimo da su oba ordinala veća od nule, odnosno da njihove Cantorove normalne forme imaju barem jedan pribrojnik. Neka je $\gamma_k, k \leq i$ najmanji eksponent za koji vrijedi $\gamma_k \geq \delta_1$. Tada primjenjujući $i - k$ puta lemu 2.5.4 dobijemo:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \omega^{\gamma_1} m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} m_k + \cdots + \omega^{\gamma_i} m_i + \omega^{\delta_1} n_1 + \cdots + \omega^{\delta_j} n_j \\ &= \omega^{\gamma_1} m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} m_k + \omega^{\delta_1} n_1 + \cdots + \omega^{\delta_j} n_j. \quad (*) \end{aligned}$$

Ako vrijedi $\gamma_k = \delta_1$ koristeći distributivnost slijeva (teorem 2.2.10) imamo:

$$\alpha + \beta = \omega^{\gamma_1} m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} (m_k + n_1) + \omega^{\delta_2} n_2 + \cdots + \omega^{\delta_j} n_j,$$

a inače je $\gamma_k > \delta_1$ pa je $(*)$ već Cantorova normalna forma za $\alpha + \beta$.

Ako ne postoji takav eksponent γ_k, jednostavno je $\alpha+\beta = \beta = \omega^{\delta_1}n_1 + \cdots + \omega^{\delta_j}n_j$ (čitav α se apsorbira u β).

Množenje

Odredimo umnožak ordinala $\alpha\cdot\beta$. Ako je $\alpha = 0$, tada je $\alpha\cdot\beta = 0$ prema teoremu 2.2.2. Ako je $\beta = 0$, tada je $\alpha\cdot\beta = 0$ prema tvrdnji m(i). Pretpostavimo da su oba ordinala veća od nule, odnosno da njihove Cantorove normalne forme imaju barem jedan pribrojnik. Raspišimo izraz $\alpha \cdot \beta$ koristeći distributivnost slijeva (teorem 2.2.10):

$$\alpha \cdot \beta = (\omega^{\gamma_1}m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i}m_i) \cdot \omega^{\delta_1}n_1 + \cdots + (\omega^{\gamma_1}m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i}m_i) \cdot \omega^{\delta_j}n_j.$$

Sada redom za sve pribrojnike Cantorove normalne forme od β gdje je $\delta_k > 0$ pokažimo da je $(\omega^{\gamma_1}m_1+\cdots+\omega^{\gamma_i}m_i)\cdot\omega^{\delta_k}n_k = \omega^{\gamma_1+\delta_k}n_k$. Dokaz ćemo provesti primjenom antisimetričnosti. Koristeći nejednakost:

$$\omega^{\gamma_1}m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i}m_i \overset{2.4.2}{<} \omega^{\gamma_1}m_1 + \omega^{\gamma_1} \overset{\text{z(ii)}}{<} \omega^{\gamma_1}m_1^+,$$

primjenom teorema 2.2.7 dobivamo:

$$(\omega^{\gamma_1}m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i}m_i) \cdot \omega^{\delta_k}n_k \overset{2.2.7}{\leq} \omega^{\gamma_1}m_1^+ \cdot \omega^{\delta_k}n_k \overset{2.5.6}{=} \omega^{\gamma_1} \cdot \omega^{\delta_k}n_k \overset{2.3.13}{=} \omega^{\gamma_1+\delta_k}n_k.$$

Koristeći nejednakost:

$$\omega^{\gamma_1}m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i}m_i \overset{2.1.4}{\geq} \omega^{\gamma_1}m_1,$$

primjenom teorema 2.2.7 dobivamo:

$$(\omega^{\gamma_1}m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i}m_i) \cdot \omega^{\delta_k}n_k \overset{2.2.7}{\geq} \omega^{\gamma_1}m_1 \cdot \omega^{\delta_k}n_k \overset{2.5.6}{=} \omega^{\gamma_1} \cdot \omega^{\delta_k}n_k \overset{2.3.13}{=} \omega^{\gamma_1+\delta_k}n_k.$$

