Sveučilište u Zagrebu
PMF–Matematički odsjek

Vedran Čačić, Matea Čelar, Sebastijan Horvat,
Bruno Predojević, Lucija Validžić

Zbirka zadataka iz teorije skupova

(drugo izdanje)

Zagreb, 2022.

Sadržaj

Predgovor

Predgovor prvom izdanju

Ova zbirka sadrži zadatke s vježbi iz kolegija Teorija skupova, te zadatke koji su se (dugi) niz godina pojavljivali na pismenim ispitima i kolokvijima iz spomenutog kolegija. Ovaj materijal je prije svega namijenjen studentima koji slušaju kolegij Teorija skupova, odnosno trebaju polagati ispit iz tog kolegija. Želimo istaknuti da u pravilu u ovoj zbirci nema zadataka koji su strikno vezani uz teoriju (kao što su npr. zadaci s dokazivanjem skupovnih identiteta, ili pak zadaci s određivanjem zavisnosti među aksiomima Zermelo–Fraenkelove teorije skupova). Takvi zadaci su dani u skripti za kolegij Teorija skupova.

Svaki ispravak, ili pak sugestiju, koji bi mogli doprinijeti poboljšanju ovog teksta, rado ćemo prihvatiti.

U Zagrebu, lipanj 2008. autori

Predgovor drugom izdanju

Nakon 15 godina, odlučili smo „osvježiti” Zbirku: dodati nove zadatke, uskladiti terminologiju i oznake, modernizirati LaTeX, maknuti teorijske uvode, popraviti greške u nekim zadacima odnosno rješenjima, i još ponešto. Ako uočite da smo bilo gdje u tom procesu pogriješili, cijenili bismo da nam javite.

Iznimno smo zahvalni autorima prvog izdanja (Brückler, Doko, Vuković) na ustupanju starih zadataka i izvornog koda Zbirke, kako ne bismo morali početi od nule.

U Zagrebu, 2023. novi autori

1 Osnovni pojmovi

1.1 Skupovne inkluzije

1. Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Ispitajte odnos među navedenim skupovima. Navedite dokaze, odnosno kontraprimjere, za pojedine inkluzije.

a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C \setminus A)$ i $B \triangle (C \cup A)$

b) $(A \setminus B) \cup \big(B \setminus (A \cup C)\big)$ i $\big(A \setminus (B \setminus C)\big) \cup (B \setminus C)$

c) $(A \cup B) \setminus (C \cup A)$ i $B \setminus (A \cup C)$

d) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ i $(B \cap C) \cup A$

e) $A \cap (B \cup C) \setminus B$ i $A \cap C \setminus B$

f) $(B \cup C) \setminus (A \cup B)$ i $C \setminus (B \cup A)$

g) $B \setminus C \setminus (B \setminus A)$ i $B \cap A \setminus C$

h) $(B \cup C) \cap (B \cup A)$ i $(C \cap A) \cup B$

i) $B \cap (C \cup A) \setminus C$ i $B \cap A \setminus C$

j) $(C \cup A) \setminus (B \cup C)$ i $A \setminus (C \cup B)$

k) $C \setminus A \setminus (C \setminus B)$ i $C \cap B \setminus A$

l) $(C \cup A) \cap (C \cup B)$ i $(A \cap B) \cup C$

m) $C \cap (A \cup B) \setminus A$ i $(C \cap B) \setminus A$

n) $A \setminus (B \cup C)$ i $A \setminus B \setminus C$

o) $A \cup (B \setminus C)$ i $(A \cup B) \setminus C$

p) $(A \setminus B) \cup C$ i $(A \cup C) \setminus B$

q) $(B \setminus A) \cup (A \setminus C)$ i $B \setminus C$

r) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ i $A \setminus C$

s) $A \cap (B \setminus C)$ i $(A \cap B) \setminus C$

t) $(C \cup A) \setminus (B \cup C)$ i $A \setminus (C \cup B)$

u) $A \setminus B \setminus (A \setminus C)$ i $A \cap C \setminus B$

v) $(A \setminus B) \cup \big(B \setminus (A \cup C)\big)$ i $\big(A \setminus (B \setminus C)\big) \cup (B \setminus C)$

w) $\big(A \setminus (B \cup C)\big) \cup (A \cap B \setminus C)$ i $C \setminus A$

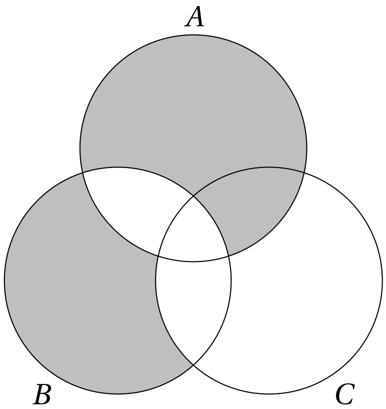
x) $(C \cap B \setminus A) \cup (A \setminus B)$ i $A \cup (B \cap C)$

y) $\big(A \setminus (B \cup C)\big) \cup (C \setminus A)$ i $C \setminus (A \cap C)$

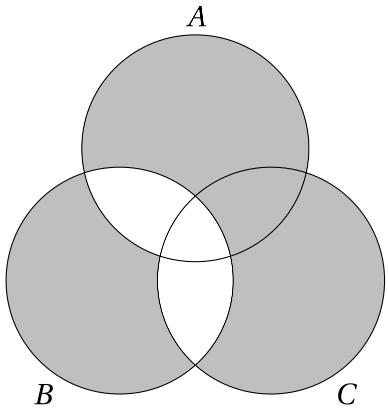
z) $(A \cup B) \setminus (C \cap B)$ i $A \cup (B \setminus C)$

R1.

a) Na sljedećoj slici su dani Vennovi dijagrami koji ilustriraju zadane skupove.



$(A \setminus B) \cup (B \setminus C \setminus A)$



$B \triangle (C \cup A)$

Iz slike vidimo da bi trebalo vrijediti $(A \setminus B) \cup (B \setminus C \setminus A) \subseteq B \triangle (C \cup A)$. Dokažimo to!

Ako je $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C \setminus A)$, imamo dva slučaja. U prvom je $x \in A$ i $x \notin B$, pa je tada svakako $x \in C \cup A$, što s $x \notin B$ daje $x \in (C \cup A) \setminus B \subseteq B \triangle (C \cup A)$.

U drugom je slučaju $x \in B$, $x \notin C$ i $x \notin A$. Pretpostavka $x \in C \cup A$ bi vodila na kontradikciju (bilo $x \in C$ bilo $x \in A$) pa zaključujemo $x \notin C \cup A$, što zajedno s $x \in B$ daje $x \in B \setminus (C \cup A) \subseteq B \triangle (C \cup A)$.

Odavde naša inkluzija slijedi. Da obratna inkluzija ne mora vrijediti zaključujemo iz primjera $A := \{1\}$, $B := \{2\}$, $C := \{3\}$, kada je $(A \setminus B) \cup (B \setminus C \setminus A) = \{1\} \cup \{2\} = \{1,2\}$ i $B \triangle (C \cup A) = \{2\} \triangle \{1,3\} = \{1,2,3\}$.

b) Iz $B \supseteq B \setminus C$ slijedi $A \setminus B \subseteq A \setminus (B \setminus C)$, a iz $A \cup C \supseteq C$ slijedi $B \setminus (A \cup C) \subseteq B \setminus C$. Zato je $(A \setminus B) \cup \big(B \setminus (A \cup C)\big) \subseteq (A \setminus \big(B \setminus C)\big) \cup (B \setminus C)$.

Obratna inkluzija općenito ne vrijedi. Na primjer za $A := B := C := \{1\}$ je $(A \setminus B) \cup (B \setminus (A \cup C)) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ i $(A \setminus (B \setminus C)) \cup (B \setminus C) = \{1\} \cup \emptyset = \{1\}$.

c) $A \cup C = C \cup A$ (komutativnost unije) a $A \cup B \supseteq B$, pa je desni skup podskup lijevoga. No vrijedi i obrnuta inkluzija, jer ako je x u lijevom skupu, tada $x \in A$ ili $x \in B$, i usto (de Morgan) $x \notin C$ i $x \notin A$. Iz ovog zadnjeg slijedi da je $x \in A$ nemoguće, pa mora biti $x \in B$, a to znači da je x i u desnom skupu.

d) Jednakost vrijedi zbog distributivnosti unije prema presjeku (lijevo) i komutativnosti unije (desno).

e) Vrijedi jednakost, slično kao u zadatku (c): jedna inkluzija se dobije iz monotonosti, a druga raspisivanjem slučajeva i uočavanjem da je jedan od njih nemoguć.

f) Ovo je (c) s ciklički zamijenjenim slovima $A \to B \to C \to A$. Dakle vrijedi jednakost.

q) Ako je $x \in B \setminus C$, to znači da je $x \in B$ i $x \notin C$. Ako je pritom još $x \in A$, tada je $x \in A \setminus C$, a ako nije, tada je $x \in B \setminus A$. Dakle u svakom slučaju je $x \in (B \setminus A) \cup (A \setminus C)$, pa je desni skup podskup lijevog. Da lijevi općenito nije podskup desnog, vidi se iz kontraprimjera $A := 1$, $B := C := 0$: tada je lijevi skup $(0 \setminus 1) \cup (1 \setminus 0) = 0 \cup 1 = 1 \ni 0$, a desni $1 \setminus 1 = 0 \not\ni 0$.

v) Općenito iz $Y \subseteq Z$ slijedi $X \setminus Z \subseteq X \setminus Y$. Dakle, zbog $B \setminus C \subseteq B$ je $A \setminus B \subseteq A \setminus (B \setminus C)$, a zbog $C \subseteq A \cup C$ je $B \setminus (A \cup C) \subseteq B \setminus C$. Dakle, lijeva strana je podskup desne.

Da desna nije općenito podskup lijeve vidimo iz kontraprimjera $A := B := 1, C := 0$: tada je lijevi skup $(1 \setminus 1) \cup (1 \setminus 1) = \emptyset$, a desni je neprazan jer je $0 \in B \setminus C$.

2. Neka je U proizvoljan skup, te $A, B, C \subseteq U$. Označimo $B' := U \setminus B$. Dokažite:

a) $A \cap B \subseteq C$ ako i samo ako $A \subseteq B' \cup C$;

b) $A \subseteq B \cup C$ ako i samo ako $A \cap B' \subseteq C$.

3. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ skupovi, $n \geq 2$. Dokažite da se skup $A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n$ sastoji od onih elemenata koji pripadaju A_i za neparno mnogo indeksa i.

R3. Iz definicije simetrične razlike vidimo da tvrdnja vrijedi za $n = 2$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, te pogledajmo što se događa kada imamo simetričnu razliku $n+1$ skupova. Neka je

$$x \in A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots A_n \triangle A_{n+1} = (A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots A_n) \triangle A_{n+1}.$$

Po definiciji simetrične razlike imamo dva slučaja:

1° $x \in A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots A_n$ i $x \not\in A_{n+1}$

Tada po pretpostavci slijedi da se x nalazi u neparnom broju skupova $A_1, \ldots, A_{n+1}$ (neparno mnogo od prvih n, i ne nalazi se u zadnjem).

2° $x \not\in A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots A_n$ i $x \in A_{n+1}$

Iz pretpostavke slijedi da se x nalazi u parnom broju skupova $A_1, \ldots, A_n$, pa se (zbog $x \in A_{n+1}$) nalazi u neparnom broju skupova $A_1, \ldots, A_{n+1}$.

Po principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \geq 2$.

4. Pomoću operacije $\triangle$ i bilo koje od operacija $\cap$, $\cup$, $\setminus$ izrazite preostale dvije.

R4.

a) pomoću $\triangle$ i $\cap$: $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$, $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$;

b) pomoću $\triangle$ i $\cup$: $A \cap B = (A \cup B) \triangle A \triangle B$, $A \setminus B = (A \cup B) \triangle B$;

c) pomoću $\triangle$ i $\setminus$: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, $A \cup B = A \triangle B \triangle \big(A \setminus (A \setminus B)\big)$.

5. Dokažite da nijedna od operacija $\setminus$ i $\cup$ nije izraziva pomoću $\cap$ i one druge.

R5.

a) Za skup A označimo s A' proizvoljni skup definiran pomoću A primjenom konačno mnogo (ukupno n) operacija $\cap$ i $\cup$. Za zadani skup A lako je indukcijom po n dokazati da za sve takve A' vrijedi $A' = A$. No za $A := \{1\}$ je $\emptyset = A \setminus A \neq A' = A = \{1\}$, za svaki tako definirani skup A'.

b) Za skupove A i B, s $A \% B$ označimo proizvoljni skup definiran pomoću skupova A i B primjenom konačno mnogo (ukupno n) operacija $\cap$ i $\setminus$. Za zadane skupove A i B lako je indukcijom po n dokazati da za sve takve skupove $A \% B$ vrijedi $A \% B \subseteq A$ ili $A \% B \subseteq B$. No za $A := \{1\}$ i $B := \{2\}$ nije ni $A \cup B \subseteq A$ niti $A \cup B \subseteq B$, pa unija $A \cup B$ ne može biti jednaka nijednom tako definiranom skupu $A \% B$.

6. Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Riješite skupovne sustave
te odredite nužne i dovoljne uvjete za postojanje i jedinstvenost rješenja.

a) $A \cup X = B \cap X$ i $A \cap X = C \cup X$;

b) $A \setminus X = X \setminus B$ i $X \setminus A = C \setminus X$;

c) $A \cap X = B \setminus X$ i $C \cup X = X \setminus A$.

R6.

a) Iz prve jednadžbe imamo $x \in A \Rightarrow x \in A \cup X = B \cap X \Rightarrow x \in X$, odnosno $A \subseteq X$. Iz druge imamo $x \in X \Rightarrow x \in C \cup X = A \cap X \Rightarrow x \in A$, odnosno $X \subseteq A$. Iz toga zaključujemo da je jedini kandidat za rješenje $X = A$, samo još treba vidjeti kada to zaista jest rješenje. Uvrstivši $X := A$ u sustav, dobijemo $A = B \cap A$ i $A = C \cup A$, odnosno $C \subseteq A \subseteq B$. Zaključujemo: ako vrijedi $C \subseteq A \subseteq B$, jedinstveno rješenje je $X = A$, a inače sustav nema rješenja.

b) Pogledajmo prvu jednadžbu. Njena lijeva i desna strana su očito disjunktne (za sve x iz lijeve strane vrijedi $x \notin X$, dok za sve x iz desne strane vrijedi $x \in X$), a jedini skup disjunktan sa samim sobom je prazan skup. Zaključujemo $A \setminus X = \emptyset$, odnosno $A \subseteq X$. Na isti način (disjunktnost jednakih skupova) iz druge jednadžbe zaključujemo $X \subseteq A$, pa opet imamo da je jedini kandidat za rješenje $X = A$. Uvrštavanjem dobivamo uvjet pod kojim je to zaista rješenje, i to je $A \setminus B = C \setminus A = \emptyset$, odnosno, kao i u prethodnom zadatku, $C \subseteq B \subseteq A$.

c) Kao u prethodnom zadatku, lijeva i desna strana prve jednadžbe su disjunktne (za sve x iz lijeve strane vrijedi $x \in X$, dok za sve x iz desne strane vrijedi $x \notin X$). Zaključujemo $A \cap X = B \setminus X = \emptyset$, odnosno X je disjunktan s A, te je nadskup od B. Za takav skup vrijedi $X \setminus A = X$, pa druga jednadžba postaje $C \cup X = X$, dakle $C \subseteq X$. Sveukupno, uvjeti na X su: disjunktan s A, te nadskup od $B \cup C$. Uvjet da takav X postoji je, dakako, da $B \cup C$ bude disjunktan s A. Zaključak: ako je $A \cap (B \cup C) \neq \emptyset$, sustav nema rješenje. U suprotnom, sustav ima rješenje (na primjer, $B \cup C$ je jedno rješenje), i ono nikada nije jedinstveno: za proizvoljni $y \notin A \cup B \cup C$ (recimo $y := A \cup B \cup C$), skup $B \cup C \cup \{y\}$ je također rješenje.

7. Za niz skupova $(A_n)_n$ definiramo

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} A_n\,, \qquad \limsup_n A_n := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n>m} A_n\,.$$

Dokažite da za sve nizove skupova $(A_n)_n$ vrijedi $\liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n$.

Odredite te limese za niz segmenata (u $\mathbb{R}$) $([0,n])_n$.

8. Neka su $(A_n)_n$ i $(B_n)_n$ nizovi skupova za koje vrijedi

$$\left(\bigcap\nolimits_{n>0} A_n\right) \cap \left(\bigcap\nolimits_{n>0} B_n\right) = \emptyset, \quad \text{i} \quad \left(\bigcup\nolimits_{n>0} A_n\right) \cup \left(\bigcup\nolimits_{n>0} B_n\right) \subseteq B_0.$$

Dokažite da tada vrijedi

$$\bigcap\nolimits_{n>0} A_n \subseteq \bigcup\nolimits_{n>0} (A_n \cap B_{n-1} \setminus B_n).$$

9. Neka su $\{A_i : i \in I\}$ i $\{B_j : j \in J\}$ familije skupova. Dokažite:

$$\bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J} (A_i \cap B_j), \qquad \bigcap_{i\in I} A_i \cup \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{i\in I} \bigcap_{j\in J} (A_i \cup B_j).$$

1.2 Relacije

10. Neka su R, Q i S proizvoljne relacije.
Dokažite da $R \subseteq Q$ povlači $R \circ S \subseteq Q \circ S$ i $S \circ R \subseteq S \circ Q$.

11. Neka je A skup i R relacija na njemu.
Dokažite da je $R = id_A$ ako i samo ako za svaku relaciju Q na A vrijedi $R \circ Q = Q \circ R = Q$.

12. Dokažite da za sve relacije R_1, R_2 i R_3 vrijede inkluzije:

a) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$

b) $(R_1 \cup R_2) \circ R_3 \subseteq (R_1 \circ R_3) \cup (R_2 \circ R_3)$

Pokažite primjerima da jednakosti ne moraju vrijediti.

13. Neka je R relacija te $\{R_i : i \in I\}$ familija relacijā. Dokažite da vrijede inkluzije:

a) $R \circ \bigcap_{i\in I} R_i \subseteq \bigcap_{i\in I} (R \circ R_i)$

b) $(\bigcup_{i\in I} R_i) \circ R \subseteq \bigcup_{i\in I} (R_i \circ R)$

Navedite primjere koji pokazuju da jednakosti ne moraju vrijediti.

14. Neka su R i Q proizvoljne relacije. Dokažite da tada vrijedi:

a) $R \subseteq Q$ povlači $R^{-1} \subseteq Q^{-1}$;

b) $(R \cup Q)^{-1} = R^{-1} \cup Q^{-1}$;

c) $(R \cap Q)^{-1} = R^{-1} \cap Q^{-1}$;

d) $(R^{-1})^{-1} = R$.

15. Neka je A skup i R relacija na njemu. Dokažite:

a) R je refleksivna na A ako i samo ako je $id_A \subseteq R$;

b) R je irefleksivna ako i samo ako je $R \cap id_A = \emptyset$;

c) R je simetrična ako i samo ako je $R \subseteq R^{-1}$;

d) R je antisimetrična ako i samo ako je $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$;

e) R je tranzitivna ako i samo ako je $R \circ R \subseteq R$;

f) R je relacija ekvivalencije na A ako i samo ako je $R \circ R^{-1} \cup id_A = R$.

16. Za operaciju na relacijama kažemo da čuva svojstvo relacije ako, čim operandi imaju to svojstvo, ima ga i rezultat operacije.

a) Dokažite da unija, presjek, inverz i kompozicija relacija čuvaju refleksivnost (na nekom fiksnom skupu A).

b) Ispitajte čuvaju li te četiri operacije i simetričnost.

c) Dokažite da tri od te četiri operacije čuvaju irefleksivnost.

d) Navedite kontraprimjer koji pokazuje da četvrta operacija ne čuva irefleksivnost.

17. Neka je R relacija. Dokažite da je $R \cup R^{-1}$ najmanja simetrična relacija koja sadrži R (tzv. simetrično zatvorenje od R).

18. Neka su R_1 i R_2 antisimetrične relacije na skupu A. Dokažite ili opovrgnite:

a) relacija $R_1 \cup R_2$ je antisimetrična ako i samo ako vrijedi $R_1 \cap R_2^{-1} \subseteq id_A$;

b) relacija $R_1 \cup R_2$ je antisimetrična ako i samo ako $R_1 \cap R_2 \subseteq id_A$.

19. Neka je R simetrična i tranzitivna relacija.
Dokažite da postoji jedinstveni skup A takav da je R relacija ekvivalencije na A.

20. Neka su P i Q relacije ekvivalencije na skupu A. Dokažite:

a) $P \cup Q$ je relacija ekvivalencije na A ako i samo ako je $P \cup Q = Q \circ P$;

b) $Q \circ P$ je relacija ekvivalencije na A ako i samo ako je $P \circ Q = Q \circ P$;

c) $P \circ P = A^2$ ako i samo ako je $P = A^2$;

d) $P \circ Q = A^2$ ako i samo ako je $Q \circ P = A^2$;

e) ako je $P \circ Q = Q \circ P$, tada je $P \cup Q$ relacija ekvivalencije na A. Vrijedi li obrat?

21. Definirajte relaciju ekvivalencije na skupu $\mathbb{R}$ za koju je $[0,2\rangle$ skup reprezentanata, tj. svaka klasa ekvivalencije ima točno jednog reprezentanta u skupu $[0,2\rangle$ i svaki element od $[0,2\rangle$ pripada točno jednoj klasi ekvivalencije.

R21. Definiramo relaciju $\sim$ na $\mathbb{R}$ kao kongruentnost modulo 2:

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x \equiv y \pmod 2 \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(x - y = 2k).$$

Lako je provjeriti da je $\sim$ relacija ekvivalencije i da zadovoljava uvjete zadatka: svaki $x \in \mathbb{R}$ ima jedinstvenog reprezentanta $f(x) := x \bmod 2 = x - 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \in [0,2\rangle$.

22. Neka je R relacija na skupu A. Dokažite da postoji tzv. refleksivno i tranzitivno zatvorenje relacije R: refleksivna (na A) i tranzitivna relacija $R^\intercal$ takva da je $R \subseteq R^\intercal$, te je $R^\intercal$ najmanja takva relacija, tj. ako je $Q \supseteq R$ refleksivna na A i tranzitivna relacija tada je $R^\intercal \subseteq Q$.

R22. Označimo $S := \{R' \subseteq A \times A : (R' \text{ je refleksivna na } A) \wedge (R' \text{ je tranzitivna}) \wedge R \subseteq R'\}$.
Primijetimo da je $S \neq \emptyset$ jer je $A^2 \in S$. Definiramo $R^\intercal := \bigcap_{R' \in S} R'$.
Lako je provjeriti da relacija $R^\intercal$ ima tražena svojstva.

23. Neka je $R \subseteq A \times A$ proizvoljna relacija. Dokažite:

a) najmanja refleksivna (na A) relacija koja sadrži relaciju R je $R \cup id_A$;

b) najmanja simetrična relacija koja sadrži relaciju R
(tzv. simetrično zatvorenje relacije R) je $R \cup R^{-1}$;

c) tranzitivno zatvorenje relacije R je $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$;

d) $R^\intercal = id_A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$;

e) najmanja relacija ekvivalencije koja sadrži relaciju R je $(R \cup R^{-1})^\intercal$.

24. Dokažite da za sve relacije R i Q na istom skupu A
(s obzirom na koji je definiran operator $^\intercal$) vrijedi:

a) $(R^\intercal)^\intercal = R^\intercal$;

b) $R \subseteq Q$ povlači $R^\intercal \subseteq Q^\intercal$;

c) $Q \subseteq R \subseteq Q^\intercal$ povlači $R^\intercal = Q^\intercal$;

d) $(R \cup Q)^\intercal = (R^\intercal \circ Q^\intercal)^\intercal$.

25. Neka je R relacija na skupu A. Za skup $B \subseteq A$ kažemo da je R-zatvoren ako je $R[B] \subseteq B$, odnosno ako $x \in B$ i $x\,R\,y$ povlače $y \in B$.
Dokažite da je skup R-zatvoren ako i samo ako je $R^\intercal$-zatvoren.

26. Neka je R relacija na skupu A. Za svaki $B \subseteq A$, s $Cl_R(B)$ označavamo
najmanji R-zatvoreni podskup od A koji sadrži skup B.

a) Dokažite da je to dobra definicija (takav skup uvijek postoji i jedinstven je).

b) Dokažite da za svaki $B \subseteq A$ vrijedi $Cl_R(B) = R^{\intercal}[B]$.

c) Na $\mathscr{P}(A)$ definiramo relaciju R s $X\,R\,Y :\Leftrightarrow \exists a\,(Y = X \cup \{a\})$. Odredite $Cl_R(\emptyset)$.

1.3 Funkcije

27. Za funkciju $f : A \to A$ definiramo rekurzivno funkciju f^n s $f^0 := id_A$, $f^{n+1} := f^n \circ f$. Dokažite: ako za neki $n \in \mathbb{N}_+$ vrijedi $f^n = f^0$, tada je f bijekcija.

28. Neka je $h : A \to A$. Dokažite:

a) h je surjekcija na A ako i samo ako za sve $f, g : A \to A$, $f \circ h = g \circ h$ povlači $f = g$ (desno komponiranje s h je injekcija);

b) h je injekcija ako i samo ako za sve $f, g : A \to A$, $h \circ f = h \circ g$ povlači $f = g$ (lijevo komponiranje s h je injekcija).

29. Neka su A i B skupovi te $f : A \to B$ i $g : B \to A$ funkcije takve da vrijedi $f \circ g = id_B$ i $g \circ f = id_A$. Dokažite da je tada $g = f^{-1}$.

30. Za proizvoljnu funkciju $h : A \to B$, relaciju $\ker h := \{(x, y) \in A^2 : h(x) = h(y)\}$ nazivamo jezgrom funkcije h. Dokažite da je jezgra svake funkcije relacija ekvivalencije na njenoj domeni. Dokažite i da je svaka relacija ekvivalencije jezgra neke funkcije.

31. Neka je $f : X \to Y$ proizvoljna funkcija. Dokažite da postoji relacija ekvivalencije R na skupu X, takva da se f može zapisati kao kompozicija surjekcije $\Phi : X \to T$ i injekcije $\Psi : T \to Y$, gdje je T kvocijentni skup $X/_R$.

32. Neka su A i B skupovi. Neka su $f : A \to A$, $g : B \to B$ te $u, v : A \to B$ funkcije za koje vrijedi $u \circ f = g \circ u$ i $v \circ f = g \circ v$. Dokažite: ako se funkcije u i v podudaraju na nekom $t \in A$, tada se podudaraju i na $f(t)$.

33. Neka je S skup i $f : S \to \mathscr{P}(S)$ injekcija. Označimo sa Z skup $\{s \in S : s \notin f(s)\}$. Dokažite da ne postoji $z \in S$ takav da je $Z = f(z)$.

R33. Po definiciji skupa Z za sve $s \in S$ vrijedi $s \in Z$ ako i samo ako $s \notin f(s)$. To upravo znači da skupovi Z i $f(s)$ ne mogu biti jednaki ni za koji s, jer se razlikuju po pitanju pripadnosti elementa s njima.

2 Ekvipotentni skupovi

34. Neka je $f : a \to b$ funkcija. Dokažite: ako možemo napisati izraz pomoću $f(x)$ čija je vrijednost jednaka x za sve $x \in a$ („možemo očitati/rekonstruirati x iz $f(x)$"), tada je f injekcija.

R34. Ako je vrijednost tog izraza jednaka x kad se u njega uvrsti $f(x)$, onda je jednaka x' kad se u njega uvrsti $f(x')$ za bilo koji $x' \in a$.

To znači da $f(x) = f(x')$ povlači $x = \cdots f(x) \cdots = \cdots f(x') \cdots = x'$, pa je f injekcija.

35. Dokažite da je svaki beskonačni podskup od $\mathbb{N}$ prebrojiv.

R35. Neka je S bilo koji beskonačni podskup od $\mathbb{N}$. Zbog $S \subseteq \mathbb{N}$ je $\mathfrak{K}(S) \le \aleph_0$. Za dokaz obratne nejednakosti, koristeći dobru uređenost od $\mathbb{N}$ konstruirajmo $f : \mathbb{N} \to S$ rekurzivno s $f(0) := \min S$ (postoji jer je S neprazan), $f(n+1) := \min\{x \in S : x > f(n)\}$ (postoji jer $f(n)$ ne može biti najveći element u S — tada bi S bio podskup od $f(n)+1$, dakle konačan).

Po definiciji je $f(n+1) > f(n)$ za svaki n, dakle f je rastuća funkcija, pa je injekcija, iz čega slijedi $\aleph_0 \le \mathfrak{K}(S)$.

36. Odredite kardinalnost skupa svih prirodnih brojeva s neparno mnogo znamenaka.

R36. Neka $S = \{n : n \in \mathbb{N},\ \text{ broj znamenaka od } n \text{ je neparan}\}$.
Prvi način. Očito je S beskonačan podskup od $\mathbb{N}$. Iz zadatka 35 slijedi da je $\mathfrak{K}(S) = \aleph_0$.

Drugi način. Zbog $S \subseteq \mathbb{N}$ je $\mathfrak{K}(S) \le \aleph_0$. Funkcija $\exp_{100} : \mathbb{N} \to S$ definirana s $\exp_{100}(n) := 100^n \in S$ (ima $2n+1$ znamenku) je rastuća zbog $100 > 1$, pa je injekcija, iz čega $\aleph_0 \le \mathfrak{K}(S)$.

37. (a) Odredite kardinalnost skupa S_{fin} svih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$.
(b) Odredite kardinalnost skupa S_{inf} svih beskonačnih podskupova od $\mathbb{N}$.
(c) Odredite kardinalnost skupa S_{cof} svih kofinitnih podskupova od $\mathbb{N}$
(onih kojima je komplement s obzirom na $\mathbb{N}$ konačan).

R37. Za sve $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} =: \mathbb{N}_+$ neka je sa S_m označen skup svih m-članih podskupova od $\mathbb{N}$. Očito je $S_{fin} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} S_m$. Zatim, $\mathfrak{K}(S_m) \le \mathfrak{K}(\mathbb{N}^m) = \aleph_0^m = \aleph_0$ ($\mathsf{sort} : S_m \to \mathbb{N}^m$ je injekcija). Dakle, $\mathfrak{K}(S_{fin}) \le \aleph_0$. S druge strane funkcija $f : \mathbb{N} \to S_{fin}$ definirana s $f(n) = \{n\}$ je injekcija. To znači da vrijedi i $\aleph_0 \le \mathfrak{K}(S_{fin})$, pa je $\mathfrak{K}(S_{fin}) = \aleph_0$.

Kako je $\mathfrak{K}\big(\mathscr{P}(\mathbb{N})\big) = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ te $\mathscr{P}(\mathbb{N}) = S_{fin} \cup S_{inf}$, i znamo $\mathfrak{K}(S_{fin}) = \aleph_0$, mora biti $\mathfrak{K}(S_{inf}) = \mathfrak{c}$.

Očito je $A \mapsto \mathbb{N} \setminus A$ bijekcija između S_{cof} i S_{fin}. To znači da je $\mathfrak{K}(S_{cof}) = \mathfrak{K}(S_{fin}) = \aleph_0$.

38. Odredite kardinalnost skupa P svih particija skupa $\mathbb{N}$.

R38. Particija na $\mathbb{N}$ ima koliko i relacija ekvivalencije na $\mathbb{N}$ ($q(\sim) := \mathbb{N}/_\sim$ je bijekcija između $E := \{R : R \subseteq \mathbb{N}^2, R$ je relacija ekvivalencije na $\mathbb{N}\}$ i P). Zbog $E \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ je $\mathfrak{K}(E) \leq 2^{\aleph_0^2} = \mathfrak{c}$.

Za skup $N := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ definirajmo funkciju $r : \mathscr{P}(N) \to P$ s $r(A) := \big\{A \cup \{0\}, (\mathbb{N} \setminus A) \cup \{1\}\big\}$ (očito je $r(A) \in P$ za svaki $A \in \mathscr{P}(N)$). Ako su A i A' različiti podskupovi od N, postoji x takav da BSOMP $x \in A \setminus A'$. Zbog $x \in A \subseteq N \not\ni 0$ je $x\, q^{-1}\big(r(A)\big)\, 0$, dok to ne vrijedi za A', pa $r(A)$ i $r(A')$ moraju biti različiti. Dakle r je injekcija, pa je $\mathfrak{K}(P) \geq \mathfrak{K}\big(\mathscr{P}(N)\big) = 2^{\mathfrak{K}(N)}$. No N je prebrojiv ($x \mapsto x + 2$ je bijekcija između $\mathbb{N}$ i N) pa sveukupno imamo

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = \mathfrak{K}\big(\mathscr{P}(\mathbb{N}^2)\big) \geq \mathfrak{K}(E) = \mathfrak{K}(P) \geq \mathfrak{K}\big(\mathscr{P}(N)\big) = 2^{\mathfrak{K}(N)} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{K}(P) = \mathfrak{c}.$$

39. Odredite kardinalnost skupa svih beskonačnih podskupova od $\mathbb{Q}$.

R39. Neka je $S := \{A : A \subseteq \mathbb{Q}$ beskonačan$\}$.

Prvi način. Skup $\mathbb{Q}$ je prebrojiv pa kao u zadatku 37(b) slijedi da je $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

Drugi način. Zbog $S \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{Q})$ je $\mathfrak{K}(S) \leq 2^{\mathfrak{K}(\mathbb{Q})} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.
No svaki Dedekindov rez je beskonačan, pa je $\mathbb{R} \subseteq S$, iz čega $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{K}(S)$.

2.1 Skup realnih brojeva

40. Neka je $\mathscr{I}$ skup u parovima disjunktnih intervala u $\mathbb{R}$. Dokažite da je $\mathscr{I}$ konačan ili prebrojiv.

R40. Poredajmo racionalne brojeve u niz (što možemo jer je $\mathbb{Q}$ prebrojiv) i svakom $I \in \mathscr{I}$ pridružimo prvi broj t_I u tom nizu koji pripada tom intervalu (što možemo jer svaki realni interval sadrži racionalni broj, a $\mathbb{N}$ je dobro uređen). Zbog $t_I \in I$ slijedi $t_I \notin I'$ za svaki $I' \in \mathscr{I} \setminus \{I\}$ (jer su I i I' kao elementi od $\mathscr{I}$ disjunktni), odnosno $t_I \neq t_{I'}$, pa je $I \mapsto t_I$ injekcija s $\mathscr{I}$ u $\mathbb{Q}$. Odatle je $\mathfrak{K}(\mathscr{I}) \leq \mathfrak{K}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$, pa tvrdnja slijedi po zadatku 45(a).

41. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$, takav da postoji $\delta > 0$, tako da za sve $x, y \in A$, $x \neq y$, vrijedi $|x - y| \geq \delta$. Dokažite da je tada skup A konačan ili prebrojiv.

R41. Svakom $x \in A$ pridružimo interval $I(x) := \left\langle x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}\right\rangle$. Za $x \neq y$ BSOMP $x < y$, pa je $\delta \leq |x - y| = y - x$, što možemo zapisati kao $x + \frac{\delta}{2} < y - \frac{\delta}{2}$, odnosno $I(x)$ i $I(y)$ su disjunktni.

Po zadatku 40, $\operatorname{rng} I$ je konačan ili prebrojiv skup. No I je injekcija prema upravo dokazanom (za $x \neq y$ je $I(x) \cap I(y) = \emptyset$), jer jedini skup disjunktan sa samim sobom je prazan, a nijedan $I(x)$ nije prazan jer sadrži x. To znači da je $\mathfrak{K}(A) \leq \mathfrak{K}(\operatorname{rng} I) \leq \aleph_0$, pa tvrdnja slijedi po zadatku 45(a).

42. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ prebrojiv skup. Postoji li $t \in \mathbb{R}$ takav da je $\{x+t : x \in A\}$ disjunktan s A?

R42. Označimo s B sliku funkcije $d : A \times A \to \mathbb{R}$ zadane s $d(x,y) := x - y$. Tada je $\mathfrak{K}(B) = \mathfrak{K}(\operatorname{rng} d) \le \mathfrak{K}(\operatorname{dom} d) = \mathfrak{K}(A \times A) = \mathfrak{K}(A) \cdot \mathfrak{K}(A) = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 < \mathfrak{c} = \mathfrak{K}(\mathbb{R})$, pa je $B \subset \mathbb{R}$ odnosno postoji $t \in \mathbb{R} \setminus B$. Fiksirajmo jedan, i pretpostavimo da je $y \in A \cap \{x+t : x \in A\}$. No tada postoji $x \in A$ takav da je $x+t = y$, odnosno $t = y - x = d(y,x) \in B$ (jer je $(y,x) \in A \times A$), kontradikcija. Zaključujemo da su A i $\{x+t : x \in A\}$ disjunktni.

43. Odredite kardinalnost skupa svih realnih brojeva čiji je razlomljeni dio racionalan. (Razlomljeni dio od x se definira kao $x - \lfloor x \rfloor$.)

R43. Za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, pa je $x - \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Q} \iff x \in \mathbb{Q}$ (jer je $(\mathbb{Q}, +)$ grupa).
Dakle, radi se o skupu $\mathbb{Q}$, koji je dakako kardinalnosti $\aleph_0$.

44. Odredite kardinalnost skupa svih elemenata od $[0,1]$ koji u zapisu u bazi 4 nemaju znamenku 2. Opišite kako taj skup možemo konstruirati izbacujući dijelove segmenta $[0,1]$.

R44. Neka je $S = \{x \in [0,1] : x \text{ u zapisu u bazi 4 nema znamenku 2}\}$.
Očito je $S \subseteq [0,1]$, pa je $k(S) \le \mathfrak{c}$.

Za dokaz druge nejednakosti promotrimo funkciju

$$F : {}^{\mathbb{N}}\{0,1\} \to S \quad \text{zadanu s} \quad F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(n)}{4^n}.$$

F očito ide u S jer njene vrijednosti zapisane u bazi 4 koriste samo znamenke 0 i 1.
Također, s obzirom na to da nismo koristili ni znamenku 3, F je injekcija (jedina višeznačnost pri zapisu u bazi 4 uključuje beskonačni niz znamenki 3 od nekog mjesta nadalje).

Dakle, $\mathfrak{K}(S) \ge \mathfrak{K}({}^{\mathbb{N}}\{0,1\}) = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Sve u svemu, $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

Za opis konstrukcije skupa S izbacivanjem dijelova segmenta $[0,1]$, primijetimo da je dovoljno u n-tom koraku izbaciti one brojeve koji na n-tom mjestu iza tetralne točke (kao decimalna točka, samo u bazi 4) imaju znamenku 2. Podrazumijevajući standardni zapis (bez beskonačnog repa znamenaka 3), to znači da u prvom koraku izbacujemo podinterval $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\rangle$, u drugom koraku podintervale $\left[\frac{1}{8}, \frac{3}{16}\right\rangle$, $\left[\frac{3}{8}, \frac{7}{16}\right\rangle$ i $\left[\frac{7}{8}, \frac{15}{16}\right\rangle$, i tako dalje. Precizno, u n-tom koraku izbacujemo sve intervale oblika $[(0.x_1x_2\cdots x_k2)_4, (0.x_1x_2\cdots x_k3)_4\rangle$, za $k \in \mathbb{N}$, $x_i \in \{0,1,3\}$.

45. Za skup kažemo da je *ubrojiv* ako je konačan ili prebrojiv. Dokažite:

a) Skup a je ubrojiv ako i samo ako je $\mathfrak{K}(a) \le \aleph_0$.

b) Svaki podskup ubrojivog skupa je ubrojiv.

c) Klasa svih ubrojivih skupova je zatvorena na binarne operacije unije, presjeka, skupovne razlike, simetrične razlike, i Kartezijeva produkta.

d) Ako funkcija ima ubrojivu domenu, tada ima i ubrojivu sliku.

e) Neprazni skup je ubrojiv ako i samo ako na njega postoji surjektivni niz.

f) Unija ubrojive familije ubrojivih skupova je ubrojiva.

g) Ako je a neprebrojiv i b ubrojiv, tada je $a \sim a \cup b \sim a \setminus b$.

R45.

a⇒) Ako je a konačan, tada postoji $n \in \mathbb{N}$ i bijekcija f s a na n. Kako je svaki element prirodnog broja ponovo prirodan, $n \subseteq \mathbb{N}$, pa je i $f : a \to \mathbb{N}$. No f je injekcija, odnosno $\mathfrak{K}(a) \leq \mathfrak{K}(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Ako je pak a prebrojiv, tada je po definiciji $\mathfrak{K}(a) = \aleph_0 \leq \aleph_0$.

a⇐) Neka je $f : a \to \mathbb{N}$ injekcija, i označimo $b := \operatorname{rng} f \subseteq \mathbb{N}$. Očito je f bijekcija između a i b, pa je $a \sim b$. Po zadatku 35 je svaki podskup od $\mathbb{N}$ ubrojiv, pa je b takav, a onda i a.

b) Neka je $b \subseteq a$ i $f : a \to \mathbb{N}$ injekcija. Tada je $f|_b : b \to \mathbb{N}$ injekcija kao restrikcija injekcije. Sada tvrdnja slijedi iz (a).

c∩\) Za operacije presjeka i skupovne razlike tvrdnja slijedi iz (b), jer su $a \setminus b$ i $a \cap b$ podskupovi od a.

c∪) Neka su a i b proizvoljni ubrojivi skupovi. Ako su disjunktni, zakoni aritmetike daju $\mathfrak{K}(a \cup b) = \mathfrak{K}(a) + \mathfrak{K}(b) \leq \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot 1 + \aleph_0 \cdot 1 = \aleph_0 \cdot (1+1) = \aleph_0 \cdot 2 \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Ako a i b nisu disjunktni, tada su a i $c := b \setminus a$ disjunktni, c je ubrojiv prema (c\), te je $a \cup c = a \cup b$ ubrojiv prema prethodnom odlomku.

c△) Tvrdnja slijedi iz (c∪) i (c\), jer je $a \triangle b = (a \setminus b) \cup (b \setminus a)$.

c×) Neka su a i b proizvoljni ubrojivi skupovi. Tada je $\mathfrak{K}(a \times b) = \mathfrak{K}(a) \cdot \mathfrak{K}(b) \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

d) Neka je h funkcija. Tvrdnja slijedi iz (a) i činjenice da je $\mathfrak{K}(\operatorname{rng} h) \leq \mathfrak{K}(\operatorname{dom} h)$.

e⇒) Neka je a neprazan ubrojiv skup. Po (a) postoji injekcija $f : a \to \mathbb{N}$. Zbog nepraznosti postoji $t \in a$. Tada je s $h(y) := \begin{cases} f^{-1}(y), & y \in \operatorname{rng} f \\ t, & y \in \mathbb{N} \setminus \operatorname{rng} f \end{cases}$ zadana surjekcija s $\mathbb{N}$ na a: za svaki $x \in a$ je $x = h\big(f(x)\big)$.

e⇐) Tvrdnja slijedi iz (d), jer je $\mathbb{N}$ ubrojiv.

f) Neka je a ubrojiva familija i za svaki $x \in a$, x ubrojiv. Prema tvrdnji (e) i aksiomu izbora, odaberimo po jednu surjekciju $g_x : \mathbb{N} \to x$ za svaki $x \in a$. Tada je formulom $h(x, i) := g_x(i)$ zadana surjekcija s $a \times \mathbb{N}$ na $\bigcup a$. Sada tvrdnja slijedi iz (d), jer je $a \times \mathbb{N}$ ubrojiv po (c×).

g) Neka je a neprebrojiv i b ubrojiv. Označimo $b_0 := b \setminus a$ i $b_1 := b \cap a$: prema (b) to su ubrojivi skupovi. Tada je $a \cup b = a \cup b_1 \cup b_0 = a \cup b_0$ zbog $b_1 \subseteq a$, pa je $\operatorname{card}(a \cup b) = \operatorname{card}(a \cup b_0) = \operatorname{card} a + \operatorname{card} b_0 = \max\{\operatorname{card} a, \operatorname{card} b_0\} = \operatorname{card} a$ zbog $\operatorname{card} a > \aleph_0 \geq \operatorname{card} b_0$ (korolar teorema o kvadratu).

Uz oznaku $c := a \setminus b = a \setminus (b_0 \cup b_1) = a \setminus b_0 \setminus b_1 = a \setminus b_1$ jer je b_0 disjunktan s a, imamo $a = c \cup b_1$ i $c \cap b_1 = \emptyset$, pa je $\operatorname{card} a = \operatorname{card} c + \operatorname{card} b_1$. Kad bi c i b_1 oba bili konačni, bio bi takav i a kao njihova unija, što je nemoguće. Dakle, barem jedan od njih je beskonačan, pa opet po korolaru teorema o kvadratu imamo $\aleph_0 < \operatorname{card} a = \operatorname{card} c + \operatorname{card} b_1 = \max\{\operatorname{card} c, \operatorname{card} b_1\}$, odnosno jedan od $\operatorname{card} c$ i $\operatorname{card} b_1$ je veći od $\aleph_0$. To ne može biti $\operatorname{card} b_1$ zbog (a), pa je $\operatorname{card} c > \aleph_0 \geq \operatorname{card} b_1$ te kao i prije imamo $\operatorname{card} a = \operatorname{card} c$.

46. Dokažite: unija prebrojive familije međusobno ekvipotentnih beskonačnih skupova je ekvipotentna svakom od njih.

R46. Neka je $S = \{s_0, s_1, \ldots\}$ prebrojiva familija, neka su svi s_i beskonačni, i $s_i \sim s_j$ za sve $i, j \in \mathbb{N}$. Zbog tranzitivnosti ekvipotentnosti dovoljno je dokazati $\bigcup S \sim s_0$. Jedna nejednakost je očita zbog $s_0 \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} s_i = \bigcup S$, pa zbog CSB trebamo dokazati samo drugu.

Za svaki $i \in \mathbb{N}$, skup B_i svih bijekcija između s_0 i s_i je neprazan ($id_{s_0} \in B_0$), pa primjenom aksioma izbora na $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dobivamo $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$, gdje je za svaki i, f_i bijekcija između s_0 i s_i.

Tvrdimo da je s $g(n,x) := f_n(x)$ zadana surjekcija s $\mathbb{N}\times s_0$ na $\bigcup S$. Doista, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki $x \in s_0$, $g(n,x) = f_n(x) \in \operatorname{rng} f_n = s_n \subseteq \bigcup S$. Također, za svaki $y \in \bigcup S$ postoji (recimo najmanji) $n \in \mathbb{N}$ takav da je $y \in s_n$, a onda za $x := f_n^{-1}(y) \in s_0$ vrijedi $g(n,x) = f_n\big(f_n^{-1}(y)\big) = y$.