Po antisimetričnosti slijedi $(\omega^{\gamma_1}m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i}m_i) \cdot \omega^{\delta_k}n_k = \omega^{\gamma_1+\delta_k}n_k$. Ako smo na taj način prošli kroz sve pribrojnike vrijedi:

$$\alpha \cdot \beta = \omega^{\gamma_1+\delta_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_1+\delta_j}n_j.$$

Inače, ako je $\delta_j = 0$, tada je zadnji pribrojnik Cantorove normalne forme od β jednak n_j i imamo:

$$\alpha \cdot \beta = \omega^{\gamma_1+\delta_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_1+\delta_{j-1}}n_{j-1} + (\omega^{\gamma_1}m_1 + \omega^{\gamma_2}m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_i}m_i) \cdot n_j$$

pa koristeći algoritam koji smo razvili za zbrajanje dobijemo:

$$(\omega^{\gamma_1}m_1 + \omega^{\gamma_2}m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_i}m_i) \cdot n_j = \alpha + \overset{n_j \text{ puta}}{\cdots} + \alpha = \omega^{\gamma_1}m_1n_j + \omega^{\gamma_2}m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_i}m_i.$$

Potenciranje

Odredimo potenciju ordinala α^β. Ako je $\beta = 0$, tada je $\alpha^\beta = 1$ prema tvrdnji p(i). Ako je $\alpha = 0$ i $\beta > 0$, tada je $\alpha^\beta = 0$ prema teoremu 2.3.3. Pretpostavimo da su oba ordinala veća od nule, odnosno da njihove Cantorove normalne forme imaju barem jedan pribrojnik. Ako je $\beta = 1$, tada je $\alpha^\beta = \alpha$ prema lemi 2.3.5. Ako je $\alpha = 1$, tada je $\alpha^\beta = 1$ prema lemi 2.3.6.

Ako je $1 < \alpha < \omega$, tada je $\gamma_1 = 0$ i $\alpha = m_1 > 1$. Za sve $\delta_k > 0$, vrijedi $\delta_k \geq 1$ pa koristeći teorem 2.1.12 dobivamo da postoje ε_k takvi da je $\delta_k = 1 + \varepsilon_k$. Ako to vrijedi za sve δ_k, $k \leq j$ dobivamo:

$$\alpha^\beta = m_1^{\omega^{\delta_1} n_1 + \cdots + \omega^{\delta_j} n_j} = m_1^{\omega^{1+\varepsilon_1} n_1 + \cdots + \omega^{1+\varepsilon_j} n_j} \overset{2.3.13}{=} m_1^{\omega \cdot \omega^{\varepsilon_1} n_1 + \cdots + \omega \cdot \omega^{\varepsilon_j} n_j} \overset{2.2.10}{=} m_1^{\omega \cdot (\omega^{\varepsilon_1} n_1 + \cdots + \omega^{\varepsilon_j} n_j)}$$
$$\overset{2.3.15}{=} (m_1^\omega)^{\omega^{\varepsilon_1} n_1 + \cdots + \omega^{\varepsilon_j} n_j} \overset{2.3.12}{=} \omega^{\omega^{\varepsilon_1} n_1 + \cdots + \omega^{\varepsilon_j} n_j}. \quad (*)$$

Inače, ako je $\delta_j = 0$, tada raspisujemo jednako kao u prethodnom slučaju jednakost $(*)$, no koristeći „distributivnost" slijeva (teorem 2.3.13) dobivamo:

$$\alpha^\beta = m_1^{\omega^{\delta_1} n_1 + \cdots + \omega^{\delta_{j-1}} n_{j-1} + n_j} \overset{2.3.13}{=} m_1^{\omega^{\delta_1} n_1 + \cdots + \omega^{\delta_{j-1}} n_{j-1}} \cdot m_1^{n_j} \overset{(*)}{=} \omega^{\omega^{\varepsilon_1} n_1 + \cdots + \omega^{\varepsilon_{j-1}} n_{j-1}} \cdot m_1^{n_j}.$$