To znači da je $\operatorname{card}(\bigcup S) = \operatorname{card}\operatorname{rng} g \le \operatorname{card}\operatorname{dom} g = \operatorname{card}(\mathbb{N}\times s_0) = \operatorname{card}\mathbb{N}\cdot\operatorname{card} s_0 = \aleph_0 \cdot \operatorname{card} s_0 = \max\{\aleph_0, \operatorname{card} s_0\}$. No s_0 kao beskonačan skup ima prebrojiv podskup, pa je $\aleph_0 \le \operatorname{card} s_0$, što daje drugu nejednakost $\operatorname{card}(\bigcup S) \le \operatorname{card} s_0$.

47. Za skup a, s a^* označimo skup svih konačnih nizova elemenata od a. Dokažite:

a) ako je a konačan ili prebrojiv neprazan skup, a^* je prebrojiv.

b) ako je a beskonačan, $a^* \sim a$.

R47. (a) Indukcijom po n, koristeći zadatak 45(c×) u koraku, lako se dokaže da je za svaki n, skup a^n konačan ili prebrojiv. Prema zadatku 45(f), a^* je konačan ili prebrojiv.

No činjenica da je a neprazan znači da postoji $t \in a$. Sada je s $f(n) := (t, t, \ldots, t)$ (konačni niz duljine n) zadana injekcija s $\mathbb{N}$ u a^*, pa je a^* sigurno beskonačan, odnosno prebrojiv.

(b) Indukcijom po n, u koraku koristeći korolar teorema o kvadratu, vidimo da je $a^n \sim a$ za svaki $n \in \mathbb{N}_+ := \mathbb{N}\setminus\{0\}$, dok je a^0 jednočlan (sadrži samo prazni niz). Skup $\mathbb{N}_+$ je očito prebrojiv (sljedbenik je bijekcija između $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}_+$) pa je po zadatku 46 skup $a^+ := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} a^n$ ekvipotentan s a (dakle, beskonačan). Sada je $\operatorname{card} a^* = \operatorname{card}(a^+ \cup \{()\}) = \operatorname{card} a^+ + \operatorname{card}\{()\} = \operatorname{card} a + 1 = \max\{\operatorname{card} a, 1\} = \operatorname{card} a$.

48.

a) Dokažite da je skup $\mathbb{Z}[x]$ svih polinoma jedne varijable s cjelobrojnim koeficijentima prebrojiv.

b) Dokažite da je skup $\mathbb{A}$ svih algebarskih realnih brojeva prebrojiv.

c) Dokažite da postoji transcendentni realni broj.

d) Dokažite da je skup svih iracionalnih brojeva ekvipotentan sa skupom svih transcendentnih realnih brojeva.

R48.

a) Prema zadatku 47(a), $\mathbb{Z}^*$ je prebrojiv. Funkcija $f : \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Z}[x]$ zadana s $f(a_0, a_1, \ldots, a_n) := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ je surjekcija, pa je $\mathbb{Z}[x]$ konačan ili prebrojiv po zadatku 45(d). No očito je beskonačan (zbog npr. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[x]$) pa mora biti prebrojiv.

b) Ako za svaki polinom $p \in P := \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$ s N_p označimo skup njegovih nultočaka, tada je N_p uvijek konačan (iz algebre znamo $\mathfrak{K}(N_p) = \deg p$). Također, P je konačan ili prebrojiv po zadatku 45(c\), pa je $\mathbb{A}_{\mathbb{C}} := \bigcup_{p\in P} N_p$ takav po zadatku 45(f), a onda i $\mathbb{A} := \mathbb{A}_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}$ po zadatku 45(b). No $\mathbb{A}$ je očito beskonačan (zbog npr. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A}$), pa mora biti prebrojiv.

c) Očito je $\mathbb{A} := \mathbb{A}_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$. Također, prema (b) je $\mathbb{A}$ prebrojiv, pa ne može biti $\mathbb{A} = \mathbb{R}$ jer znamo da je $\mathbb{R}$ neprebrojiv. Dakle, mora vrijediti $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$, odnosno $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A} \neq \emptyset$.

d) Skupovi $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{A}$ (svih realnih algebarskih brojeva) su prebrojivi.
Tada iz zadatka 45(g) slijedi $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, iz čega i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$.

49. Odredite kardinalnost skupa svih podskupova od $\mathbb{R}$ koji sadrže skup $\mathbb{N}$.

R49. Neka je $S = \{A \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{N} \subseteq A\}$. Zbog $S \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$ je $\mathfrak{K}(S) \leq 2^{\mathfrak{c}}$. Definirajmo funkciju $f : \mathscr{P}(\langle 0,1\rangle) \to S$ s $f(B) := B \cup \mathbb{N}$. To je injekcija: ako su B i B' različiti podskupovi od $\langle 0,1\rangle$, BSOMP da postoji $x \in B' \setminus B$. No $x \in B' \subseteq \langle 0,1\rangle$ znači $0 < x < 1$, pa $x \notin \mathbb{N}$.
Sada $x \notin B \cup \mathbb{N} = f(B)$ i $x \in B' \subseteq B' \cup \mathbb{N} = f(B')$ znači $f(B) \neq f(B')$.
Dakle $\mathfrak{K}(S) \geq 2^{\mathfrak{K}(\langle 0,1\rangle)} = 2^{\mathfrak{c}}$. Sveukupno $\mathfrak{K}(S) = 2^{\mathfrak{c}}$.

50. Odredite kardinalnost skupa svih zatvorenih segmenata (u $\mathbb{R}$) koji su
(a) disjunktni sa $\mathbb{Z}$, (b) racionalne duljine.

R50.

a) Neka je $T := \{[a,b] \subset \mathbb{R} : a < b \wedge [a,b] \cap \mathbb{Z} = \emptyset\}$. S $f(I) := (\min I, \max I)$ je zadana injekcija s T u $\mathbb{R}^2$ (zatvoreni segment je određen svojim početkom i krajem), pa je $\mathfrak{K}(T) \leq \mathfrak{K}(\mathbb{R}^2) = \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}$.

   S druge strane, $g : \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right] \to S$, $g(x) = \left[x, \frac{1}{2}\right]$ je injekcija, jer je prva koordinata od $f\big(g(x)\big)$ jednaka x. To pokazuje da je $\mathfrak{K}(T) \geq \mathfrak{K}(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]) = \mathfrak{c}$, pa je $\mathfrak{K}(T) = \mathfrak{c}$.

b) Označimo $S := \{[a,b] \subset \mathbb{R} : b - a \in \mathbb{Q}_+\}$. Po definiciji S, s $f(a,d) := [a, a+d]$ je zadana surjekcija s $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_+$ na S (svaki element od S zadan je svojim početkom i duljinom).

   No f je i injekcija, jer ako je $a \neq a'$, BSOMP $a < a'$, pa je $a \in f(a,d) \setminus f(a',d')$; a ako je $a = a'$ i $d < d'$, tada je $a + d' \in f(a',d') \setminus f(a,d)$. U svakom slučaju $f(a,d) \neq f(a',d')$.

   Dakle, f je bijekcija: $S \sim \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_+$, pa je $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{K}(\mathbb{R}) \cdot \mathfrak{K}(\mathbb{Q}_+) = \mathfrak{c} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{c}$.

51. Neka je $\{A_i : i \in I\}$ familija skupova takva da je

a) $1 \leq \mathfrak{K}(I) \leq \mathfrak{c}$ te $A_i \sim \mathbb{R}$ za sve $i \in \mathbb{N}$;

b) $I = \mathbb{R}$ te $1 \leq \mathfrak{K}(A_i) \leq \mathfrak{c}$ za sve $i \in \mathbb{R}$, A_i su u parovima disjunktni.

Dokažite da je u svakom od tih slučajeva unija te familije ekvipotentna s $\mathbb{R}$.

R51. U podzadatku (a), za svaki $i \in I$ je skup svih bijekcija između A_i i $\mathbb{R}$ neprazan, pa primjenom aksioma izbora možemo za svaki $i \in I$ fiksirati po jednu bijekciju $f_i : \mathbb{R} \to A_i$.

U podzadatku (b), svaki A_i je neprazan zbog $\mathfrak{K}(A_i) \geq 1 > 0 = \mathfrak{K}(\emptyset)$, pa po aksiomu izbora možemo u svakome od njih fiksirati po jedan element, koji označimo s a_i.
Sada nejednakost $\mathfrak{K}(A_i) \leq \mathfrak{c}$ znači da postoji injekcija $g : A_i \to \mathbb{R}$, pa postoji i surjekcija s $\mathbb{R}$ na A_i (elemente slike od g preslikamo po g^{-1}, a ostale preslikamo u a_i).
Primjenom aksioma izbora možemo za svaki $i \in I$ fiksirati po jednu surjekciju $f_i : \mathbb{R} \to A_i$.

Sada je, u oba podzadatka, s $m(i,x) := f_i(x)$ (*currying*) zadana surjekcija s $I \times \mathbb{R}$ na $\bigcup_{i\in I} A_i$. Doista, svaki $y \in \bigcup_{i\in I} A_i$ je u nekom $A_i = \operatorname{rng} f_i$, pa postoji $x \in \operatorname{dom} f_i = \mathbb{R}$ takav da je $y = f_i(x) = m(i,x)$. Iz surjektivnosti m zaključujemo $\mathfrak{K}\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) \leq \mathfrak{K}(I) \cdot \mathfrak{K}(\mathbb{R}) \leq \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

U podzadatku (a), zbog $\mathfrak{K}(I) \geq 1$ je (kontrapozicijom) $I \neq \emptyset$, pa postoji $i_0 \in I$.
Tada je $\bigcup_{i\in I} A_i \supseteq A_{i_0} \sim \mathbb{R}$, pa je $\mathfrak{K}\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) \geq \mathfrak{K}(A_{i_0}) = \mathfrak{c}$.

U podzadatku (b), s $f(i) := a_i$ je zadana injekcija (jer su A_i u parovima disjunktni, njihovi elementi a_i su nužno različiti) s $I = \mathbb{R}$ u $\bigcup_{i\in I} A_i$, pa je opet $\mathfrak{K}\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) \leq \mathfrak{K}(I) = \mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$.

52. Odredite redom particije $\{A_i : i \in I\}$ skupa $\mathbb{R}$ tako da je:

a) za sve $i \in I$ skup A_i konačan;

b) za sve $i \in I$ skup A_i prebrojiv;

c) za sve $i \in I$ skup A_i neprebrojiv, te je skup indeksa I prebrojiv;

d) za sve $i \in I$ skup A_i neprebrojiv, te je skup indeksa I neprebrojiv.

R52.

a) Recimo $I := \mathbb{R}$, a $A_i := \{i\}$.

b) Recimo, $I := [0,1\rangle$, a $A_i := \{n + i : n \in \mathbb{Z}\}$.

c) Recimo, $I := \mathbb{Z}$, a $A_i := [x, x+1\rangle$.

d) Neka je $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka bijekcija (recimo ona dobivena ispreplitanjem znamenki, i nizova decimala koji ne završavaju devetkom). Za svaki $x \in \mathbb{R}$ označimo $B_x = \{x\} \times \mathbb{R}$. Očito je $\{B_x : x \in \mathbb{R}\}$ jedna particija skupa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, a onda je $\{f[B_x] : x \in \mathbb{R}\}$ jedna tražena particija skupa $\mathbb{R}$.

53. Odredite redom kardinalnost skupa svih podskupova od $\mathbb{R}$ koji su:

a) konačni;

b) kofinitni (komplement im je konačan);

c) beskonačni;

d) komplement im je beskonačan;

e) ekvipotentni s $\mathbb{R}$;

f) prebrojivi;

g) komplement im je prebrojiv.

R53.

a) Prema zadatku 47(b), $\mathbb{R}^* \sim \mathbb{R}$. Tvrdimo da je rng (preslikavanje koje svakom konačnom nizu pridružuje njegovu sliku) surjekcija s $\mathbb{R}^*$ na $\mathbb{R}_{fin}$, skup konačnih podskupova od $\mathbb{R}$. Doista, za svaki konačni niz $f : n \to \mathbb{R}$ je $\operatorname{card}\operatorname{rng} f \leq \operatorname{card}\operatorname{dom} f = \operatorname{card} n = n$, pa je $\operatorname{rng} f$ konačan podskup od $\mathbb{R}$. Također, za svaki konačni $B \subseteq \mathbb{R}$ po definiciji konačnosti postoji $n \in \mathbb{N}$ i bijekcija $f : n \to B$. Tada je $f \in \mathbb{R}^*$ i $\operatorname{rng} f = B$.

   Sada imamo (po standardnom principu da je kardinalni broj slike manji ili jednak kardinalnom broju domene) $\operatorname{card}\mathbb{R}_{fin} \leq \operatorname{card}\mathbb{R}^* = \operatorname{card}\mathbb{R} = \mathfrak{c}$.

   S druge strane, funkcija g zadana na $\mathbb{R}$ s $g(x) := \{x\}$ očito ide u $\mathbb{R}_{fin}$ zbog $\mathfrak{K}(\{x\}) = 1 \in \mathbb{N}$, te je injekcija po aksiomu para. To daje $\mathfrak{K}(\mathbb{R}_{fin}) \geq \mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$, sveukupno $\mathfrak{K}(\mathbb{R}_{fin}) = \mathfrak{c}$.

b) Preslikavanje c na skupu $\mathscr{P}(\mathbb{R})$, koje svakom $A \subseteq \mathbb{R}$ pridružuje $\mathbb{R} \setminus A$, je očito involucija (samo sebi inverz), pa je bijekcija. Kako je traženi skup $\mathbb{R}_{cof} = c^{-1}[\mathbb{R}_{fin}] = c[\mathbb{R}_{fin}] \sim \mathbb{R}_{fin}$, vidimo $\operatorname{card}\mathbb{R}_{cof} = \mathfrak{c}$.

c) Ako skup svih beskonačnih podskupova od $\mathbb{R}$ označimo s $\mathbb{R}_{inf}$, tada je $\{\mathbb{R}_{fin}, \mathbb{R}_{inf}\}$ jedna particija od $\mathscr{P}(\mathbb{R})$, odakle je (Cantorov osnovni teorem i korolar teorema o kvadratu) $\mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} = \operatorname{card}\mathscr{P}(\mathbb{R}) = \operatorname{card}(\mathbb{R}_{fin} \cup \mathbb{R}_{inf}) = \operatorname{card}\mathbb{R}_{fin} + \operatorname{card}\mathbb{R}_{inf} = \mathfrak{c} + \operatorname{card}\mathbb{R}_{inf} = \max\{\mathfrak{c}, \operatorname{card}\mathbb{R}_{inf}\}$, iz čega slijedi $\operatorname{card}\mathbb{R}_{inf} = 2^{\mathfrak{c}}$.

d) Potpuno istim postupkom kao u (b) dobijemo $\mathbb{R}_{coi} := c^{-1}[\mathbb{R}_{inf}] = c[\mathbb{R}_{inf} \sim \mathbb{R}_{inf}$, odnosno $\operatorname{card}\mathbb{R}_{coi} = \operatorname{card}\mathbb{R}_{inf} = 2^{\mathfrak{c}}$.

e) Označimo s $\mathbb{R}_{\mathfrak{c}}$ skup svih podskupova od $\mathbb{R}$ kardinalnosti $\mathfrak{c}$.
   Zbog $\mathbb{R}_{\mathfrak{c}} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$ je $\mathfrak{K}(\mathbb{R}_{\mathfrak{c}}) \leq \mathfrak{K}\big(\mathscr{P}(\mathbb{R})\big) = 2^{\mathfrak{c}}$.

   S druge strane, funkcija f na domeni $\mathscr{P}([0,1])$ zadana s $f(B) := B \cup [2,3]$ očito ide u $\mathbb{R}_{\mathfrak{c}}$ (naime, $[2,3] \subseteq f(B) \subset \mathbb{R}$ znači $\mathfrak{c} = \mathfrak{K}([2,3]) \leq \mathfrak{K}\big(f(B)\big) \leq \mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$) i injekcija je: ako su B_1 i B_2 različiti podskupovi od $[0,1]$, postoji $x \in B_1 \triangle B_2 \subseteq [0,1]$ (BSOMP $x \in B_1 \setminus B_2$). No tada zbog disjunktnosti $[0,1]$ s $[2,3]$ vrijedi $x \notin [2,3]$, pa $x \notin f(B_2)$, dok je očito $x \in B_1 \subseteq f(B_1)$. Odnosno, $f(B_1) \neq f(B_2)$. To znači $\mathfrak{K}(\mathbb{R}_{\mathfrak{c}}) \geq \mathfrak{K}\big(\mathscr{P}([0,1])\big) = 2^{\mathfrak{K}([0,1])} = 2^{\mathfrak{c}}$.

   Sveukupno imamo $\mathfrak{K}(\mathbb{R}_{\mathfrak{c}}) = 2^{\mathfrak{c}}$.

f) Označimo s $\mathbb{R}_{\aleph_0}$ skup svih podskupova od $\mathbb{R}$ kardinalnosti $\aleph_0$. Promotrimo preslikavanje $\operatorname{rng} : {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ koje svakom realnom nizu pridružuje njegovu sliku. Slika *tog* preslikavanja svakako sadrži $\mathbb{R}_{\aleph_0}$ (zapravo je jednaka $\mathbb{R}_{\aleph_0} \cup \mathbb{R}_{fin} \setminus \{\emptyset\}$, ali to nije bitno ovdje). Naime, za svaki $A \in \mathbb{R}_{\aleph_0}$ po definiciji prebrojivosti postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \to A$, odnosno niz $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takav da je $\operatorname{rng} f = A$.

   Iz toga slijedi $\mathfrak{K}(\mathbb{R}_{\aleph_0}) \leq \mathfrak{K}(\operatorname{rng}\operatorname{rng}) \leq \mathfrak{K}(\operatorname{dom}\operatorname{rng}) = \mathfrak{K}({}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}) = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

   S druge strane, preslikavanje g zadano na $\mathbb{R}$ s $g(x) := \{x + n : n \in \mathbb{N}\}$ je injekcija: za različite realne brojeve x_1 i x_2 BSOMP $x_1 < x_2$, no tada je $x_1 = x_1 + 0 \in g(x_1)$, ali $x_1 \notin g(x_2)$. Naime, za svaki $t \in g(x_2)$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $t = x_2 + n \geq x_2 + 0 = x_2 > x_1$.

   Kako za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $g(x) \in \mathbb{R}_{\aleph_0}$ (pribrajanje x je bijekcija između $\mathbb{N}$ i $g(x)$), imamo $\mathfrak{K}(\mathbb{R}_{\aleph_0}) \geq \mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Sveukupno dobivamo $\mathfrak{K}(\mathbb{R}_{\aleph_0}) = \mathfrak{c}$.

g) Potpuno istim postupkom kao u (b) dobijemo $\mathbb{R}_{co\aleph_0} = c^{-1}[\mathbb{R}_{\aleph_0}] = c[\mathbb{R}_{\aleph_0}] \sim \mathbb{R}_{\aleph_0}$, odnosno $\mathfrak{K}(\mathbb{R}_{co\aleph_0}) = \mathfrak{K}(\mathbb{R}_{\aleph_0}) = \mathfrak{c}$.

54. Odredite kardinalnost relacije „pravi podskup” na $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.

R54. Neka je $P := \{(A,B) : A \subset B \subseteq \mathbb{R}\}$. Zbog $P \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R}) \times \mathscr{P}(\mathbb{R})$ je $\mathfrak{K}(P) \le 2^{\mathfrak{c}} \cdot 2^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}\cdot 2} = 2^{\mathfrak{c}}$.

S druge strane, $f : \mathscr{P}([0,1]) \to P$ definirana s $f(X) = (X, \mathbb{R})$ je injekcija (svojstvo jednakosti uređenih parova), pa je $\mathfrak{K}(P) \ge 2^{\mathfrak{K}([0,1])} = 2^{\mathfrak{c}}$. Sveukupno $\mathfrak{K}(P) = 2^{\mathfrak{c}}$.

2.2 Topologija na skupu realnih brojeva

55. Odredite kardinalnost bilo kojeg intervala (bilo kojeg tipa) u $\mathbb{R}$.

R55. Tvrdimo da je tražena kardinalnost ili 0 ili 1 ili $\mathfrak{c}$. Naravno, prazni intervali poput $\langle 2,2]$ imaju kardinalnost 0, dok singleton-intervali poput $[5,5] = \{5\}$ imaju kardinalnost 1.

Dakle, dovoljno je dokazati da bilo koji interval u $\mathbb{R}$ koji ima barem 2 točke, ima kardinalnost kontinuum. Neka je I takav interval: fiksirajmo neke dvije (različite) točke u njemu i nazovimo ih a i b. $(\mathbb{R}, <)$ je TUS, pa BSOMP $a < b$. Svaki interval je konveksan, pa je $\langle a,b\rangle \subseteq [a,b] \subseteq I \subseteq \mathbb{R}$, iz čega slijedi $\mathfrak{K}(\langle a,b\rangle) \le \mathfrak{K}(I) \le \mathfrak{K}(\mathbb{R})$, odnosno tvrdnju je dovoljno dokazati za otvorene intervale.

Štoviše, tvrdnju je dovoljno dokazati za *jedan* otvoreni interval, jer su svi otvoreni intervali međusobno ekvipotentni: pomoću „jednadžbe pravca kroz dvije točke”, funkcija zadana s $f(x) := y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ je bijekcija između $\langle x_1, x_2\rangle$ i $\langle y_1, y_2\rangle$ za $x_1 < x_2$ i $y_1 < y_2$. To se najlakše vidi iz činjenice da je na potpuno isti način zadana funkcija u suprotnom smjeru, koja joj je inverz jer komponirana s njom daje identitetu na odgovarajućem intervalu. Zapravo je dovoljno primijetiti da su te dvije funkcije *injekcije* (jer su afine s pozitivnim koeficijentima smjera, pa su strogo rastuće), i primijeniti CSB.

Sada je još samo preostalo primijetiti da iz analize znamo da je $\operatorname{arc\,tg}$ bijekcija između $\mathbb{R}$ i $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ (surjekcija je praktički po definiciji arkus-funkcijā, a injekcija jer joj je derivacija $\operatorname{arc\,tg}' x = \frac{1}{1+x^2} > 0$ za sve x, pa je strogo rastuća).

Rezimirajmo: za sve realne $a < b$ je $\langle a,b\rangle \sim \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle \sim \mathbb{R}$, a onda je za sve intervale I s barem dvije točke (a i b redom), $\mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{K}(\langle a,b\rangle) \le \mathfrak{K}(I) \le \mathfrak{K}(\mathbb{R})$. Dakle, svaki netrivijalni interval u $\mathbb{R}$ ima kardinalnost $\mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$.

Dodatni zadatak: Riješite analogni zadatak u $\mathbb{Q}$. Što se mijenja u odnosu na ovaj dokaz?

56. Odredite kardinalnost standardne topologije na $\mathbb{R}$.

R56. Označimo $\mathscr{T} := \{U : U \subseteq \mathbb{R} \text{ otvoren}\}$ i $\mathscr{B} := \{\langle a,b\rangle : a \in \mathbb{Q} \land b \in \mathbb{Q} \land a < b\} \subset \mathscr{T}$.

Svakom $U \in \mathscr{T}$ pridružimo relaciju $<^U$ na $\mathbb{Q}$ zadanu s $p <^U q :\Leftrightarrow p < q \land \langle p,q\rangle \subseteq U$. Tvrdimo da je to preslikavanje injekcija. Doista, neka su $U, V \in \mathscr{T}$ otvoreni i različiti. Tada postoji $x \in U \triangle V$, BSOMP $x \in U \setminus V$. Jer je $U \ni x$ otvoren, postoji $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ takav da je $\langle x-\varepsilon, x+\varepsilon\rangle \subseteq U$.

Zbog gustoće $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$, postoje $p, q \in \mathbb{Q}$ takvi da je $x - \varepsilon < p < x < q < x + \varepsilon$. Tada je $\langle p,q\rangle \subseteq \langle x-\varepsilon, x+\varepsilon\rangle \subseteq U$ odnosno $p <^U q$. No zbog $x \in \langle p,q\rangle \setminus V$ ne vrijedi $p <^V q$ pa su relacije $<^U$ i $<^V$ različite.

Iz injektivnosti slijedi $\mathfrak{K}(\mathscr{T}) \leq \mathfrak{K}\big(\mathscr{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})\big) = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

57. Odredite kardinalnost skupa svih zatvorenih podskupova od $\mathbb{R}$.

R57. Kao u zadatku 53(b), imamo da je skup $\mathscr{F}$ svih zatvorenih podskupova od $\mathbb{R}$ jednak $\mathscr{F} = c[\mathscr{T}] \sim \mathscr{T}$ te mu je kardinalnost jednaka $\mathfrak{c}$ po zadatku 56.

58. Odredite kardinalnost skupa svih podskupova od $\mathbb{R}$ koji nisu ni zatvoreni ni otvoreni.

R58. Uz oznaku $\mathscr{N}$ za promatrani skup, očito je $\{\mathscr{T}, \mathscr{F}, \mathscr{N}\}$ particija od $\mathscr{P}(\mathbb{R})$, te je prema korolaru teorema o kvadratu, i zadacima 56 i 57,

$$2^{\mathfrak{c}} = \operatorname{card} \mathscr{P}(\mathbb{R}) = \operatorname{card} \mathscr{T} + \operatorname{card} \mathscr{F} + \operatorname{card} \mathscr{N} = \mathfrak{c} + \mathfrak{c} + \operatorname{card} \mathscr{N} = \max\{\mathfrak{c}, \mathfrak{c}, \operatorname{card} \mathscr{N}\},$$

iz čega po Cantorovu osnovnom teoremu ($\mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}}$) slijedi $\mathfrak{K}(\mathscr{N}) = 2^{\mathfrak{c}}$.

59. Odredite kardinalnost skupa svih neprebrojivih zatvorenih podskupova od $\mathbb{R}$.

R59. Neka je $S := \{A \in \mathscr{F} : \mathfrak{K}(A) > \aleph_0\}$. Iz zadatka 57 slijedi $\mathfrak{K}(S) \leq \mathfrak{K}(\mathscr{F}) = \mathfrak{c}$. S druge strane, funkcija f zadana na $\mathbb{R}$ s $f(x) := [x, x+1]$ je injekcija ($x = \min f(x)$) s $\mathbb{R}$ u S (segmenti su zatvoreni, a $\mathfrak{K}([x, x+1]) = \mathfrak{c} > \aleph_0$), pa je $\mathfrak{K}(S) \geq \mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Sveukupno $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

60. Odredite kardinalnost skupa svih Borelovih skupova u $\mathbb{R}$. Borelovi skupovi su skupovi koji se mogu dobiti operacijama prebrojivih unija, prebrojivih presjeka i komplementiranja (u odnosu na $\mathbb{R}$) iz otvorenih skupova u $\mathbb{R}$.

R60. Uputa: Izgradite Borelove skupove po razinama, slično kao kumulativnu hijerarhiju. Dokažite da je svaka razina kardinalnosti $\mathfrak{c}$, te da je dovoljno ω_1 razinā. Odgovor je $\mathfrak{c}$.

61. Dokažite da je skup svih analitičkih podskupova od $\mathbb{R}$ ekvipotentan sa $\mathbb{R}$.

62. Dokažite da ravnina nije unija prebrojivo mnogo pravaca.

R62. Neka je L proizvoljni prebrojivi skup pravaca.

Preslikavanje u koje realnom broju t pridružuje (uspravni) pravac $\{t\} \times \mathbb{R}$ jednadžbe $x = t$ je očito injekcija (za $t_1 \neq t_2$, $(t_1, 0) \in \{t_1\} \times \mathbb{R} \setminus \{t_2\} \times \mathbb{R}$) pa je $\mathbb{R} \sim \operatorname{rng} u$, odnosno $\mathfrak{K}(\operatorname{rng} u) = \mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0 = \mathfrak{K}(L)$. Iz toga $\operatorname{rng} u \not\subseteq L$, pa postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da $p := \{a\} \times \mathbb{R} \notin L$.

Označimo s L' skup svih pravaca iz L koji sijeku p. Po aksiomu separacije je $L' \subseteq L$, pa je $\mathfrak{K}(L') \leq \mathfrak{K}(L) = \aleph_0$. Zbog $p \notin L$, svaki $q \in L'$ siječe p u točno jednoj točki, pa po aksiomu zamjene imamo funkciju $s : L' \to p$ koja svakom $q \in L'$ pridružuje točku $s(q) = (a, y)$ takvu da je $q \cap p = \{(a, y)\}$.

Za tu funkciju vrijedi $\mathfrak{K}(\operatorname{rng} s) \leq \mathfrak{K}(\operatorname{dom} s) = K(L') \leq \aleph_0 < \mathfrak{c} = 1 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{K}(\{a\}) \cdot \mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{K}(p)$, pa s ne može biti surjekcija: postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da $(a, b) \in p$ nije u slici od s. No to točno znači da točka (a, b) ravnine nije ni na kojem pravcu iz L', a očito nije niti na ikojem pravcu iz $L \setminus L'$ jer su oni paralelni s p. Dakle, našli smo točku ravnine koja nije u uniji pravaca iz L.

63. Odredite redom particije $\{A_i : i \in I\}$ skupa $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ tako da je:

a) za sve $i \in I$ skup A_i konačan

b) za sve $i \in I$ skup A_i prebrojiv

c) za sve $i \in I$ skup A_i kardinalnosti $\mathfrak{c}$

d) za sve $i \in I$ skup A_i kardinalnosti $2^{\mathfrak{c}}$, te je skup indeksa I prebrojiv

e) za sve $i \in I$ skup A_i kardinalnosti $2^{\mathfrak{c}}$, te je skup indeksa I kardinalnosti $\mathfrak{c}$

f) za sve $i \in I$ skup A_i kardinalnosti $2^{\mathfrak{c}}$, te je skup indeksa I kardinalnosti $2^{\mathfrak{c}}$

64. Odredite redom kardinalnost skupova svih podskupova od $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ koji su: konačni; beskonačni; prebrojivi; neprebrojivi; ekvipotentni s $\mathbb{R}$; ekvipotentni s $\mathscr{P}(\mathbb{R})$; komplement im je konačan (beskonačan; prebrojiv; neprebrojiv).

65. Odredite kardinalnost skupa svih kompleksnih brojeva čiji je modul racionalan.

R65. Neka je $S = \{x \in \mathbb{C} : |x| \in \mathbb{Q}\}$. Zbog $S \subseteq \mathbb{C}$ je $\mathfrak{K}(S) \le \mathfrak{K}(\mathbb{C}) = \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}$.

Promotrimo funkciju $f : [0, 2\pi\rangle \to \mathbb{C}$ definiranu s $f(x) := e^{ix}$ $(= \cos x + i \sin x)$. Iz kompleksne analize znamo da je f injekcija. Iz toga slijedi $\mathfrak{c} = \mathfrak{K}([0, 2\pi\rangle \le \mathfrak{K}(S)$. Sveukupno, $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

66. Neka je zadan $r \in \mathbb{R}_+$. Koliko najviše elemenata može imati skup $S \subseteq \mathbb{C}$ sa sljedećim svojstvom: za sve različite $u, z \in S$ su krugovi polumjera r oko točaka z i u disjunktni?

R66. Prvo, zbog prebrojivosti $\mathbb{Q}$ postoji bijektivni niz („popis”) svih racionalnih brojeva. Fiksirajmo jedan i označimo ga s $a = (a_n)_n$.

Neka je S bilo koji podskup od $\mathbb{C}$ koji ima spomenuto svojstvo, i neka je $z \in S$. Zbog gustoće $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$, u intervalu $\langle \operatorname{Re} z, \operatorname{Re} z + \frac{r}{2}\rangle$ postoji racionalni broj: prvi takav na popisu a označimo s p. Analogno, prvi racionalni broj na popisu a koji je između $\operatorname{Im} z$ i $\frac{r}{2} + \operatorname{Im} z$ označimo s q, te pridružimo $f(z) := p + qi$. Tako smo dobili funkciju sa S u $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Tada je za svaki $z \in S$, $|f(z) - z|^2 = (\operatorname{Re} z - p)^2 + (\operatorname{Re} z - q)^2 < \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{2} < r^2$, pa je $f(z) \in K(z, r)$. Iz toga slijedi injektivnost od f: za $u, z \in S$ različite, kad bi bilo $f(u) = f(z)$, to bi bila točka u presjeku $K(u, r) \cap K(z, r) = \emptyset$. Dakle $\mathfrak{K}(S) \le \mathfrak{K}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \aleph_0^2 = \aleph_0$.

Skup $S_0 := \{2kri : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{C}$ ima promatrano svojstvo (jer za prirodne $k \neq l$ je $|k - l| \ge 1$, pa kad bi postojao $z \in K(2kri, r) \cap K(2lri, r)$, po nejednakosti trokuta bismo imali

$$2r = 2r \cdot 1 \le 2r|k - l| = |2kri - 2lri| \le |2kri - z| + |z - 2lri| < r + r = 2r,$$

kontradikcija). Niz $(2kri)_k$ je injekcija s $\mathbb{N}$ u S_0 (jer je svaki $2kri$ element kruga $K(2kri, r)$), a S_0 je upravo definiran kao slika tog niza, pa je $S_0 \sim \mathbb{N}$, odnosno S_0 je prebrojiv.

Zaključak: takav skup kompleksnih brojeva S može imati najviše $\aleph_0$ elemenata, i ta granica se doista postiže, primjerice za $S := S_0$.

67. Odredite kardinalnost skupa svih podskupova od $\mathbb{C}$ koji imaju prosti broj elemenata.

R67. Označimo $S := \{A \in \mathscr{P}(\mathbb{C}) : \operatorname{card} A \in \mathbb{P}\}$. Zbog $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ su svi $A \in S$ konačni, pa je A podskup skupa $\mathbb{C}_{fin}$ svih konačnih podskupova od $\mathbb{C}$, za koji se, sasvim jednako kao u zadatku 53(a), pokaže da je kardinalnosti $\mathfrak{c}$. Dakle, vrijedi $\mathfrak{K}(S) \le \mathfrak{K}(\mathbb{C}_{fin}) = \mathfrak{c}$.

S druge strane, funkcija $f : \mathbb{C} \to S$ definirana sa $f(z) := \{z, z+1\}$ je injekcija: očito ide u S jer je $z \in \mathbb{C} \wedge z+1 \in \mathbb{C} \wedge \operatorname{card}\{z, z+1\} = 2 \in \mathbb{P}$, a iz $f(z) = f(w)$ slijedi $z = w$ ili $z = w+1 \wedge w = z+1$, s tim da je ovo drugo nemoguće jer bi tada bilo $z = z+2$.

Injektivnost f znači $\mathfrak{c} = \mathfrak{K}(\mathbb{C}) \le \mathfrak{K}(S)$. Sveukupno imamo $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

2.3 Nizovi

68. Dokažite: za svaki standardni skup brojeva ($\mathbb{P}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{A}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$, ...),
skup svih nizova u tom skupu brojeva je kardinalnosti $\mathfrak{c}$.

R68. Primijetimo da svaki standardni skup brojeva ima kardinalnost ili $\aleph_0$ ili $\mathfrak{c}$. Dokazat ćemo jaču tvrdnju: za svaki skup A, $1 < \mathfrak{K}(A) \le \mathfrak{c}$ povlači $\mathfrak{K}\big({}^{\mathbb{N}}A\big) = \mathfrak{c}$. Doista, $\mathfrak{K}(A) > 1$ povlači $\mathfrak{K}(A) \ge 1^{\dagger} = 1^{+} = 2$ jer je 1 prirodni broj, pa po monotonosti potenciranja zaključujemo $\mathfrak{K}\big({}^{\mathbb{N}}A\big) = \mathfrak{K}(A)^{\aleph_0} \ge 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. S druge strane, $\mathfrak{K}(A) \le \mathfrak{c}$ opet po monotonosti potenciranja povlači $\mathfrak{K}\big({}^{\mathbb{N}}A\big) = \mathfrak{K}(A)^{\aleph_0} \le \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \big(2^{\aleph_0}\big)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Po CSB slijedi tvrdnja.

69. Odredite kardinalnost skupa surjektivnih nizova cijelih brojeva (surjekcijā s $\mathbb{N}$ na $\mathbb{Z}$).

R69. Neka je $S := \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \wedge \operatorname{rng} f = \mathbb{Z}\}$. Zbog $S \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ je $\mathfrak{K}(S) \le \mathfrak{K}\big({}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}\big)$.

S druge strane, svakom nizu $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ možemo pridružiti surjektivni niz

$$h(a) := \big(0, a(0), 1, -1, a(1), 2, -2, a(2), 3, -3, a(3), \ldots\big) \in S$$

(surjektivan je jer za svaki $m \in \mathbb{Z}$, ako je $m > 0$, tada je $m = h(a)(3m-1)$; a ako je $m \le 0$, tada je $m = h(a)(-3m)$).

Funkcija h je injekcija: ako su a i b različiti nizovi cijelih brojeva, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da se a i b razlikuju na poziciji n. No tada se $h(a)$ i $h(b)$ razlikuju na poziciji $3n+1$ (jer je $h(a)(3n+1) = a(n)$ i analogno za b), pa su također različiti. Iz toga slijedi druga nejednakost: $h : {}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z} \to S$ znači $\mathfrak{K}(S) \ge \mathfrak{K}\big({}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}\big)$.

Zbog CSB je dakle $\mathfrak{K}(S) \ge \mathfrak{K}\big({}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z}\big) = \mathfrak{c}$ (po zadatku 68, na koji ćemo se obično prešutno pozivati ubuduće).

70. Odredite kardinalnost skupa svih aritmetičkih nizova cijelih brojeva.

R70. Neka je $S := \{(a_n)_n \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{Z} :$ niz (a_n) je aritmetički$\}$. Funkcija $f : S \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definirana s $f\big((a_n)_n\big) = (a_0, a_1)$ je bijekcija (dokaz niže), pa je $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{K}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Pogledajmo funkciju $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to S$ zadanu s $g(x, y)(n) := ny - (n-1)x$. Za sve x, y, n razlika $g(x, y)(n+1) - g(x, y)(n) = (n+1)y - (n+1-1)x - ny + (n-1)x = (n+1)y - ny + (n-1)x - nx = y - x$ ne ovisi o n, pa je $g(x, y)$ aritmetički niz.

Također je $f\big(g(x, y)\big) = \big(g(x, y)(0), g(x, y)(1)\big) = \big(0y - (-1)x, 1y - 0x\big) = (x, y)$ i $g\big(f(a)\big)(n) = g\big(a(0), a(1)\big)(n) = n\,a(1) - (n-1)a(0) = a(n)$ (što možemo dokazati indukcijom po n koristeći činjenicu da je a aritmetički). To dvoje pokazuje da su f i g jedna drugoj inverzne, pa su bijekcije.

71. Odredite kardinalnost skupa svih (a) strogo padajućih, (b) nestrogo padajućih, (c) strogo rastućih, (d) nestrogo rastućih, nizova prirodnih brojeva.

R71.

a) Ako je $(a_n)_n$ strogo padajući niz prirodnih brojeva, tada se indukcijom lako dobije da je $a_0 \geq a_n + n$ za svaki n. Baza je refleksivnost od $(\geq)$, a korak slijedi iz tranzitivnosti zbog $a_{n+1} + n + 1 \leq a_n + n$. Naime, $a_{n+1} < a_n$ povlači $a_{n+1}^+ \leq a_n$.

   No tada za $n := a_0 + 1$ dobijemo kontradikciju: $a_0 \geq a_{a_0+1} + a_0 + 1 \geq 0 + a_0 + 1 = a_0^+ > a_0$. Zaključak je da strogo padajući nizovi prirodnih brojeva ne postoje, pa je skup njih prazan, odnosno kardinalnost mu je $\mathfrak{K}(S_>) = \mathfrak{K}(\emptyset) = 0$.

b) Označimo sa $S_\geq$ promatrani skup. Prvo, niz zadan s $f_n := (n+1, n, n, \ldots)$ ide u $S_\geq$ zbog $n + 1 \geq n \geq n \geq \cdots$, a injektivan je zbog $(f_n)_1 = n$, pa je $\mathfrak{K}(S_\geq) \geq \mathfrak{K}(\mathbb{N}) = \aleph_0$.

   S druge strane, ako s T označimo skup svih *konačnih* nepraznih nestrogo padajućih nizova prirodnih brojeva, zbog $T \subseteq \mathbb{N}^*$ je $\mathfrak{K}(T) \leq \mathfrak{K}(\mathbb{N}^*) = \mathfrak{K}(\mathbb{N}) = \aleph_0$ po zadatku 47.

   Za svaki $a \in S_\geq$ je $\emptyset \neq \operatorname{rng} a \subseteq \mathbb{N}$, pa postoji $m := \min \operatorname{rng} a \in \operatorname{rng} a$, a onda i najmanji t takav da je $a(t) = m$.

   Budući da a nestrogo pada, vrijedi $a(i) \leq a(t) = m$ za sve $i \geq t$. No zbog $m = \min \operatorname{rng} a$ također vrijedi i druga nejednakost, pa je zapravo a konstantan nakon indeksa t: $a = \big(a(0), a(1), \ldots, a(t-1), m, m, \ldots\big)$. To znači da je h zadana na T s $h(a_0, \ldots, a_t) := (a_0, \ldots, a_t, a_t, a_t, \ldots)$ surjekcija na $S_\geq$ (svaki element iz $S_\geq$ je takvog oblika), pa je $\mathfrak{K}(S_\geq) = \mathfrak{K}(\operatorname{rng} h) \leq \mathfrak{K}(\operatorname{dom} h) = \mathfrak{K}(T) \leq \aleph_0$. Sveukupno je $\mathfrak{K}(S_\geq) = \aleph_0$.

cd) Za svaki $d \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}_+$, očito je s $a_n := \sum_{i<n} d_i$ zadan strogo rastući niz prirodnih brojeva ($a_{n+1} = a_n + d_n > a_n + 0 = a_n$), i takvo preslikavanje $d \mapsto a$ je injekcija, jer ako je $d \neq d'$, postoji najmanji j takav da je $d_j \neq d'_j$, a tada je $a'_{j+1} = \sum_{i<j+1} d'_i = \sum_{i<j} d'_i + d'_j = \sum_{i<j} d_i + d'_j \neq \sum_{i<j} d_i + d_j = \sum_{i<j+1} d_i = a_{j+1}$. Dakle $\mathfrak{K}(S_<) \geq \mathfrak{K}({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}_+) = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

   Kako je očito $S_< \subset S_\leq \subset {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$, imamo $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{K}(S_<) \leq \mathfrak{K}(S_\leq) \leq \mathfrak{K}({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}) = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, odnosno oba skupa $S_<$ i $S_\leq$ su kardinalnosti kontinuum.

72. Odredite kardinalnost skupa svih monotonih konačnih nizova racionalnih brojeva.

R72. Označimo sa S promatrani skup. Svakom $q \in \mathbb{Q}$ pridružimo konačni niz $(q, q+1) \in S$, i to preslikavanje je injekcija (jer taj niz počinje s q), pa je $\mathfrak{K}(S) \geq \mathfrak{K}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$. S druge strane, zbog $S \subseteq \mathbb{Q}^*$, po zadatku 47 je $\mathfrak{K}(S) \leq \mathfrak{K}(\mathbb{Q}^*) = \mathfrak{K}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$. Sveukupno je $\mathfrak{K}(S) = \aleph_0$.

73. Odredite kardinalnost skupa svih realnih nizova koji (a) konvergiraju broju π, (b) divergiraju u $-\infty$, (c) nemaju gomilište, (d) imaju prebrojiv skup gomilišta, (e) imaju svaki realni broj kao gomilište.

R73. Za svaki od tih skupova S vrijedi $S \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$, pa je $\mathfrak{K}(S) \leq \mathfrak{K}({}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}) = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. S druge strane, svaki od tih skupova ima zanimljivo svojstvo: ako je $(a_n)_n \in S$, tada je i $(x, a_0, a_1, \ldots) \in S$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ (jer gomilišta i limesi ne mare za početak niza). To znači da, ako fiksiramo jedan konkretni niz $a \in S$, preslikavanje $x \mapsto (x, a_0, a_1, \ldots)$ ide s $\mathbb{R}$ u S, i injekcija je jer $(x, a_0, a_1, \ldots) = (y, a_0, a_1, \ldots)$ povlači $x = y$. Drugim riječima, dovoljno je dokazati $S \neq \emptyset$: tada će tako definirana injekcija pokazati $\mathfrak{K}(S) \geq \mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$, što će s $\mathfrak{K}(S) \leq \mathfrak{c}$ dati $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$. Dakle, u ostatku samo navodimo po jedan element promatranog skupa S (ili barem dokaz da postoji).

a) $(\pi, \pi, \pi, \ldots)$

bc) $(-1, -2, -3, \ldots)$

d) $(1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots)$ Svi prirodni brojevi su gomilišta navedenog niza, jer se svaki pojavljuje beskonačno mnogo puta u nizu.

e) Znamo da postoji bijekcija između $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}$ jer je $\mathbb{Q}$ prebrojiv. Odaberimo jednu, fiksirajmo je i nazovimo $(q_n)_n$. Tvrdimo da je ona element od S, odnosno da joj je svaki realni broj gomilište. Neka je $r \in \mathbb{R}$ proizvoljan i $\langle r - \varepsilon, r + \varepsilon \rangle$ njegova proizvoljna okolina. U njoj postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva (recimo, postoji $p \in \mathbb{Q} \cap \langle r - \varepsilon, r \rangle$, postoji $q \in \mathbb{Q} \cap \langle r, r + \varepsilon \rangle$, i onda svi brojevi oblika $\frac{p+nq}{1+n}$ za $n \in \mathbb{N}$), odnosno beskonačno mnogo članova niza $(q_n)_n$, što znači da je r gomilište tog niza.

74. Odredite kardinalnost skupa svih kompleksnih nizova koji (a) konvergiraju k $1 + 2i$, (b) su neograničeni (po modulu), (c) imaju točno n gomilišta (gdje je $n \in \mathbb{N}$ zadan).

R74. Uputa: pogledajte rješenje prethodnog zadatka. Svi odgovori su $\mathfrak{c}$.

75. Za niz prirodnih brojeva $(b_n)_n$ kažemo da brže raste od niza $(a_n)_n$ ako je $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0$. Dokažite da vrijedi:

a) relacija „brže raste” je parcijalni uređaj na skupu ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$,

b) za svaki niz prirodnih brojeva postoji niz koji brže raste od njega,

c) ako je $A \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ takav da za svaki $b \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ postoji $c \in A$ koji brže raste od a, tada je A neprebrojiv.