Ako je $\alpha \geq \omega$, raspišimo izraz α^β koristeći opet teorem 2.3.13:

$$\alpha^\beta = (\omega^{\gamma_1} m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i} m_i)^{\omega^{\delta_1} n_1} \cdot \cdots \cdot (\omega^{\gamma_1} m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i} m_i)^{\omega^{\delta_j} n_j}.$$

Sada redom za sve pribrojnike Cantorove normalne forme od β gdje je $\delta_k > 0$ pokažimo da je $(\omega^{\gamma_1} m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i} m_i)^{\omega^{\delta_k} n_k} = \omega^{\gamma_1 \cdot \omega^{\delta_k} n_k}$. Dokaz ćemo provesti primjenom antisimetričnosti. Koristeći nejednakost:

$$\omega^{\gamma_1} m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i} m_i \overset{2.4.2}{<} \omega^{\gamma_1 \cdot 2},$$

primjenom teorema 2.3.9 dobivamo:

$$(\omega^{\gamma_1} m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i} m_i)^{\omega^{\delta_k} n_k} \overset{2.3.9}{\leq} (\omega^{\gamma_1 \cdot 2})^{\omega^{\delta_k} n_k} \overset{2.3.15}{=} \omega^{\gamma_1 \cdot 2 \cdot \omega^{\delta_k} n_k} \overset{2.5.6}{=} \omega^{\gamma_1 \cdot \omega^{\delta_k} n_k}.$$

S druge strane, koristeći nejednakost:

$$\omega^{\gamma_1} m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i} m_i \overset{2.1.4}{\geq} \omega^{\gamma_1} m_1 \geq \omega^{\gamma_1},$$

primjenom teorema 2.3.9 dobivamo:

$$(\omega^{\gamma_1} m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i} m_i)^{\omega^{\delta_k} n_k} \overset{2.3.9}{\geq} (\omega^{\gamma_1})^{\omega^{\delta_k} n_k} \overset{2.3.15}{=} \omega^{\gamma_1 \cdot \omega^{\delta_k} n_k}.$$

Po antisimetričnosti vrijedi $(\omega^{\gamma_1} m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i} m_i)^{\omega^{\delta_k} n_k} = \omega^{\gamma_1 \cdot \omega^{\delta_k} n_k}$. Ako smo prošli kroz sve pribrojnike vrijedi:

$$\alpha^\beta = \omega^{\gamma_1 \cdot (\omega^{\delta_1} n_1 + \cdots + \omega^{\delta_j} n_j)}.$$

Inače, ako je $\delta_j = 0$, tada je zadnji pribrojnik Cantorove normalne forme od β jednak n_j i imamo:

$$\alpha^\beta = \omega^{\gamma_1 \cdot (\omega^{\delta_1} n_1 + \cdots + \omega^{\delta_{j-1}} n_{j-1})} \cdot (\omega^{\gamma_1} m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i} m_i)^{n_j},$$

gdje drugi faktor raspišemo koristeći algoritam koji smo razvili za množenje. Ako je $\gamma_i > 0$, tada dobivamo:

$$(\omega^{\gamma_1} m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i} m_i)^{n_j} = \alpha \cdot \overset{n_j \text{ puta}}{\cdots} \cdot \alpha = \omega^{\gamma_1 \cdot n_j} m_1 + \omega^{\gamma_1 \cdot (n_j - 1) + \gamma_2} m_2 + \cdots + \omega^{\gamma_1 \cdot (n_j - 1) + \gamma_i} m_i.$$

A ako je $\gamma_i = 0$, tada dobivamo:

$$(\omega^{\gamma_1} m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i} m_i)^{n_j} = \alpha \cdot \overset{n_j \text{ puta}}{\cdots} \cdot \alpha =$$

$$\omega^{\gamma_1 \cdot n_j} m_1 + \sum_{k=2}^{i} \omega^{\gamma_1 \cdot (n_j - 1) + \gamma_k} m_k + \sum_{l=1}^{n_j - 1} \left(\omega^{\gamma_1 \cdot (n_j - l)} m_1 m_i + \sum_{k=2}^{i} \omega^{\gamma_1 \cdot (n_j - l - 1) + \gamma_k} m_k \right).$$

Bibliografija

[1] B. Bašić, *Ordinalni kalkulator*, 2020, dostupno na `https://github.com/babjank/Ordinalni-kalkulator` (rujan 2020.).