R75.

a) Irefleksivnost: za svaki niz $(a_n)_n$ prirodnih brojeva, $\lim_n \frac{a_n}{a_n}$ ili nije definiran (ako je u nizu ima beskonačno mnogo nulā) ili je jednak 1 (inače), dakle nikada nije jednak 0.

Tranzitivnost: neka su a, b i c nizovi prirodnih brojeva takvi da je $\lim\limits_n \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_n \frac{b_n}{c_n} = 0$. Tada je u nizovima b i c samo konačno mnogo nulā, pa postoje n_1 i n_2 takvi da je $b_n \neq 0$ za sve $n > n_1$ i $c_n \neq 0$ za sve $n > n_2$. Tada za sve $n > \max\{n_1, n_2\}$ vrijedi $\frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{c_n}$, pa je $\lim_n \frac{a_n}{c_n} = 0 \cdot 0 = 0$.

b) Za zadani niz prirodnih brojeva $(a_n)_n$ možemo npr. definirati niz b s $b_n := (1+a_n)\cdot n$. Tada je $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n\big(\frac{a_n}{a_n+1}\cdot\frac{1}{n}\big) = 0$ zbog $0 \le \frac{a_n}{a_n+1} \le 1$.

c) Pretpostavimo suprotno da je skup A prebrojiv ili konačan. Očito A nije prazan jer inače ne bi mogao postojati $b \in A$ koji raste brže od npr. $id_{\mathbb{N}}$. Neka je $\varphi : \mathbb{N} \to A$ jedna surjekcija (takva postoji po zadatku 45(e)). Definiramo niz b ovako:

$$b_n := \big(1 + \textstyle\sum_{i=0}^{n}\big(\varphi(i)\big)_n\big)\cdot n$$

Tada za svaki i vrijedi: za sve $n \ge i$ je $b_n \ge \big(1+\big(\varphi(i)\big)_n\big)\cdot n$ pa je (kao u (b))

$$\frac{\big(\varphi(i)\big)_n}{b_n} \le \frac{\big(\varphi(i)\big)_n}{\big(1+\big(\varphi(i)\big)_n\big)\cdot n} \le \frac{1}{n}.$$

Iz toga slijedi da b raste brže od svakog $\varphi(i)$, odnosno b je gornja međa za A. No napisano svojstvo skupa A upravo kazuje da on nema gornju među (za taj b bi morao postojati $c \in A$ koji od njega raste brže, što je nemoguće jer se radi o strogom parcijalnom uređaju). To je kontradikcija, što znači da A mora biti neprebrojiv.

2.4 Redovi brojeva i funkcija

76. Dokažite: skup realnih i skup kompleksnih nizova imaju kardinalnost kontinuum.

R76. Svaki red $\big((a_n)_n, (s_n)_n\big)$ je jedinstveno određen nizom svojih članova $(a_n)_n$, jer se niz parcijalnih suma $(s_n)_n$ uvijek može dobiti primitivnom rekurzijom: $s_0 := 0$, $s_{n^+} := s_n + a_n$.

To znači da je skup $\mathscr{R}$ svih realnih redova ekvipotentan sa skupom ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ svih realnih nizova koji po zadatku 68 ima kardinalnost $\mathfrak{c}$. Sasvim jednako, skup kompleksnih nizova $\mathscr{R}_{\mathbb{C}}$ ekvipotentan je s ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{C}$, pa ima također kardinalnost $\mathfrak{c}$.

77. Za proizvoljni $t \in \mathbb{R}$, odredite kardinalnost skupa svih redova realnih brojeva kojima je suma t.

R77. Neka je $t \in \mathbb{R}$ i $S_t := \big\{\sum_n a_n \in \mathscr{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n = t\big\}$. Iz $S_t \subseteq \mathscr{R}$ slijedi $\mathfrak{K}(S_t) \le \mathfrak{K}(\mathscr{R}) = \mathfrak{c}$ (po zadatku 76, na koji se obično više nećemo eksplicitno pozivati).

Za dokaz druge nejednakosti primijetimo da je preslikavanje s domenom $\mathbb{R}$ zadano s $f(a) := t + a + (-a) + 0 + 0 + \cdots$, injekcija u S_t (injekcija je jer a možemo očitati kao drugi član reda $f(a)$, a ide u S_t jer je suma reda $f(a)$ zapravo konačna suma $t + a + (-a) = t$.

To znači da je $\mathfrak{K}(S_t) \ge \mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Sveukupno imamo $\mathfrak{K}(S_t) = \mathfrak{c}$ (za bilo koji t).

78. Odredite kardinalnost skupa svih konvergentnih redova realnih brojeva.

R78. Označimo sa S promatrani skup. Kako svaki konvergentni red realnih brojeva ima jedinstvenu sumu koja je realni broj, vrijedi $S = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} S_t$, gdje je S_t definiran u zadatku 77. Sada po zadatku 51 slijedi $S \sim \mathbb{R}$, odnosno $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

79. Odredite kardinalnost skupa svih divergentnih redova realnih brojeva.

R79. Označimo sa S promatrani skup. Zbog $S \subseteq \mathscr{R}$ je $\mathfrak{K}(S) \le \mathfrak{K}(\mathscr{R}) = \mathfrak{c}$.

Za drugu nejednakost, za svaki $x \in \mathbb{R}$ definiramo $f(x) := x + 1 + 1 + 1 + \cdots$, primijetivši da je to uvijek divergentni red (niz parcijalnih suma mu je odozgo neograničen).

Dakle, svakako je $f : \mathbb{R} \to S$, a injekcija je jer x možemo očitati kao početni član reda $f(x)$. Iz toga slijedi $\mathfrak{K}(S) \ge \mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$, sveukupno $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

80. Odredite kardinalnost skupa svih redova realnih brojeva koji imaju svojstvo:

a) apsolutno su konvergentni;

b) uvjetno su konvergentni;

c) divergentni su;

d) konvergentnost im možemo dokazati primjenom D'Alambertova kriterija;

e) konvergentnost im možemo dokazati primjenom Cauchyjeva,
ali ne i D'Alambertova, kriterija.

R80. Za svaki od tih skupova S vrijedi $S \subseteq \mathscr{R}$, pa je $\mathfrak{K}(S) \le \mathfrak{K}(\mathscr{R}) = \mathfrak{c}$. S druge strane, svaki od tih skupova ima zanimljivo svojstvo: ako je $r := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \in S$, tada je i $r_x := x + a_1 + a_2 + \cdots \in S$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ (jer konvergencija, i spomenuti kriteriji za nju, ne mare za promjenu nekoliko članova na početku reda).

To znači da, ako fiksiramo jedan konkretni red $r \in S$, preslikavanje $x \mapsto r_x$ ide s $\mathbb{R}$ u S, i injekcija je, jer x uvijek možemo rekonstruirati kao početni član reda r_x. Drugim riječima, dovoljno je dokazati $S \neq \emptyset$: tada će tako definirana injekcija pokazati $\mathfrak{K}(S) \ge \mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$, što će s $\mathfrak{K}(S) \le \mathfrak{c}$ s početka dokaza dati $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$. Dakle, u ostatku samo navodimo po jedan element promatranog skupa S, kao i dokaz da je doista u S.

a) $0 + 0 + 0 + 0 + \cdots$ Niz parcijalnih suma mu je nul-niz.

b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ Konvergentnost slijedi iz Leibnizova kriterija, a red apsolutnih vrijednosti divergira jer je to upravo harmonijski red.

c) $1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$ Niz parcijalnih suma mu je niz prirodnih brojeva, dakle neograničen.

d) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ Tada je $\lim_n \frac{2^{-(n+1)}}{2^{-n}} = \frac{1}{2} < 1$.

e) $\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \cdots$ Tada D'Alambertov kriterij daje niz $(2, \frac{1}{8}, 2, \frac{1}{8}, 2, \ldots)$ koji očito ima limes superior $2 > 1$ i limes inferior $\frac{1}{8} < 1$. No Cauchyjev kriterij daje niz $(2^{-1}, 2^0, 2^{-1}, 2^{-\frac{1}{2}}, 2^{-1}, 2^{-\frac{2}{3}} \ldots)$, koji se može rastaviti u dva niza: članovi s parnim indeksima svi iznose $\frac{1}{2}$, dok članovi s neparnim indeksima teže k $\frac{1}{2}$, pa i čitav niz ima limes $\frac{1}{2} < 1$.

81. Odredite kardinalnost skupa svih redova kompleksnih brojeva kojima je suma e^i.

R81. Neka je $S := \{\sum_n a_n : (\forall n \in \mathbb{N})(a_n \in \mathbb{C}) \land \sum_{n=0}^{\infty} a_n = e^i\}$. Tada je $S \subseteq \mathscr{R}_{\mathbb{C}}$, odakle je $\mathfrak{K}(S) \le \mathfrak{K}(\mathscr{R}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{c}$.

S druge strane, funkcija f zadana na $\mathbb{C}$ s $f(z) := z + (-z) + e^i + 0 + 0 + \cdots$ očito ide u S (jer je suma reda $f(z)$ zapravo konačna suma $z + (-z) + e^i = e^i$), i injekcija je jer je prvi član reda $f(z)$ upravo z. To znači $\mathfrak{K}(S) \geq \mathfrak{K}(\mathbb{C}) = \mathfrak{c}$, sveukupno $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

82. Odredite kardinalnost skupa svih redova potencija oko nule koji konvergiraju na cijelom skupu $\mathbb{R}$.

R82. Neka je S promatrani skup. Očito je svaki red potencija oko nule $\sum_n a_n x^n$ jedinstveno zadan svojim nizom općih članova $(a_n)_n$. To znači da vrijedi $\mathfrak{K}(S) \leq \mathfrak{K}({}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}) = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$, red potencija $\alpha + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots$ očito konvergira (k α) na čitavom $\mathbb{R}$, i α možemo rekonstruirati iz tog reda kao njegov slobodni član. Dakle, $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{K}(S)$. Sveukupno $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

83. Odredite kardinalnost skupa svih redova potencija (s realnim koeficijentima) oko točke -2 koji apsolutno konvergiraju na intervalu $\langle -3, -1 \rangle$.

R83. Označimo sa S promatrani skup. Redovi potencija nisu doslovno redovi realnih brojeva (elementi od $\mathscr{R}$), ali su na jednak način određeni svojim koeficijentima, pa ih također (oko -2) ima $\mathfrak{K}\big(P := \big\{\sum_n a_n (x+2)^n : (a_n)_n \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}\big\}\big) = \mathfrak{K}({}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}) = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Dakle, zbog $S \subseteq P$ je $\mathfrak{K}(S) \leq \mathfrak{K}(P) = \mathfrak{c}$.

Za obratnu nejednakost promotrimo preslikavanje $f : \mathbb{R}_+ \to P$ zadano s $f(\lambda) := \sum \frac{\lambda}{n}(x+2)^n$. Radijus konvergencije svakog reda $f(\lambda)$ iznosi

$$\lim_n \left| \frac{\lambda/n}{\lambda/(n+1)} \right| = \lim_n \frac{n+1}{n} = 1.$$

Dakle, red $f(\lambda)$ apsolutno konvergira na intervalu $\langle -2-1, -2+1 \rangle = \langle -3, -1 \rangle$, pa je $\operatorname{rng} f \subseteq S$, odnosno $f : \mathbb{R}_+ \to S$. No f je injekcija jer λ možemo rekonstruirati kao slobodni (nulti) član reda potencija $f(\lambda)$, pa je $\mathfrak{K}(S) \geq \mathfrak{K}(\mathbb{R}_+) = \mathfrak{c}$. Sveukupno je $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

2.5 Skupovi funkcija

84. Odredite kardinalnosti skupova funkcija ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$, ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$, ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ i ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{C}$.

R84. Prve dvije su već određene u zadatku 68: $\mathfrak{K}({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}) = \mathfrak{K}({}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Preostale dvije su očito jednake $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$, samo još treba odrediti koliko je to. Iz $2 \leq \mathfrak{c} \leq 2^{\mathfrak{c}}$ po monotonosti potenciranja dobijemo

$$2^{\mathfrak{c}} \leq \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} \leq \left(2^{\mathfrak{c}}\right)^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}^2} = 2^{\mathfrak{c}}, \text{ odakle } \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}.$$

85. Odredite kardinalnost skupa svih bijekcija (injekcija; surjekcija) s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N}$.

R85. Označimo s T skup beskonačnih podskupova od $\mathbb{N}$, te redom s I, S, B i F skupove svih injekcija, surjekcija, bijekcija i funkcija sa $\mathbb{N}$ u/na $\mathbb{N}$ redom. Iz zadatka 37(b) znamo da je $\mathfrak{K}(T) = \mathfrak{c}$, a $F = {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ je također kardinalnosti $\mathfrak{c}$ po zadatku 68.

Neka je A proizvoljni beskonačni podskup od $\mathbb{N}$. Poredajmo mu članove po veličini: neka je $A = \{a_0 < a_1 < a_2 < \cdots\}$. Definirajmo $f_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ovako:

$$f_A(m) := \begin{cases} a_{2n+1} & , m = a_{2n} \\ a_{2n} & , m = a_{2n+1} \\ m & , m \notin A \end{cases} .$$

Očito je f_A uvijek involucija (dva puta primijenjena daje identitetu), pa je bijekcija (sama je sebi inverz). Dakle, $A \mapsto f_A$ je preslikavanje s T u B. Također, to preslikavanje je injektivno: ako se dva podskupa od $\mathbb{N}$ razlikuju, postoji prirodan broj koji je u jednom a nije u drugom (na primjer, $m \in \mathbb{N}$ takav da je $m \in A_1 \land m \notin A_2$), no tada je $f_{A_2}(m) = m$, a $f_{A_1}(m) \neq m$, te f_{A_1} i f_{A_2} ne mogu biti jednake.

Dakle, postoji injekcija s T u B, pa je $\mathfrak{c} = \mathfrak{K}(T) \leq \mathfrak{K}(B)$. Kako je očito $B \subseteq F$, imamo i $\mathfrak{K}(B) \leq \mathfrak{K}(F) = \mathfrak{c}$. Također, kako je $B \subseteq I \subseteq F$ i $B \subseteq S \subseteq F$ (zapravo je $B = I \cap S$), zaključujemo da je $\mathfrak{K}(B) = \mathfrak{K}(I) = \mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

86. Za $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definirajmo *nosač* $\operatorname{supp} f := \{x \in \mathbb{N} : f(x) \neq 0\}$.
Odredite kardinalnost skupa $\mathscr{F} := \{f \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} : \operatorname{supp} f \text{ je konačan}\}$.

R86. Promotrimo preslikavanje $\widetilde{\ }$ (proširenje nulom) definirano na skupu $\mathbb{N}^*$ kao $\widetilde{(a_i)_{i<n}} := (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, 0, 0, 0, \ldots)$. Jasno je da je $\operatorname{supp} \widetilde{(a_i)_{i<n}} \subseteq n$ konačan, pa je $\widetilde{\ } : \mathbb{N}^* \to \mathscr{F}$.

Tvrdimo da je to surjekcija na $\mathscr{F}$. Doista, za svaki $f \in \mathscr{F}$ koji nije nul-niz postoji $m_f := 1 + \max \operatorname{supp} f$ jer je $\operatorname{supp} f$ konačan neprazan skup prirodnih brojeva. Za nul-niz stavimo $m_0 := 0$. Očito je (kao i u prethodnom odlomku) $\operatorname{supp} f \subseteq m_f$. Sada je $f|_{m_f} \in \mathbb{N}^*$ i $\widetilde{f|_{m_f}} = f$ (jer se podudaraju na svim brojevima manjim od m_f, a na svim ostalim brojevima su oba niza 0), pa je $f \in \operatorname{rng} \widetilde{\ }$. Iz surjektivnosti slijedi $\mathfrak{K}(\mathscr{F}) \leq \mathfrak{K}(\mathbb{N}^*) = \aleph_0$ (zadatak 47).

S druge strane, preslikavanje $n \mapsto \widetilde{(n)}$ ide s $\mathbb{N}$ u $\mathscr{F}$ jer je jednočlani niz $(n) \in \mathbb{N}^*$, i injekcija je, jer se n može uvijek rekonstruirati kao početni član tog niza. To znači da je $\mathfrak{K}(\mathscr{F}) \geq \mathfrak{K}(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Sveukupno $\mathfrak{K}(\mathscr{F}) = \aleph_0$, odnosno skup svih nizova prirodnih brojeva s konačnim nosačem je prebrojiv.

87. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s konačno mnogo nul-točaka.

R87. Označimo promatrani skup sa S. Zbog ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}_+ \subseteq S \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ (funkcije koje poprimaju samo pozitivne vrijednosti imaju 0 nultočaka, dakle konačno mnogo) je $\mathfrak{K}(S) = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

88. Odredite kardinalnost skupa svih aditivnih funkcija sa $\mathbb{Z}$ u $\mathbb{Z}$.
(Funkcija a je aditivna ako za sve $x, y \in \operatorname{dom} a$ vrijedi $a(x+y) = a(x) + a(y)$.)

R88. Označimo sa S promatrani skup, i definirajmo preslikavanja $f : \mathbb{Z} \to S$, $f(k)(n) := k \cdot n$
$(f(k)(x+y) = k \cdot (x+y) = k \cdot x + k \cdot y = f(k)(x) + f(k)(y)$, pa je $f(k) \in S)$
i $g : S \to \mathbb{Z}$, $g(a) := a(1)$. Prvo, za svaki $k \in \mathbb{Z}$ je $g\big(f(k)\big) = f(k)(1) = k \cdot 1 = k$, pa je $g \circ f = id_{\mathbb{Z}}$.

Drugo, za svaku $a \in S$, tvrdimo da je $f\big(g(a)\big) = a$, odnosno da je za svaki $n \in \mathbb{Z}$,
$a(n) = f\big(g(a)\big)(n) = g(a) \cdot n = a(1) \cdot n$. Prvo to dokažimo za sve $n \in \mathbb{N}_+$, indukcijom po n.

Za $n=1$ imamo $a(1)=a(1)\cdot 1$. Pretpostavimo da je $a(m)=a(1)\cdot m$ za neki prirodni m, i računajmo
$$a(m+1)=a(m)+a(1)=a(1)\cdot m+a(1)\cdot 1=a(1)\cdot(m+1).$$

Svaki $m\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_+$ je razlika neka dva elementa od $\mathbb{N}_+$ (oblika je $-t$ za $t\in\mathbb{N}$, pa je jednak $0-t=1-(t+1)$. Dakle vrijedi $1=m+(t+1)$, pa je zbog aditivnosti i upravo dokazanog

$$a(1)=a(m)+a(t+1)=a(m)+a(1)\cdot(t+1)=a(m)+a(1)\cdot t+a(1)\cdot 1,$$

odnosno $a(m)=a(1)-a(1)\cdot t-a(1)=a(1)\cdot(-t)=a(1)\cdot m$. Dakle, $f\circ g=id_S$.

Zaključujemo da su f i g jedna drugoj inverzi, pa su bijekcije. Iz toga slijedi $S\sim\mathbb{Z}$, odnosno $\mathfrak{K}(S)=\mathfrak{K}(\mathbb{Z})=\aleph_0$.

89. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ koje beskonačno mnogo puta poprimaju vrijednost $\sqrt{2}$.

R89. Označimo sa S promatrani skup. Zbog $S\subseteq{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ je $\mathfrak{K}(S)\le\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}=2^{\mathfrak{c}}$. Svih beskonačnih podskupova od $\mathbb{R}$ ima $2^{\mathfrak{c}}$ (zadatak 53(c)). Za svaki $A\in\mathbb{R}_{inf}$ definiramo funkciju $f_A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$f_A(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, & x\in A\\ 0, & \text{inače}\end{cases}$$

Očito za sve $A\in\mathbb{R}_{inf}$ vrijedi $f_A\in S$ (jer f_A na čitavom beskonačnom skupu A poprima vrijednost $\sqrt{2}$), te je $A\mapsto f_A$ injekcija (ako je $t\in A\setminus B$, onda je $f_A(t)=\sqrt{2}\neq 0=f_B(t)$), pa je $\mathfrak{K}(S)\ge\mathfrak{K}(\mathbb{R}_{inf})=2^{\mathfrak{c}}$. Sveukupno $\mathfrak{K}(S)=2^{\mathfrak{c}}$.

90. Neka su A i B skupovi te p funkcija čija domena je disjunktna s A. Dokažite da je preslikavanje, zadano na ${}^{A}B$ s $f\mapsto f\cup p$, injekcija.

R90. Neka su $f_{1,2}: A\to B$ različite: to znači da postoji $x\in A$ u kojem se razlikuju. No tada je $f_1\cup p$ funkcija koja se u x podudara s f_1 (jer $x\notin\operatorname{dom}p$), i analogno za f_2, pa je $(f_1\cup p)(x)=f_1(x)\neq f_2(x)=(f_2\cup p)(x)$. Iz toga slijedi $f_1\cup p\neq f_2\cup p$.

Specijalno, ako je $0\in B$ te za p uzmemo nulfunkciju na $C\setminus A$, gdje je C neki nadskup od A, dobijemo da je proširenje nulom, $f\mapsto\tilde{f}$, injekcija na funkcijama s fiksnom domenom.

91. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ koje imaju neprebrojivo mnogo nultočaka.

R91. Označimo sa S promatrani skup. Zbog $S\subseteq{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ je $\mathfrak{K}(S)\le\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$. Proširenje nulom $f\mapsto\tilde{f}$ je injekcija (zadatak 90) s ${}^{\mathbb{R}_+}\mathbb{R}$ u S: za svaku $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $\tilde{f}$ ima za nultočke barem sve brojeve iz $\mathbb{R}_-$, dakle neprebrojivo mnogo. Zato je $\mathfrak{K}(S)\ge\mathfrak{K}\left({}^{\mathbb{R}_+}\mathbb{R}\right)=\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$, sveukupno $\mathfrak{K}(S)=\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}=2^{\mathfrak{c}}$.

92. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ koje svaku vrijednost iz intervala $\langle 0,1\rangle$ poprimaju beskonačno mnogo puta.

R92. Označimo sa S promatrani skup. Zbog $S \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ je $\mathfrak{K}(S) \leq \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.

Definiramo funkciju $p\colon \mathbb{R}_{0+} \to \mathbb{R}$ s $p(x) := x - \lfloor x \rfloor$ te $F\colon {}^{\mathbb{R}_-}\mathbb{R} \to S$ s $F(f) := f \cup p$. F je injekcija po zadatku 90, a p (pa tako i $F(f)$ za svaku f) poprima svaku vrijednost $y \in \langle 0,1\rangle$ beskonačno mnogo puta: za svaki $n \in \mathbb{N}$ je

$$F(f)(y+n) = (f \cup p)(y+n) = p(y+n) = y + n - \lfloor y+n \rfloor = y + n - n = y.$$

Zato je $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} \leq \mathfrak{K}(S)$, sveukupno $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

93. Odredite kardinalnost skupa svih ograničenih realnih funkcija jedne realne varijable.

R93. Označimo s B skup svih takvih funkcija. Iz očitih nejednakosti ${}^{\mathbb{R}}\{0,1\} \subseteq B \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ (svaka funkcija s $\mathbb{R}$ u $\{0,1\}$ je ograničena) slijedi $2^{\mathfrak{c}} \leq \mathfrak{K}(B) \leq \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$, dakle $\mathfrak{K}(B) = 2^{\mathfrak{c}}$.

94. Odredite kardinalnost skupa svih periodičnih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$.

R94. Označimo s P promatrani skup. Zbog $P \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ je $\mathfrak{K}(S) \leq \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.

Za bilo koju funkciju $f\colon [0,1\rangle \to \mathbb{R}$ definiramo $\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s $\hat{f}(x) := f(x - \lfloor x \rfloor)$. Zbog

$$\hat{f}(x+1) = f(x+1-\lfloor x+1 \rfloor) = f\big(x+1-(\lfloor x \rfloor + 1)\big) = f(x - \lfloor x \rfloor + 1 - 1) = f(x - \lfloor x \rfloor) = \hat{f}(x)$$

je svaka $\hat{f}$ periodična funkcija (s periodom 1), pa je $\hat{}$ preslikavanje s ${}^{[0,1\rangle}\mathbb{R}$ u P. To preslikavanje je injekcija zbog $\hat{f}|_{[0,1\rangle} = f$, pa je $\mathfrak{K}(P) \geq \mathfrak{K}\big({}^{[0,1\rangle}\mathbb{R}\big) = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$. Sveukupno $\mathfrak{K}(P) = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

95. Dokažite da je skup svih periodičnih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ ekvipotentan sa skupom svih neperiodičnih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$.

R95. Iz prethodnog zadatka znamo da svih periodičnih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ ima $\mathfrak{K}(P) = 2^{\mathfrak{c}}$. Još je preostalo odrediti kardinalnost skupa $N := {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} \setminus P$. Zbog $N \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ je $\mathfrak{K}(N) \leq \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.

Za bilo koju funkciju $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definiramo $F(f) := f \cup id_{\mathbb{R}_{0-}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. To je injekcija po zadatku 90, i F ide u skup N. Naime, kad bi postojali $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ i $T \in \mathbb{R}_+$ takvi da za svaki x vrijedi $F(f)(x+T) = F(f)(x)$, tada bi specijalno to vrijedilo i za $x := -T$, pa bismo imali $F(f)(0) = F(f)(-T)$. No $F(f)$ je identiteta na nepozitivnim brojevima, pa bi ta jednakost glasila $0 = -T \in \mathbb{R}_-$, kontradikcija. Dakle, $F\colon {}^{\mathbb{R}_+}\mathbb{R} \to N$ je injekcija, iz čega slijedi $\mathfrak{K}(N) \geq \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.

Sveukupno $\mathfrak{K}(N) = \mathfrak{K}\big({}^{\mathbb{R}_+}\mathbb{R}\big) = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{K}(P)$, pa je $N \sim P$.

96. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje imaju horizontalne asimptote na obje strane.

R96. Uputa: Za svaku funkciju $f\colon \langle -1,1\rangle \to \mathbb{R}$, njeno proširenje funkcijom recipročne vrijednosti $x \mapsto \frac{1}{x}$ ima horizontalne asimptote na obje strane. Rezultat je $2^{\mathfrak{c}}$.

97. Odredite kardinalnost skupa svih neprekidnih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$.

R97. Definiramo funkciju $r : C(\mathbb{R}) \to {}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ s $r(f) := f|_{\mathbb{Q}}$.

Ako su f i g različite neprekidne funkcije na $\mathbb{R}$, tada postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) \neq g(x_0)$, i BSOMP $f(x_0) > g(x_0)$ (inače zamijenimo f i g). Znamo da je tada i $h := f - g \in C(\mathbb{R})$, i za $\varepsilon := h(x_0) > 0$ postoji $\delta \in \mathbb{R}_+$ takav da za sve $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ vrijedi

$$h(x) \in \langle h(x_0) - \varepsilon, h(x_0) + \varepsilon\rangle = \langle 0, 2\varepsilon\rangle \subset \mathbb{R}_+,$$

pa je $h(x)$ također pozitivan. No u tom intervalu $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ sigurno postoji racionalni broj (jer je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$), odaberimo jedan i označimo ga s q. Tada je $h(q) > 0$, odnosno $f(q) > g(q)$, pa su $f|_{\mathbb{Q}}$ i $g|_{\mathbb{Q}}$ različite funkcije. Drugim riječima, $f \neq g$ povlači $r(f) \neq r(g)$, pa je r injekcija. Zato je $\mathfrak{K}\big(C(\mathbb{R})\big) \leq \mathfrak{K}\big({}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}\big) = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

S druge strane, preslikavanje const koje svakom realnom broju t pridružuje realnu funkciju const_t zadanu s $\mathsf{const}_t(x) := t$, je injekcija (jer je npr. $t = \mathsf{const}_t(0)$), a svaka const_t je očito neprekidna, pa je $\mathfrak{K}\big(C(\mathbb{R})\big) \geq \mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Sveukupno imamo $\mathfrak{K}\big(C(\mathbb{R})\big) = \mathfrak{c}$.

Generalizacija: Primijetite da se isti rezultat dobije i za funkcije koje su derivabilne, glatke, klase C^2, klase C^∞, analitičke, … na cijelom $\mathbb{R}$ (ili čak na čitavoj svojoj domeni I koja je neki fiksni interval u $\mathbb{R}$), jer za svaki skup S takvih funkcija vrijedi $\operatorname{rng}\mathsf{const} \subseteq S \subseteq C(I)$, pa je $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$. (Dokaz da je $\mathfrak{K}\big(C(I)\big) = \mathfrak{c}$ je sasvim analogan dokazu za $C(\mathbb{R})$.)

98. Odredite kardinalnost skupa svih neprekidnih funkcija s $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$.

R98. Uputa: Sasvim analogno kao zadatak 97, osim što umjesto intervala morate promatrati krugove. Odgovor je $\mathfrak{c}$.

99. Odredite kardinalnost skupa svih neprekidnih konveksnih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kažemo da je konveksna ako za sve $x, y \in \mathbb{R}$ i sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, takve da je $\alpha + \beta = 1$, vrijedi $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$.)

R99. Označimo sa S skup svih takvih funkcija. Iz zadatka 97 znamo da je kardinalnost skupa svih neprekidnih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ jednaka $\mathfrak{c}$. Iz toga slijedi $\mathfrak{K}(S) \leq \mathfrak{c}$.

Tvrdimo da je za svaki $c \in \mathbb{R}$, funkcija q_c zadana s $q_c(x) := x^2 + c$, neprekidna i konveksna. Neprekidnost vrijedi jer je q_c polinom, a konveksnost jer (uz $\alpha + \beta = 1$ i $\alpha, \beta > 0$)

$$\begin{aligned}
q_c(\alpha x + \beta y) \leq \alpha q_c(x) + \beta q_c(y) &\iff (\alpha x + \beta y)^2 + c \leq \alpha(x^2 + c) + \beta(y^2 + c) \iff \\
&\iff \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2 y^2 + (\alpha + \beta)c \leq \alpha x^2 + \alpha c + \beta y^2 + \beta c \iff \\
&\iff 2\alpha\beta xy \leq (\alpha - \alpha^2)x^2 + (\beta - \beta^2)y^2 = \alpha(1-\alpha)x^2 + \beta(1-\beta)y^2 = \alpha\beta x^2 + \beta\alpha y^2 \iff \\
&\iff 2xy \leq x^2 + y^2 \iff 0 \leq x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \iff \top,
\end{aligned}$$

a lako se dobije da tvrdnja vrijedi i kada je jedan od brojeva α i β jednak nuli.

To znači da je preslikavanje $c \mapsto q_c$ injekcija (zbog $c = q_c(0)$) s $\mathbb{R}$ u S, pa je $\mathfrak{K}(S) \geq \mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Sveukupno $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

100. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje imaju prekid u točki 1.

R100. Označimo sa S skup svih takvih funkcija. Zbog $S \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ je $\mathfrak{K}(S) \leq \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$. Kako bismo dokazali da vrijedi i druga nejednakost, definiramo funkciju $F : \langle -\infty, 2] \to \mathbb{R}$ s $F(x) := \chi_{\{1\}}(x)$.

Tada za svaku funkciju $g : \langle 2, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ imamo da je funkcija $F \cup g$ definirana na čitavom skupu $\operatorname{dom} F \cup \operatorname{dom} g = \langle -\infty, 2] \cup \langle 2, +\infty\rangle = \mathbb{R}$ i ima prekid u točki 1 (jer je to lokalno svojstvo, a ima ga funkcija F koja se s $F \cup g$ podudara na okolini $\langle -\infty, 2\rangle$ od 1).

Zato je s $h(g) := F \cup g$ zadana funkcija s ${}^{\langle 2,+\infty\rangle}\mathbb{R}$ u S. No ta funkcija je injekcija po zadatku 90 pa je $\mathfrak{K}(S) \geq \mathfrak{K}\big({}^{\langle 2,+\infty\rangle}\mathbb{R}\big) = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$. Sveukupno $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

101. Dokažite da je skup točaka prekida proizvoljne rastuće funkcije s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ konačan ili prebrojiv.

R101. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona funkcija i $a \in \mathbb{R}$ njena točka prekida. Zbog monotonosti postoje $l(a) := \lim_{a^-} f = \sup f[\langle -\infty, a\rangle]$ (taj skup je neprazan jer sadrži $f(a-1)$, i odozgo ograničen s $f(a)$) i analogno $r(a) := \lim_{a^+} f = \inf f[\langle a, +\infty\rangle]$. Svaki element prvog skupa je manji ili jednak svakom elementu drugog, pa je $l(a) \leq r(a)$, no $l(a) = r(a)$ bi značilo da je f neprekidna u a (jer svakako je $l(a) \leq f(a) \leq r(a)$) — dakle, mora vrijediti $l(a) < r(a)$.

Štoviše, ako su a i b dvije točke prekida od f u poretku $a < b$, tada je $r(a) \leq f\big(\frac{a+b}{2}\big) \leq l(b)$.

To znači da ako označimo $I(a) := \langle l(a), r(a)\rangle$ za svaku točku $a \in D(f)$ (skup točaka prekida od f), to je neprazni interval u $\mathbb{R}$, i za $a \neq b$ su $I(a)$ i $I(b)$ disjunktni (pa su specijalno različiti). Dakle, I je injekcija s $D(f)$ u skup u parovima disjunktnih nepraznih otvorenih realnih intervala $\operatorname{rng} I$, koji je konačan ili prebrojiv po zadatku 40.

Iz toga slijedi $\mathfrak{K}\big(D(f)\big) \leq \mathfrak{K}(\operatorname{rng} I) \leq \aleph_0$, pa je i $D(f)$ konačan ili prebrojiv (zadatak 45(a)).

102. Odredite kardinalnost skupa svih rastućih realnih funkcija realne varijable.

R102. Označimo s R skup svih rastućih realnih funkcija. Definirajmo na njemu funkciju H s $H(f) := f|_{\mathbb{Q} \cup D(f)}$, gdje smo s $D(f)$ označili skup svih prekida funkcije f (precizno, skup svih točaka $t \in \mathbb{R}$ takvih da f nije neprekidna u t.

Prvo, pokažimo da je H injekcija. Neka su $f_{1,2} \in R$ različite: to znači da postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je (BSOMP; inače zamijenimo f_1 i f_2) $f_1(x) > f_2(x)$. Kad bi bilo $H(f_1) = H(f_2)$, njihove domene bi bile jednake, pa bismo imali $\mathbb{Q} \cup D(f_1) = \mathbb{Q} \cup D(f_2)$. To specijalno znači (jer se restrikcije na taj skup podudaraju) da x nije iz tog skupa, pa je $x \notin \mathbb{Q}$, $x \notin D(f_1)$ i $x \notin D(f_2)$ — drugim riječima, x je iracionalni broj u kojem su f_1 i f_2 neprekidne. No tada je i razlika $f_3 := f_1 - f_2$ neprekidna u x, i zbog $f_1(x) > f_2(x)$ je $\varepsilon := f_3(x) > 0$, pa postoji δ takav da za sve $x' \in \langle x - \delta, x + \delta\rangle$ vrijedi $f_3(x') > 0$. No u tom intervalu sigurno postoji racionalni broj q, koji *jest* u $\mathbb{Q} \cup D(f_1) = \mathbb{Q} \cup D(f_2)$, pa bi $f_3(q) > 0$ odnosno $f_1(q) > f_2(q)$ povlačilo $H(f_1)(q) > H(f_2)(q)$, što je kontradikcija s $H(f_1) = H(f_2)$.

Drugo, pokažimo da je $\operatorname{rng} H \subseteq \bigcup_{T \in \mathbb{R}_{\aleph_0}} {}^{T}\mathbb{R} =: L$. Neka je $h \in \operatorname{rng} H$ proizvoljna. To znači da postoji $f \in R$ takva da je $h = H(f) = f|_{\mathbb{Q} \cup D(f)}$. Po zadatku 101, $D(f)$ je konačan ili prebrojiv, pa je po zadatku 45(c), $T := \mathbb{Q} \cup D(f) = \operatorname{dom} h$ konačan ili prebrojiv — no zbog $T \supseteq \mathbb{Q}$, T

ne može biti konačan pa mora biti prebrojiv: $T \in \mathbb{R}_{\aleph_0}$. Sada $T = \operatorname{dom} h$ znači $h\colon T \to \mathbb{R}$, odnosno $h \in {}^T\mathbb{R}$. To dvoje zajedno daje $h \in L$.

Treće, pokažimo da je $\mathfrak{K}(L) = \mathfrak{c}$. Indeksni skup je $\mathbb{R}_{\aleph_0}$, i znamo da ima kardinalnost $\mathfrak{c}$ po zadatku 53(f). Svaki pojedini skup u uniji je kardinalnosti $\mathfrak{K}\big({}^T\mathbb{R}\big) = \big(\mathfrak{K}(\mathbb{R})\big)^{\mathfrak{K}(T)} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Dakle, po zadatku 51(a) je kardinalnost unije $\mathfrak{K}(L) = \mathfrak{c}$.

Sada imamo injekciju $H : R \to L$, pa vidimo da je $\mathfrak{K}(R) \leq \mathfrak{K}(L) = \mathfrak{c}$. S druge strane, funkcija $G\colon \mathbb{R} \to R$ zadana s $G(t)(x) := x + t$ je očito injekcija (jer je $G(t)(0) = t$, i svaka translacija je rastuća), pa je $\mathfrak{K}(R) \geq \mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Sveukupno imamo $\mathfrak{K}(R) = \mathfrak{c}$.

103. Odredite kardinalnost skupa svih monotonih realnih funkcija.

R103. Označimo s M skup svih monotonih realnih funkcija, a s R skup svih rastućih, odnosno s P skup svih padajućih funkcija. Tada je očito $M = R \cup P$, te $R \sim P$ (npr. $f \mapsto -f$ je jedna bijekcija između R i P). Iz zadatka 102 znamo $\mathfrak{K}(R) = \mathfrak{c}$, pa je onda i $\mathfrak{K}(P) = \mathfrak{c}$. Sada po zadatku 51(a) slijedi $k(M) = \mathfrak{c}$.

104. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje su derivabilne u točki 1.

R104. Uputa: Za svaku funkciju $f\colon \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$, njeno proširenje nulom $\tilde{f}$ je derivabilno u 1 (naravno, $\tilde{f}'(1) = 0$). Odgovor je $2^{\mathfrak{c}}$.

105. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje su neprekidne na $\mathbb{R}$, ali ne i derivabilne u točki 8.

R105. Označimo sa S promatrani skup. Zbog $S \subseteq C(\mathbb{R})$ je (zadatak 97) $\mathfrak{K}(S) \leq \mathfrak{K}\big(C(\mathbb{R})\big) = \mathfrak{c}$.

Za dokaz druge nejednakosti, za svaki $a \in \mathbb{R}$ definiramo funkciju $f(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s $f(a)(x) = |x - 8| + a$. Očito je svaka $f(a)$ neprekidna na $\mathbb{R}$, i $\big(f(a)\big)'(8)$ ne postoji, iz čega $f : \mathbb{R} \to S$. Funkcija f je injekcija, jer je $f(a)(8) = |8 - 8| + a = a$. Dakle $\mathfrak{K}(S) \geq \mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$.

Sveukupno $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

106. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje su u točki 1 derivabilne samo jednom (postoji $f'(1)$, ali ne postoji $f''(1)$).

R106. Označimo sa S skup svih takvih funkcija. Zbog $S \subseteq {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ je $\mathfrak{K}(S) \leq \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$. Za dokaz druge nejednakosti prvo definirajmo funkciju $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ s $f(x) := (x - 1)\,|x - 1|$. Tada je

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)|x-1|}{x - 1} = \lim_{x\to 1} |x - 1| = |1 - 1| = 0,$$

no za $x > 1$ je $f(x) = (x - 1)^2$, pa je $f'(x) = 2(x - 1)$, dok je za $0 < x < 1$ suprotno, $f(x) = -(x-1)^2$, pa je $f'(x) = -2(x-1)$. To troje (zajedno s $f'(1) = 0$) daje $f'(x) = 2\,|x - 1|$ na čitavoj domeni, što nije derivabilno u 1, pa ne postoji $f''(1)$.

Za svaku funkciju $g : \mathbb{R}_{-0} \to \mathbb{R}$, unija $g \cup f$ je doista funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ (jer je $\{\operatorname{dom} f, \operatorname{dom} g\} = \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_{-0}\}$ particija od $\mathbb{R}$). Štoviše, $g \cup f \in S$, tj. $g \cup f$ je točno jednom derivabilna u 1 — jer je f takva, to je lokalno svojstvo u točki 1, a $g \cup f$ i f se podudaraju na okolini $\mathbb{R}_+$ od 1.

Za kraj, preslikavanje koje funkciji g pridružuje $f \cup g$ je injekcija (s ${}^{\mathbb{R}_{-0}}\mathbb{R}$ u S) po zadatku 90. To znači da je $\mathfrak{K}(S) \geq \mathfrak{K}\big({}^{\mathbb{R}_{-0}}\mathbb{R}\big) = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$. Sveukupno $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

107. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ koje su klase C^1 na $\mathbb{R}_- = \langle -\infty, 0\rangle$, a klase C^2 na $\mathbb{R}_+ = \langle 0, +\infty\rangle$.

R107. Označimo sa S skup svih takvih funkcija, označimo $P := C^1(\mathbb{R}_-) \times \mathbb{R} \times C^2(\mathbb{R}_+)$, i definirajmo funkcije:

- $F : S \to P$, $F(f) := \big(f|_{\mathbb{R}_-}, f(0), f|_{\mathbb{R}_+}\big)$,
- $G : P \to S$, $G(f_-, f_0, f_+) := f_- \cup \{(0, f_0)\} \cup f_+$.

Funkcije F i G doista idu kamo piše, jer je pripadnost klasi C^1 odnosno C^2 lokalno svojstvo, te je $\big\{R_-, \{0\}, \mathbb{R}_+\big\}$ particija od $\mathbb{R}$.

Za svaku $f \in S$ je $G\big(F(f)\big) = f|_{\mathbb{R}_-} \cup \big\{\big(0, f(0)\big)\big\} \cup f|_{\mathbb{R}_+} = f$ (jer se podudaraju u svim negativnim brojevima, u nuli i u svim pozitivnim brojevima). I obrnuto, restrikcija od $G(f_-, f_0, f_+)$ na $\mathbb{R}_-$ je očito f_- (na isti način), restrikcija te funkcije na $\mathbb{R}_+$ je f_+, dok je njena vrijednos u nuli jednaka $\{(0, f_0)\}(0) = f_0$. To znači da je $F\big(G(t)\big) = t$ za svaku trojku $t = (f_-, f_0, f_+) \in P$.

Drugim riječima, $G \circ F = id_S$ i $F \circ G = id_P$, pa su F i G jedna drugoj inverzi, odnosno bijekcije su. Zaključujemo $S \sim P$, odnosno (uz zadatak 97)

$$\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{K}(P) = \mathfrak{K}\big(C^1(\mathbb{R}_-) \times \mathbb{R} \times C^2(\mathbb{R}_+)\big) = \mathfrak{K}\big(C^1(\mathbb{R}_-)\big) \cdot \mathfrak{K}(\mathbb{R}) \cdot \mathfrak{K}\big(C^2(\mathbb{R}_+)\big) = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^3 = \mathfrak{c}.$$

108. Odredite kardinalnost skupa svih funkcija $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje nemaju prve parcijalne derivacije u ishodištu.

R108. Označimo skup svih takvih funkcija sa S. Zbog $S \subseteq {}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\mathbb{R}$ je $\mathfrak{K}(S) \leq \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}^2} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.

Za dokaz obratne nejednakosti označimo s $K := B\big((0,0), 1\big)$ jedinični otvoreni krug sa središtem u ishodištu, i definirajmo funkciju $f : K \to \mathbb{R}$ s $f(x, y) := |x| + |y|$. Kako $f(x, 0) = |x|$ očito nije derivabilno po x, ne postoji $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Analogno, jer $f(0, y) = |y|$ nije derivabilno po y, ne postoji ni $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Za svaku $g : \mathbb{R}^2 \setminus K \to \mathbb{R}$, unija $f \cup g$ je funkcija sa $K \cup (\mathbb{R}^2 \setminus K) = \mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$, i nema prve parcijalne derivacije u ishodištu — jer ih f nema, to je lokalno svojstvo, a f i $f \cup g$ se podudaraju na okolini K ishodišta.

Štoviše, preslikavanje $g \mapsto f \cup g$ je injekcija (s ${}^{\mathbb{R}^2\setminus K}\mathbb{R}$ u S) po zadatku 90. To znači da je $\mathfrak{K}(S) \geq \mathfrak{K}\big({}^{\mathbb{R}^2\setminus K}\mathbb{R}\big) = \mathfrak{c}^{\mathfrak{K}(\mathbb{R}^2\setminus K)}$. Zbog $\mathbb{R}^2 \setminus K \supseteq T := \langle 1, 2\rangle \times \mathbb{R}$ (precizno, K i T su disjunktni, jer $(x, y) \in K$ znači $x^2 + y^2 < 1$, dok bi $(x, y) \in T$ povlačilo $x^2 + y^2 \geq x^2 \geq x > 1$) je $\mathfrak{K}\big(\mathbb{R}^2 \setminus K\big) \geq \mathfrak{K}(T) = \mathfrak{K}(\langle 1, 2\rangle \times \mathbb{R}) = \mathfrak{K}(\langle 1, 2\rangle) \cdot \mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, pa je $\mathfrak{K}(S) \geq \mathfrak{K}\big({}^{\mathbb{R}^2\setminus K}\mathbb{R}\big) = \mathfrak{c}^{\mathfrak{K}(\mathbb{R}^2\setminus K)} \geq \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.

Sveukupno je $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

109. Neka je f cijela funkcija, tj. kompleksna funkcija holomorfna na čitavom $\mathbb{C}$, i neka je f različita od nul-funkcije. Dokažite da f ima najviše prebrojivo mnogo nul-točaka.

R109. Uputa: Skup nul-točaka cijele funkcije, koja je različita od nul-funkcije, nema gomilište (vidi neki udžbenik iz kompleksne analize). Dakle, oko svake nul-točke možemo opisati otvoreni krug koji neće sadržavati druge nul-točke. Iz svakog tako opisanog otvorenog kruga izaberemo točku čije su obje koordinate racionalni brojevi.

2.6 Skupovi matrica

110. Dokažite: za bilo koji standardni skup brojeva A, skup svih matrica (zadanog tipa, ili bilo kojeg tipa) s elementima iz A je ekvipotentan s A.