[2] J. H. Conway i R. K. Guy, *The book of numbers*, Copernicus, 1996 (engleski).

[3] W. Sierpiński, *Cardinal and ordinal numbers*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1965 (engleski).

[4] P. Suppes, *Axiomatic set theory*, Dover Publications, 1972 (engleski).

[5] M. Vuković, *Teorija skupova — predavanja*, 2015.

Sažetak

U ovom radu razvili smo računalnu reprezentaciju ordinala do ϵ_0 u Cantorovoj normalnoj formi. Nad njome smo implementirali uspoređivanje te operacije zbrajanja, množenja i potenciranja u sklopu programa *Ordinalni kalkulator*. U prvom poglavlju smo se upoznali s raznim klasama uređenih skupova te pojmom ordinalnog broja. U drugom poglavlju smo definirali navedene relacije i operacije te dokazali njihova osnovna svojstva. Posebno smo dokazali apsorcijsko svojstvo za zbrajanje i množenje. Također smo dokazali teoreme o oduzimanju i dijeljenju na kojima se temelji implementacija tih dviju operacija. U zadnjem poglavlju smo koristeći razvijenu aritmetiku ordinala izveli algoritme za ostale operacije na kojima se temelji njihova implementacija u Ordinalnom kalkulatoru.

Summary

In this paper, we have developed a computer representation of the ordinals up to ϵ_0 in Cantor's normal form. Using it we have implemented comparison, addition, multiplication and exponentiation as a part of the `OrdCalc` program. In the first chapter, we introduced various classes of ordered sets and the concept of ordinal number. In the second chapter, we defined the mentioned relations and operations and proved their basic properties. In particular, we proved the absorption property of addition and multiplication. We also proved the subtraction and division theorems on which the implementation of these two operations is based. In the last chapter, using the developed ordinal arithmetic, we derived algorithms for other operations on which their implementation in the Ordinal Calculator is based.

Životopis

Dana 2. srpnja 1996. godine rođena sam u Zagrebu, gdje sam odrasla i živim sa svojim roditeljima i sestrama. Školovanje sam započela 2003. godine u osnovnoj školi „Horvati" u Zagrebu, gdje sam sve razrede završila s odličnim uspjehom. Tijekom osnovnoškolskog obrazovanja sam sudjelovala u Comeniusovom projektu „Europe Anim Action" i natječaju „Možemo to riješiti!" koji je nastao u suradnji s Veleposlanstvom SAD-a te sam se u zadnjem razredu plasirala na državno natjecanje iz fizike.

Upisala sam 2011. godine Prirodoslovno-matematičku gimnaziju „XV. gimazija" u Zagrebu. Tijekom srednje škole sam se plasirala na državna natjecanja iz logike i matematike te na temelju potonjeg ostvarila izravni upis na preddiplomski sveučilišni studij Matematike Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, koji sam upisala 2015. godine.

Na diplomski sveučilišni studij Računarstvo i matematika se upisujem 2018. godine te ga prolazim u 10% najboljih studenata. U ljeto akademske godine 2018./2019. sam radila praksu u softverskoj tvrtci Koios, gdje smo trebali razviti programsko rješenje za specifičan problem iz financijskog sektora.

Uz redovno obrazovanje, od 2013. godine volontiram u Odredu izviđača „Borongaj", neprofitnoj udruzi koja je član Saveza izviđača Hrvatske, te u sklopu toga pohađam tečajeve za dodatnu edukaciju.