R110. Za $m,n \in \mathbb{N}_+$ i skup A, s $M_{mn}(A)$ označimo skup svih matrica tipa $m \times n$ (s m redaka i n stupaca) s elementima iz A. Skupovno, uz oznaku $N_t := \{1,\dots,t\}$ za $t \in \mathbb{N}_+$, takve matrice su funkcije s $N_m \times N_n$ u A. Očito je $t \sim N_t$ za svaki t (sljedbenik je bijekcija između ta dva skupa). Iz teorema o kvadratu slijedi (ako je A standardni skup brojeva, dakle beskonačan) $A \times A \sim A$, pa lako indukcijom (zbog neovisnosti definicije množenja kardinalnosti o reprezentantima) $A^t \sim A$ za sve $t \in \mathbb{N}_+$, a onda možemo izračunati

$$\mathfrak{K}\big(M_{mn}(A)\big) = \mathfrak{K}\big({}^{N_m \times N_n}A\big) = \mathfrak{K}(A)^{\mathfrak{K}(N_m)\cdot\mathfrak{K}(N_n)} = \mathfrak{K}(A)^{m\cdot n} = \big(\mathfrak{K}(A)^m\big)^n = \mathfrak{K}(A)^n = \mathfrak{K}(A).$$

Posebno to vrijedi za matrice reda n: $M_n(A) := M_{nn}(A) \sim A$ za bilo koji $n \in \mathbb{N}_+$.

Za matrice proizvoljnog tipa imamo $M(A) = \bigcup_{m,n} M_{mn}(A)$, i indeksni skup $\mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ je kardinalnosti $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, pa je po zadatku 46 $M(A) \sim M_{11}(A) \sim A$.

111. Odredite kardinalnost skupa svih specijalnih realnih matrica reda 2 (specijalnim matricama zovemo one s determinantom 1).

R111. Neka je $S := \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$. Zbog $S \subseteq M_2(\mathbb{R})$ je $\mathfrak{K}(S) \le \mathfrak{K}\big(M_2(\mathbb{R})\big) = \mathfrak{c}$ (po zadatku 110, na koji se obično više nećemo eksplicitno pozivati ubuduće).

Za obratnu nejednakost primijetimo da je s $f(x) := \left[\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ zadana injekcija ($f(x) = f(y)$ povlači $x = \big(f(x)\big)_{12} = \big(f(y)\big)_{12} = y$) s $\mathbb{R}$ u S ($\det f(x) = 1 \cdot 1 - x \cdot 0 = 1$), pa je $\mathfrak{K}(S) \ge \mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Sveukupno je $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

112. Odredite kardinalnost skupa svih simetričnih 3×3 realnih matrica.
(Matrica A je simetrična ako vrijedi $A = A^T$.)

R112. Označimo promatrani skup sa S, i promotrimo sljedeće funkcije:

- $f : S \to \mathbb{R}^6$, zadana s $f(A) = \big((A)_{11}, (A)_{12}, (A)_{13}, (A)_{22}, (A)_{23}, (A)_{33}\big)$;
- $g : \mathbb{R}^6 \to S$, zadana s $g(a,b,c,d,e,t) := \left[\begin{smallmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & t \end{smallmatrix}\right]$.

Lako se vidi da je $f\big(g(\vec{x})\big) = \vec{x}$ za sve $\vec{x} \in \mathbb{R}^6$ i $g\big(f(A)\big) = A$ za svaku $A \in S$.
Dakle, f i g su bijekcije, pa je $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{K}\big(\mathbb{R}^6\big) = \mathfrak{c}^6 = \mathfrak{c}$.

113. Odredite kardinalnost relacije „komutiraju" na skupu $M_2(\mathbb{R})$.
(Kažemo da matrice A i B komutiraju ako je $AB = BA$.)

R113. Označimo promatranu relaciju sa $S := \{(A,B) \in M_2(\mathbb{R})^2 : AB = BA\}$. Zbog $S \subseteq M_2(\mathbb{R})^2$ je $\mathfrak{K}(S) \le \mathfrak{K}\big(M_2(\mathbb{R})\big)^2 = \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}$. Za obrnutu nejednakost primijetimo da svaka matrica komutira s jediničnom matricom, pa je $\{I_2\} \times M_2(\mathbb{R}) \subseteq S$, iz čega $\mathfrak{K}(S) \ge \mathfrak{K}\big(\{I_2\} \times M_2(\mathbb{R})\big) = \mathfrak{K}(\{I_2\}) \cdot \mathfrak{K}\big(M_2(\mathbb{R})\big) = 1 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. Sveukupno je $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

114. Odredite kardinalnost skupa svih nilpotentnih matrica tipa 3×3 nad $\mathbb{R}$.
(Za matricu kažemo da je nilpotentna ako je neka njena potencija jednaka nulmatrici.)

R114. Označimo sa $S := \{A \in M_3(\mathbb{R}) : (\exists k \in \mathbb{N})(A^k = 0_{3\times 3})\}$ promatrani skup. Zbog $S \subseteq M_3(\mathbb{R})$ je $\mathfrak{K}(S) \le \mathfrak{K}\big(M_3(\mathbb{R})\big) = \mathfrak{c}$ po zadatku 110. S druge strane, preslikavanje koje svakom $x \in \mathbb{R}$ pridruži matricu

$$N(x) = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ide u S jer je $\big(N(x)\big)^2$ nulmatrica, i injekcija je jer je $\big(N(x)\big)_{12} = x$.
To znači da je $\mathfrak{K}(S) \ge \mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Sveukupno je $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

115. Odredite kardinalnost skupa svih dijagonalnih matrica (bilo kojeg reda) nad $\mathbb{C}$.

R115. Označimo sa S promatrani skup. Zbog $S \subseteq M(\mathbb{C})$ je $\mathfrak{K}(S) \le \mathfrak{K}\big(M(\mathbb{C})\big) = \mathfrak{K}(\mathbb{C}) = \mathfrak{c}$ po zadatku 110. S druge strane, preslikavanje koje svakom $z \in \mathbb{C}$ pridružuje matricu zI_2 je injekcija jer je $(zI_2)_{11} = z$ i ide u S jer je svaka skalarna matrica dijagonalna. To znači $\mathfrak{K}(S) \ge \mathfrak{K}(\mathbb{C}) = \mathfrak{c}$, pa sveukupno imamo $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

116. Odredite kardinalnost skupa svih normalnih kompleksnih matrica reda 3.
(Za kompleksnu matricu A kažemo da je normalna ako komutira sa svojom adjungiranom matricom.)

R116. Označimo sa S skup svih normalnih kompleksnih matrica reda 3. Zbog $S \subseteq M_3(\mathbb{C})$ je $\mathfrak{K}(S) \le \mathfrak{K}\big(M_3(\mathbb{C})\big) = \mathfrak{c}$. Za obratnu nejednakost primijetimo da je za svaki $z \in \mathbb{C}$, matrica

$$A_z = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

normalna (jer je dijagonalna, pa komutira sa svim matricama). Preslikavanje $z \mapsto A_z$ dakle ide s $\mathbb{C}$ u S, i injekcija je, jer je $(A_z)_{11} = z$. Zato je $\mathfrak{K}(S) \ge \mathfrak{K}(\mathbb{C}) = \mathfrak{c}$. Sveukupno, $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

117. Odredite kardinalnost skupa svih kompleksnih unitarnih matrica reda 5.
(Za kompleksnu matricu A kažemo da je unitarna ako je $A^{-1} = A^*$.)

R117. Označimo sa S skup svih kompleksnih unitarnih matrica reda 5. Zbog $S \subseteq M_5(\mathbb{C})$ je $\mathfrak{K}(S) \le \mathfrak{K}\big(M_5(\mathbb{C})\big) = \mathfrak{c}^{25} = \mathfrak{c}$. Za obratnu nejednakost primijetimo prvo da je interval $[0, 2\pi\rangle$ ekvipotentan s jediničnom kružnicom $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ($z \mapsto e^{iz}$ je bijekcija).

Za svaki $z \in K$ definiramo matricu $A_z = z \cdot I_5$ (s I_5 smo označili jediničnu matricu reda 5). Za sve $z \in K$ vrijedi $A_z \cdot A_z^* = A_z^* \cdot A_z = (z\overline{z})I_5 = |z|^2 I_5 = 1I_5 = I_5$. Dakle, $z \mapsto A_z$ je injekcija s K u S, pa je $\mathfrak{K}(S) \geq \mathfrak{K}(K) = \mathfrak{K}([0, 2\pi\rangle) = \mathfrak{c}$. Sveukupno je $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

118. Odredite kardinalnost skupa svih matrica iz $M_3(\mathbb{C})$ kojima je i svojstvena vrijednost.

R118. Označimo sa S promatrani skup. Očito je $\mathfrak{K}(S) \leq \mathfrak{K}\big(M_3(\mathbb{C})\big) = \mathfrak{c}$. Ako svakom $z \in \mathbb{C}$ pridružimo matricu

$$A_z = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

karakteristični polinom matrice A_z jednak je $k_{A_z}(\lambda) = (\lambda - i)(\lambda - z)\lambda$. To znači da joj je spektar $\sigma_{A_z} = \{0, i, z\} \ni i$, pa je $A_z \in S$. Dakle, dobili smo preslikavanje s $\mathbb{C}$ u S, koje je injekcija jer je $(A_z)_{22} = z$. Zaključujemo $\mathfrak{K}(S) \geq \mathfrak{K}(\mathbb{C}) = \mathfrak{c}$, sveukupno $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

119. Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad poljem $\mathbb{C}$. Odredite kardinalnost skupa svih linearnih operatora s V u W.

R119. Ako je barem jedan od V i W trivijalni prostor $\{\Theta\}$, nul-operator je jedini linearni operator s V u W, pa je tražena kardinalnost jednaka 1. U protivnom, označimo $\dim V =: n$ i $\dim W =: m$, i fiksirajmo neke baze za V i W. Linearni operator je jednoznačno određen svojom matricom (u tom paru baza) koja je tipa $m \times n$ s koeficijentima iz $\mathbb{C}$. Dakle, tražena kardinalnost je jednaka $\mathfrak{K}\big(Hom(V, W)\big) = \mathfrak{K}\big(M_{mn}(\mathbb{C})\big) = \mathfrak{K}(\mathbb{C}) = \mathfrak{c}$.

120. Odredite kardinalnost skupa svih invertibilnih linearnih operatora s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^n$.

R120. Označimo sa S promatrani skup. Ako je $n = 0$, postoji samo jedan linearni operator (prostor je trivijalan) i on je invertibilan (sam je sebi inverz) pa je tražena kardinalnost $\mathfrak{K}(S) = 1$.

Inače, s obzirom na kanonsku bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostora $\mathbb{R}^n$, svakom linearnom operatoru je pridružena jedinstvena matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$. Linearni operator je invertibilan ako i samo ako je njegova matrica regularna. Dakle, $S \sim S' := \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$.

Zbog $S' \subseteq M_n(\mathbb{R})$ je $\mathfrak{K}(S') \leq \mathfrak{K}\big(M_n(\mathbb{R})\big) = \mathfrak{c}$. S druge strane, funkcija f zadana na $\langle 0, 1\rangle$ s $f(x) := xI_n$ ide u S' zbog $\det f(x) = x^n > 0$, i injekcija je zbog $\big(f(x)\big)_{11} = x$.

Dakle $\mathfrak{K}(S') \geq \mathfrak{K}(\langle 0, 1\rangle) = \mathfrak{c}$. Sveukupno $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{K}(S') = \mathfrak{c}$.

121. Za fiksni $n \in \mathbb{N}$, odredite (u ovisnosti o n) kardinalnost skupa svih linearnih operatora na $\mathbb{R}^n$ kojima je 1 svojstvena vrijednost.

122. Odredite kardinalnost skupa svih linearnih operatora na $\mathbb{C}^4$ kojima su i i 1 svojstvene vrijednosti.

123. Odredite kardinalnost skupa svih sustava s 2 linearne jednadžbe i 3 nepoznanice nad poljem $\mathbb{R}$ koji nemaju rješenja.

R123. Označimo sa S promatrani skup. Pridruživanje $\left[\begin{smallmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{smallmatrix}\right] \overset{r}{\longmapsto} \left\{\begin{smallmatrix} ax_1 & + & bx_2 & + & cx_3 & = & d \\ ex_1 & + & fx_2 & + & gx_3 & = & h \end{smallmatrix}\right.$ je surjekcija s $M_{24}(\mathbb{R})$ na skup $T \supseteq S$ *svih* realnih sustava 2×3, pa je $\mathfrak{K}(S) \le \mathfrak{K}(T) \le \mathfrak{K}\big(M_{24}(\mathbb{R})\big) = \mathfrak{c}$.

S druge strane, za svaki $t \in \mathbb{R}_+$ sustav $l(t) := r\big(\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{smallmatrix}\right]\big) = \left\{\begin{smallmatrix} x_3 & = & 0 \\ x_3 & = & t \end{smallmatrix}\right.$ očito nema rješenja zbog $t \neq 0$, pa je $l : \mathbb{R}_+ \to S$. Štoviše, to je injekcija, jer t uvijek možemo očitati kao onaj slobodni član sustava $l(t)$ koji nije 0. Dakle $\mathfrak{K}(S) \ge \mathfrak{K}(\mathbb{R}_+) = \mathfrak{c}$, sveukupno $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

124. Odredite kardinalnost skupa svih kvadratnih sustava linearnih jednadžbi nad poljem $\mathbb{C}$ koji nemaju rješenja.

125. Odredite kardinalnost skupa svih sustava linearnih jednadžbi s n nepoznanica nad poljem $\mathbb{R}$ koji imaju jedinstveno rješenje, gdje je $n \in \mathbb{N}_+$ proizvoljan.

R125. Preslikavanje koje svakoj matrici s $n+1$ stupaca pridružuje sustav kojem je to proširena matrica je očito surjekcija (jer svaki sustav ima proširenu matricu) s podskupa $P := \bigcup_{m\in\mathbb{N}_+} M_{m(n+1)}(\mathbb{C}) \subseteq M(\mathbb{C})$ na nadskup $T \supseteq S$ promatranog skupa (u T su *svi* realni linearni sustavi s n nepoznanica). Iz toga je $\mathfrak{c} = \mathfrak{K}(\mathbb{C}) = \mathfrak{K}\big(M(\mathbb{C})\big) \ge \mathfrak{K}(P) \ge \mathfrak{K}(T) \ge \mathfrak{K}(S)$.

S druge strane, preslikavanje koje svakom $t \in \mathbb{R}$ pridružuje sustav $\{x_1 = t, x_2 = t, \dots, x_n = t\}$ je injekcija (t možemo očitati kao slobodni član bilo koje jednadžbe sustava, a ima ih zbog $n > 0$), i takav sustav uvijek ima jedinstveno rješenje $(t, t, \dots, t) \in \mathbb{R}^n$, pa je $\mathfrak{K}(S) \ge \mathfrak{K}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Sveukupno, $\mathfrak{K}(S) = \mathfrak{c}$.

126. Odredite kardinalnost skupa svih sustava linearnih jednadžbi s koeficijentima iz $\mathbb{Q}$ koji imaju beskonačno mnogo rješenja.

R126. Preslikavanje koje svakom sustavu pridružuje njegovu proširenu matricu je očito injekcija, te ako promatrani skup označimo sa S, iz toga slijedi da je $\mathfrak{K}(S) \le \mathfrak{K}\big(M(\mathbb{Q})\big) = \aleph_0$.

S druge strane, za svaki $q \in \mathbb{Q}$, sustav $L(q) := \left\{\begin{smallmatrix} 2x_1 & + & 2x_2 & = & 2q \\ 3x_1 & + & 3x_2 & = & 3q \end{smallmatrix}\right\}$ ima beskonačno mnogo rješenja (za svaki $t \in \mathbb{R}$, $(t, q-t)$ je rješenje od $L(q)$, odnosno $t \mapsto (t, q-t)$ je injekcija sa $\mathbb{R}$ u skup rješenja od $L(q)$), pa je $L : \mathbb{Q} \to S$. No L je očito injekcija (jer je q zbroj $x_1 + x_2$ u bilo kojem rješenju od $L(q)$, recimo vrijednost x_2 za $x_1 := 0$), pa je $\mathfrak{K}(S) \ge \mathfrak{K}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$. Zajedno s prethodnim odlomkom dobivamo $\mathfrak{K}(S) = \aleph_0$.

127. Koliko ima neprebrojivih podskupova skupa koji ima kardinalni broj $\aleph_1$?

R127. Uputa: Iskoristite korolar teorema o kvadratu da biste dobili $\aleph_1 \cdot 2 = \aleph_1$, pomoću čega razbijte početni skup na dva njemu ekvipotentna dijela A i B. Zatim svakom podskupu $T \subseteq A$ pridružite $T \cup B$ i dokažite da je to injekcija. Tako ćete dobiti jednu ogradu, a druga je trivijalna (neprebrojivih podskupova nema više nego *svih* podskupova). Odgovor je $2^{\aleph_1}$.

128. Koliko ima dobrih uređaja na skupu kardinalnog broja $\aleph_1$?

129. Neka je F prebrojivo polje i K konačno proširenje od F.
Dokažite da je tada polje K također prebrojivo.

3 Uređeni skupovi

3.1 Parcijalno uređeni skupovi

130. Neka je A skup i R antisimetrična relacija na A. Postoji li nužno refleksivni parcijalni uređaj R' na A koji sadrži R?

R130. Ne. Na primjer, uzmimo skup $A := \{1,2,3\}$ i relaciju $R := \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ na njemu. Očito je relacija R antisimetrična. Ako je $R \subseteq R' \subseteq A \times A$ i R' tranzitivna tada su nužno $(1,2)$, $(2,3)$ i $(3,1)$ u R'. No, tada iz $1\ R'\ 2\ R'\ 3$ zbog tranzitivnosti imamo $1\ R'\ 3$, pa kako je i $3\ R'\ 1$ (a očito $1 \neq 3$), R' nije antisimetrična.

131. Neka je $(S,<)$ parcijalno uređen skup. Dokažite da postoji podskup $\mathscr{S}$ od $\mathscr{P}(S)$, takav da je parcijalno uređen skup $(\mathscr{S},\subset)$ sličan sa $(S,<)$.

R131. Za proizvoljni $x \in S$, sa $\bar{p}_S(x)$ označimo „zatvoreni početni komad” $\{y \in S : y \leq x\} = p_S(x) \cup \{x\}$. Tada je $\bar{p}_S$ funkcija sa S u $\mathscr{P}(S)$. Označimo sa $\mathscr{S} \subset \mathscr{P}(S)$ sliku od $\bar{p}_S$. (Zašto inkluzija mora biti prava?) Dokažimo da $x < y$ povlači $\bar{p}_S(x) \subset \bar{p}_S(y)$.

Neka je $x < y$. To znači da za svaki $z \leq x$ vrijedi i $z \leq y$ (tranzitivnost), pa je $\bar{p}_S(x) \subseteq \bar{p}_S(y)$. No također očito vrijedi $y \notin \bar{p}_S(x)$ (antisimetričnost) i $y \in \bar{p}_S(y)$ (refleksivnost od $\leq$), pa ta dva skupa ne mogu biti jednaki.

Dokažimo injektivnost preslikavanja $\bar{p}_S : S \to \mathscr{S}$. Kad bi bilo $\bar{p}_S(x) = \bar{p}_S(y)$, mogli bismo ovako zaključivati:

$$x \in \{x\} \subseteq p_S(x) \cup \{x\} = \bar{p}_S(x) = \bar{p}_S(y) \Longrightarrow x \leq y,$$

i analogno $y \leq x$, te po antisimetričnosti $x = y$.

Kako je preslikavanje $\bar{p}_S$ surjektivno po definiciji (kodomena mu je upravo definirana kao slika), zaključujemo da je bijekcija. Dokažimo da čuva uređaj i u drugom smjeru: ako je $\bar{p}_S(x) \subset \bar{p}_S(y)$, iz $x \in \bar{p}_S(x)$ dobivamo $x \in \bar{p}_S(y)$, odnosno $x \leq y$. No ne može biti $x = y$, jer bi tada bilo i $\bar{p}_S(x) = \bar{p}_S(y)$.

Sve u svemu, $\bar{p}_S$ je sličnost između S i $\mathscr{S}$, pa je $S \simeq \mathscr{S}$.

132. Postoji li, za bilo koje $m, n \in \mathbb{N}$, parcijalno uređeni skup s n minimalnih i m maksimalnih elemenata? (Napomena: $0 \in \mathbb{N}$.)

R132. Da. Promotrimo sljedeći skup uređenih parova cijelih brojeva:

$$A_{nm} := \big(\{1,2,\dots,n\}\times\{1\}\big)\cup\big(\mathbb{Z}\times\{2\}\big)\cup\big(\{1,2,\dots,m\}\times\{3\}\big).$$

Na A_{nm} definiramo uređaj $\prec$ kao:

$$(a,b)\prec(c,d) :\Leftrightarrow b<d\lor(b=d=2\land a<c)$$

(riječima, prvo dolazi n međusobno neusporedivih elemenata, nakon njih dolaze svi cijeli brojevi uređeni standardnim uređajem, i na kraju m međusobno neusporedivih elemenata).

Primijetimo da su u tako definiranom parcijalno uređenom skupu $(A_{nm},\prec)$ minimalni elementi točno oni oblika $(a,1)$. Naime, od pojedinog elementa $(a,1)$ nisu manji niti preostali elementi $(b,1)$ (jer su neusporedivi s njim), niti $(c,2)$ (jer su od njega veći), niti $(d,3)$ (jer su također od njega veći). S druge strane, elementi koji nisu oblika $(a,1)$ nisu minimalni, jer od $(c,2)$ uvijek postoji manji element $(c-1,2)\in A_{nm}$, te od $(d,3)$ postoji manji element $(0,2)$.

Kako elemenata oblika $(a,1)$ u A_{nm} ima upravo n, zaključujemo da u A_{nm} ima točno n minimalnih elemenata. Na isti način vidimo da su maksimalni elementi upravo oni oblika $(d,3)$, a njih u A_{nm} ima točno m.

Jednostavnije rješenje u slučaju da ni m ni n nisu 0: skup $n\times\{0\}\cup m\times\{1\}$, uređen po drugoj komponenti: $(a,b)\prec(c,d) :\Longleftrightarrow b<d$. Očito su svi elementi oblika $(x,0)$ minimalni (njih n), a svi oblika $(y,1)$ maksimalni (njih m).

133. Neka je R refleksivna i tranzitivna relacija na nekom skupu S. Dokažite da postoji relacija ekvivalencije E na S i (refleksivni) parcijalni uređaj $\le$ na kvocijentnom skupu $S/_E$ tako da vrijedi

$$(\forall x,y\in S)\big([x]_E\le[y]_E\Longleftrightarrow x\,R\,y\big).$$

134. Za parcijalno uređeni skup kažemo da je *pseudorešetka* ako svaki njegov dvočlani podskup ima supremum i infimum. Provjerite jesu li sljedeći skupovi pseudorešetke:

a) $(\mathbb{N},|)$, gdje $x\mid y$ znači „x dijeli y";

b) $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},R)$, gdje je $(a,b)\,R\,(x,y) :\Longleftrightarrow a=x\land b\le y$;

c) $(\mathscr{P}(A),\subset)$, gdje je A proizvoljan skup.

135. *Rešetka* je pseudorešetka s najvećim i najmanjim elementom.

a) Pokažite da je skup svih potprostora nekog vektorskog prostora rešetka.

b) Nađite bar po (još) jedan primjer konačne i beskonačne rešetke, te primjer pseudorešetke koja nije rešetka.

136. Za parcijalno uređen skup kažemo da je usmjeren ako svaki njegov konačni podskup ima gornju među. Neka je $\mathscr{F}$ familija funkcijā usmjerena s obzirom na relaciju $\subset$. Dokažite da je $\bigcup\mathscr{F}$ također funkcija.

R136. Unija $\bigcup\mathscr{F}$ je očito relacija (svaki njen element je u nekoj funkciji $f \in \mathscr{F}$, dakle uređen je par), treba još vidjeti da ima funkcijsko svojstvo. Neka su (a,b) i (a,c) dva uređena para iz te unije, s istom prvom koordinatom (trebamo $b = c$). Kako je $(a,b) \in \bigcup\mathscr{F}$, postoji $f \in \mathscr{F}$ takva da je $a\ f\ b$. Jednako tako, postoji $h \in \mathscr{F}$ takva da je $a\ h\ c$.

Skup $\mathscr{F}$ je usmjeren, pa njegov konačni podskup $\{f, h\}$ ima gornju među: jednu takvu označimo s g. Tada vrijedi $f \subseteq g$ i $h \subseteq g$, pa se uređeni parovi (a,b) i (a,c) oba nalaze u g. No $g \in \mathscr{F}$ je funkcija, pa iz toga slijedi $b = c$.

137. Neka je $(S, \prec)$ konačan neprazan parcijalno uređen skup. Dokažite da S ima bar jedan minimalan i bar jedan maksimalan element.

R137. Vidi [12].

138. Neka je S skup, i $\mathscr{U}$ skup relacijā parcijalnog uređaja na S. Je li tada nužno i $\bigcup\mathscr{U}$ relacija parcijalnog uređaja na S?

R138. Ne. Na primjer, neka je $S := \{1,2\}$, $U_1 := \{(1,2)\}$, $U_2 := \{(2,1)\}$, i $\mathscr{U} := \{U_1, U_2\}$. Lako je vidjeti da su i U_1 i U_2 (strogi) parcijalni uređaji (zapravo čak totalni uređaji) na S, iako skup $\bigcup\mathscr{U} = U_1 \cup U_2 = \{(1,2),(2,1)\}$ nije parcijalni uređaj, jer nije tranzitivan.

139. Neka je $(A, \prec)$ parcijalno uređen skup. Dokažite da su sljedeće dvije tvrdnje ekvivalentne:

- svaki neprazan odozgo ograničen podskup od A ima supremum u A;
- svaki neprazan odozdo ograničen podskup od A ima infimum u A.

140. Neka su P i Q particije istog skupa U. Kažemo da je P finija od Q, i pišemo $P \preceq Q$, ako za svaki element od P postoji njegov nadskup koji je element od Q. Definiramo susret od P i Q, u oznaci $P \wedge Q$, kao $\{A \cap B : A \in P \wedge B \in Q\} \setminus \{\emptyset\}$. Dokažite:

1. $\preceq$ je relacija refleksivnog parcijalnog uređaja na skupu svih particijā istog skupa;
2. za particije istog skupa P i Q, njihov susret $P \wedge Q$ je infimum skupa $\{P, Q\}$ s obzirom na relaciju $\preceq$;
3. ako su R i S relacije ekvivalencije na skupu U, tada je $U/_{R\cap S} = U/_R \wedge U/_S$.

3.2 Totalno uređeni skupovi

141. Neka je $(A, <)$ konačan neprazan totalno uređen skup. Dokažite da A ima najmanji i najveći element.

R141. Specijalno, $(A,<)$ je parcijalno uređen skup, pa po zadatku 137 ima neki minimalni element x. No kako je uređaj totalan, x mora biti usporediv sa svim ostalim elementima u A, dakle mora biti manji od njih (veći ne smije biti jer je minimalan). To znači da je x najmanji element u A.

Jednako tako, A ima i neki maksimalni element y, i kao gore se vidi da y tada mora biti najveći element u A.

142. Neka je s $\mathbb{Q}[X]$ označen skup polinoma s racionalnim koeficijentima. Na skupu $A := \mathbb{Q}[X] \setminus \mathbb{Q}$ definiramo relaciju $\prec$ na ovaj način:

$$a \prec b \text{ ako i samo ako postoji } c \in A \text{ takav da je } b = a \cdot c.$$

Dokažite da je relacija $\prec$ strogi parcijalni uređaj. Je li $\prec$ i totalni uređaj?

143. Postoji li familija $\{A_x : x \in \mathbb{R}\}$ podskupova od $\mathbb{N}$, za koju vrijedi $x < y \Rightarrow A_x \subset A_y$?

R143. Postoji. Da bismo to dokazali, prvo primijetimo da je sām $\mathbb{R}$ (zadan preko Dedekindovih rezova) upravo familija takvih podskupova, samo od $\mathbb{Q}$ umjesto od $\mathbb{N}$. Sada, ako je $q : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ neka bijekcija (koja postoji jer su $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{N}$ ekvipotentni), označimo $A_x := q[x]$.

Kako je q bijekcija (dovoljno je da bude injekcija), traženo svojstvo se čuva. Doista, $x \subseteq y$ svakako povlači $q[x] \subseteq q[y]$, a ako je $t \in y \setminus x$, onda je zbog injektivnosti $q(t) \in q[y] \setminus q[x]$.

144. Neka je A neki neprazan skup. Označimo s $PU(A)$ skup svih refleksivnih parcijalnih uređaja na A, parcijalno uređen relacijom $\subset$. Dokažite da je najmanji element u $PU(A)$ upravo I_A, a maksimalni elementi u $PU(A)$ su točno svi (refleksivni) totalni uređaji na A.

R144. Dijagonala $\{(a,a) : a \in A\}$ je svakako refleksivni parcijalni uređaj na A. Kako svaka refleksivna relacija sadrži dijagonalu, specijalno svaki refleksivni parcijalni uređaj sadrži dijagonalu, odnosno dijagonala je najmanji element u $PU(A)$.

Ako je $\preceq$ totalni uređaj na A, očito ne postoji nijedan parcijalni uređaj na A koji je pravi nadskup od $\preceq$: ako bismo u $\preceq$ dodali neki par (a,b) koji već nije tamo, to bi značilo $a \not\preceq b$, odnosno zbog totalnosti $b \prec a$. No tada gubimo antisimetričnost, jer su u tako dobivenom „uređaju" i (a,b) i (b,a), ali su a i b različiti. Dakle, totalni uređaji na A su maksimalni elementi u $PU(A)$.

Dokažimo i obrnuto: ako $\preceq$ *nije* totalni uređaj na A, tada nije maksimalan element u $PU(A)$. Kako $\preceq$ nije totalan, postoje dva elementa od A, nazovimo ih a i b, koji su neusporedivi u $\preceq$. Označimo sa $\sqsubset$ skup svih parova (c,d), pri čemu je $c \preceq a$ i $b \preceq d$. Relacija $\sqsubset$ ima sljedeća svojstva:

- Nikada nije $x \sqsubset y \sqsubset z$. Naime, iz $x \sqsubset y$ imamo $x \preceq a$ i $b \preceq y$, a iz $y \sqsubset z$ imamo $y \preceq a$ i $b \preceq z$. Po tranzitivnosti tada bismo iz $b \preceq y \preceq a$ imali $b \preceq a$, što je u kontradikciji s neusporedivošću od a i b.
- Ako je $x \preceq y \sqsubset z$ (ili, analogno, $x \sqsubset y \preceq z$), tada je i $x \sqsubset z$. To se lako vidi: $y \sqsubset z$ znači $y \preceq a \land b \preceq z$, pa po tranzitivnosti od $\preceq$ iz $x \preceq y \preceq a$ imamo i $x \preceq a$, odnosno $x \sqsubset z$.

Primijetimo da zbog refleksivnosti od $\preceq$, imamo $a \preceq a \wedge b \preceq b$, pa je svakako $a \sqsubset b$. To znači da u $\sqsubset$ imamo barem jedan par koji nije u $\preceq$, pa je $(\preceq') := (\preceq) \cup (\sqsubset)$ pravi nadskup od $\preceq$. Ako još dokažemo da je $(\preceq') \in PU(A)$ (odnosno, da je refleksivni parcijalni uređaj na A), imat ćemo nemaksimalnost od $\preceq$ u $PU(A)$.

Refleksivnost od $\preceq'$ slijedi iz refleksivnosti od $\preceq$. Za antisimetričnost, neka je $x \preceq' y \preceq' x$. Kako svaki par iz $\preceq'$ mora biti iz $\preceq$ ili iz $\sqsubset$, imamo 4 mogućnosti:

- $x \preceq y \preceq x$. Tada iz antisimetričnosti od $\preceq$ imamo $x = y$.
- $x \preceq y \sqsubset x$. Iz gornjeg svojstva relacije $\sqsubset$ imamo $x \sqsubset x$, što je nemoguće jer bismo tada mogli imati $x \sqsubset x \sqsubset x$.
- $x \sqsubset y \preceq x$. Analogno dobivamo $x \sqsubset x$, što je nemoguće.
- $x \sqsubset y \sqsubset x$. I ovo je nemoguće prema svojstvima od $\sqsubset$.

Za tranzitivnost, neka je $x \preceq' y \preceq' z$. Opet imamo 4 slučaja:

- $x \preceq y \preceq z$. Po tranzitivnosti od $\preceq$ imamo $x \preceq z$, pa time i $x \preceq' z$.
- $x \preceq y \sqsubset z$. Po svojstvima relacije $\sqsubset$ imamo $x \sqsubset z$, pa i $x \preceq' z$.
- $x \sqsubset y \preceq z$. Također, dobijemo $x \sqsubset z$.
- $x \sqsubset y \sqsubset z$. Ovo je nemoguće (kao gore).

145. Neka su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ totalno uređeni skupovi i neka B ima najmanji element $\perp$. Definirajmo uređen skup $(B^{(A)}, \lhd)$ tako da je

$$B^{(A)} = \{(f : A \to B) : f(x) = \perp \text{ za sve osim konačno mnogo } x \in A\}$$
$$f \lhd g :\Longleftrightarrow \text{ postoji } x_0 := \max\{x \in A : f(x) \neq g(x)\}, \text{ i vrijedi } f(x_0) \prec g(x_0).$$

Dokažite da je skup $(B^{(A)}, \lhd)$ totalno uređen.

R145.

- irefleksivnost: pretpostavka $f \lhd f$ bi značila da postoji $\max\{x \in A : f(x) \neq f(x)\} = \max \emptyset$, što je očito kontradikcija.
- tranzitivnost: Neka je $f \lhd g$ i $g \lhd h$. To znači da postoje x_0 i y_0 iz A, takvi da je $f(x_0) \prec g(x_0)$, $f(x) = g(x)$ za sve $x > x_0$, $g(y_0) \prec h(y_0)$, te $g(y) = h(y)$ za sve $y > y_0$. Skup A je totalno uređen, pa su x_0 i y_0 usporedivi. Razlikujemo tri slučaja:

$x_0 = y_0$ Tada je $f(x_0) \prec g(x_0) = g(y_0) \prec h(y_0) = h(x_0)$, pa po tranzitivnosti relacije $\prec$ zaključujemo $f(x_0) \prec h(x_0)$. Također, za sve $x > x_0 = y_0$ je $f(x) = g(x) = h(x)$, što zajedno s $f(x_0) \prec h(x_0)$ daje $f \lhd h$.

$x_0 < y_0$ Tada je $f(x) = g(x)$ za sve $x > x_0$, pa specijalno i za y_0: dakle, $f(y_0) = g(y_0) \prec h(y_0)$, te za sve $y > y_0 > x_0$ vrijedi $f(y) = g(y) = h(y)$. Dakle, opet imamo $f \lhd h$.

$y_0 < x_0$ Ovaj slučaj je analogan prethodnom.

- totalnost: Ako su f i g dvije proizvoljne (različite) funkcije iz $B^{(A)}$, postoji $x \in A$ u kojem se razlikuju: $f(x) \neq g(x)$. Skup svih takvih x je konačan (ako sa $Supp(f)$ označimo konačan skup onih elemenata iz A koji se ne preslikavaju u $\perp$, tada se lako vidi da je naš skup podskup unije $Supp(f) \cup Supp(g)$), pa po zadatku 141 ima najveći element; označimo ga s x_0. Usporedbom $f(x_0)$ i $g(x_0)$ (moraju biti različiti) s obzirom na totalni uređaj $\prec$ dobivamo $f \lhd g$ ili $g \lhd f$.

146. Dokažite da ne postoji proširenje relacije $<$ sa skupa $\mathbb{R}$ na skup $\mathbb{C}$ koje bi imalo sljedeća svojstva:

a) za sve z vrijedi točno jedno od: $z = 0$, $z < 0$ ili $0 < z$;

b) ako je $0 < z_1$ i $0 < z_2$ tada je $0 < z_1 \cdot z_2$;

c) ako je $z_1 < 0$ i $z_2 < 0$ tada je $z_1 + z_2 < 0$.

R146. Pretpostavimo da takvo proširenje postoji, i označimo ga isto s $<$. Prema (a), promotrimo slučajeve za $z = i$, te za $z = -i$. Ako je $0 < i$ tada zbog uvjeta (b) imamo $0 < i \cdot i$, tj. $0 < -1$, što je kontradikcija s uvjetom (a). Naime, već u $\mathbb{R}$ je $-1 < 0$, a ne može biti oboje.

Dakle, mora biti $i < 0$. Potpuno analogno dobijemo da je i $-i < 0$. Primjenom uvjeta (c) na to dvoje dobivamo $0 < 0$, što je u kontradikciji s (a) (jer je $0 = 0$).

147. Neka je $(A, <)$ totalno uređen skup. Dokažite da svaki niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u A sadrži monoton podniz.

R147. Ova tvrdnja se dokazuje u Matematičkoj analizi 1 za skup realnih brojeva. Isti dokaz prolazi u proizvoljnom totalno uređenom skupu.

Nazovimo član zadanog niza a_i *dominantnim* ako je veći od svih članova nakon njega ($a_j < a_i$ u A za svaki $j > i$ u $\mathbb{N}$). Ako u nizu ima beskonačno mnogo dominantnih članova, oni tvore padajući podniz (svaki član u podnizu je veći od svih članova nakon njega, pa tako i od sljedećeg dominantnog člana) traženog niza.

S druge strane, ako dominantnih članova ima samo konačno mnogo, postoji zadnji takav: neka je to a_d. Član a_{d+1} tada nije dominantan, pa postoji nakon njega neki član a_{n_1} veći ili jednak od a_{d+1}. No a_{n_1} također nije dominantan (jer je nakon zadnjeg dominantnog a_d), pa nakon njega postoji veći ili jednak element a_{n_2}. Tako induktivno možemo izgraditi (ne nužno strogo) rastući podniz $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$: $n_0 := d + 1$, a n_{k+1} je prvi indeks nakon n_k, člana niza koji je veći ili jednak a_{n_k} (takav postoji jer a_{n_k} nije dominantni član).

Vidimo da u svakom slučaju postoji monoton podniz od $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

148. Neka je $(A, <)$ totalno uređen skup. Dokažite: ako je A beskonačan i svaki početni komad od A je konačan, onda je $(A, <)$ sličan s $(\mathbb{N}, <)$.

R148. Promotrimo preslikavanje f koje svakom elementu od A pridružuje kardinalnost početnog komada određenog tim elementom: $f(a) := \mathfrak{K}\big(p_A(a)\big)$. Kako je svaki početni komad u A konačan, f je zaista preslikavanje s A u $\mathbb{N}$.

Ako je $a < b$ u skupu A, svakako je svaki element manji od a, manji i od b, pa je $p_A(a) \subseteq p_A(b)$. No zbog irefleksivnosti je $a \not\in p_A(a)$, a iz $a < b$ imamo $a \in p_A(b)$, te je $p_A(a)$ pravi podskup od $p_A(b)$. Kako su to konačni skupovi, mora biti $\Re\big(p_A(a)\big) < \Re\big(p_A(b)\big)$, odnosno $f(a) < f(b)$. Dakle, f čuva (strogi) uređaj, pa specijalno imamo i da je injekcija.

Da bismo dokazali da je f sličnost (i time da je A sličan s $\mathbb{N}$), još je jedino preostalo dokazati surjektivnost: neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Budući da je A beskonačan, a f injekcija, slika $\operatorname{rng}(f)$ je također beskonačna, pa nakon k postoji neki $l \in \mathbb{N}$ u slici od f; odnosno, postoji $b \in A$ takav da je $l = \Re\big(p_A(b)\big) > k$. Promotrimo restrikciju od f na $p_A(b)$. Za svaki $a \in p_A(b)$ iz $a < b$ dobivamo $f(a) < f(b) = l$, odnosno $f|_{p_A(b)}$ je preslikavanje između $p_A(b)$ i $l = \{0, 1, \ldots, l-1\}$.

To preslikavanje je injekcija (kao restrikcija injekcije f), a domena i kodomena su joj ekvipotentni konačni skupovi ($\Re\big(p_A(b)\big) = f(b) = l = \Re(l)$), pa je bijekcija. Specijalno je surjekcija, pa poprima sve vrijednosti između 0 i $l-1$, među njima i k. Kako restrikcija od f poprima vrijednost k, tu vrijednost poprima i f, čime smo dokazali da je f surjekcija (jer je k bio proizvoljno izabran element od $\mathbb{N}$).

149. Neka je $\prec$ leksikografski uređaj na $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ i $<$ standardni uređaj na $\mathbb{Q}$. Dokažite da je $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \prec) \simeq (\mathbb{Q}, <)$.

R149. Prema teoremu o uređajnoj karakterizaciji skupa $\mathbb{Q}$, dovoljno je dokazati da je $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ prebrojiv, te da je uz leksikografski uređaj gust i da nema ni najmanjeg ni najvećeg elementa.

Prebrojivost: $k(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = k(\mathbb{Q}) \cdot k(\mathbb{Q}) = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Nepostojanje najmanjeg i najvećeg elementa: za proizvoljni $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, postoji leksikografski manji element $(a-1, 0)$. Također postoji i leksikografski veći element $(a+1, 0)$. Dakle, (a, b) nije ni najmanji ni najveći element.

Gustoća: neka su (a, b) i (c, d) elementi od $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, takvi da vrijedi $(a, b) \prec (c, d)$. Po definiciji leksikografskog uređaja, to znači $a < c$ ili $a = c \wedge b < d$. Ako je $a < c$, tada je $a < \frac{a+c}{2} < c$, pa je i $(a, b) \prec (\frac{a+c}{2}, 0) \prec (c, d)$. Ako je pak $a = c$ i $b < d$, između b i d se nalazi $\frac{b+d}{2}$, pa je $(a, \frac{b+d}{2})$ između (a, b) i $(a, d) = (c, d)$.

150. Dokažite da skupovi $\langle 0, 1\rangle$ i $[0, 1\rangle$ nisu slični.

R150. Prvo dokažimo da je postojanje najmanjeg elementa invarijanta sličnosti. Neka su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ totalno uređeni skupovi, $f : A \to B$ sličnost između njih, te A ima najmanji element a. Pokažimo da je $f(a)$ tada najmanji element od B. Neka je $b \in B \setminus \{f(a)\}$ proizvoljan. Kako je f bijekcija, označimo $c := f^{-1}(b) \in A$. Jer je $b \neq f(a)$, mora biti $c \neq a$, pa je $a < c$ (jer je a najmanji element od A). No tada po sličnosti, $f(a) \prec f(c) = b$, dakle $f(a)$ je najmanji element u B. Zaključujemo: ako su dva skupa slični, te u jednom postoji najmanji element, tada i u drugom postoji najmanji element.

Sada je lako vidjeti da $\langle 0, 1\rangle$ i $[0, 1\rangle$ nisu slični: $[0, 1\rangle$ ima najmanji element 0, no $\langle 0, 1\rangle$ nema najmanji element.

151. Postoji li (konačan, beskonačan) totalno uređen skup $(A,<)$ koji je sličan svom dualu $(A,>)$?

R151. Naravno. Na primjer, na jednočlanom skupu $\{0\}$ su i uređaj $<$ i $<^*$ prazni, te je $\{0 \mapsto 0\}$ trivijalno sličnost.

Za beskonačan primjer, preslikavanje $x \mapsto -x$ je sličnost između $(\mathbb{Z},<)$ i $(\mathbb{Z},>)$: bijektivnost slijedi iz involutornosti (preslikavanje je samo sebi inverz), a ako je $x<y$, tada je $-x>-y$.

152. Dokažite da skupovi $(\mathbb{Q},<)$ i $(\mathbb{Z},<)$ nisu slični. Mogu li se skupovi $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}$ urediti tako da budu slični?

R152. Dokažimo prvo da je gustoća invarijanta sličnosti. Ako su $(A,<)$ i $(B,\prec)$ totalno uređeni skupovi, $f : A \to B$ sličnost, te A gust, treba dokazati da je B gust. Ako su b_1 i b_2 proizvoljni elementi od B takvi da je $b_1 \prec b_2$, označimo $a_1 := f^{-1}(b_1)$, $a_2 := f^{-1}(b_2)$. Kako je f^{-1} također sličnost, i $b_1 \prec b_2$, mora biti i $a_1 < a_2$, pa zbog gustoće od A, između njih postoji neki element $a_3 \in A$. Sad po sličnosti f, iz $a_1 < a_3 < a_2$ zaključujemo $b_1 < f(a_3) < b_2$, pa između b_1 i b_2 postoji element $f(a_3) \in B$. To znači da je B gust.

Sada se lako vidi da $(\mathbb{Q},<)$ i $(\mathbb{Z},<)$ nisu slični: $\mathbb{Q}$ je gust — ako je $q_1 < q_2$, između svakako postoji $\frac{q_1+q_2}{2} \in \mathbb{Q}$. No $\mathbb{Z}$ nije gust: između $0 \in \mathbb{Z}$ i $1 \in \mathbb{Z}$ nema nijednog cijelog broja.

Kako je $k(\mathbb{Q}) = k(\mathbb{Z}) = \aleph_0$, svakako postoji neka bijekcija $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$. To znači da na $\mathbb{Q}$ možemo *definirati* uređaj $\prec$ pomoću $a \prec b :\Longleftrightarrow g(a) < g(b)$. Tada je očito g sličnost između $(\mathbb{Q},\prec)$ i $(\mathbb{Z},<)$. Dakle, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}$ se mogu urediti tako da budu slični (zapravo samo treba preurediti jedan od ta dva skupa).

153. Neka je $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sličnost. Dokažite da je tada f translacija, tj. postoji $n \in \mathbb{Z}$ tako da je $f(x) = x + n$.

R153. Označimo $n := f(0) \in \mathbb{Z}$. Dokažimo prvo (indukcijom po m) da je za sve prirodne m, $f(m) = m + n$. Baza je definicija od n: $f(0) = n = 0 + n$. Pretpostavimo da je za neki $k \in \mathbb{N}$, $f(k) = k + n$. U domeni je $k < k+1$, te između k i $k+1$ ne postoji nijedan cijeli broj. Kako je f sličnost, $f(k+1)$ mora biti veće od $f(k) = k+n$, te između $f(k+1)$ i $k+n$ ne smije biti nijedan cijeli broj. Dakle, $f(k+1)$ mora biti neposredni sljedbenik od $k+n$, a to je $k+n+1 = (k+1)+n$.

Potpuno analogno, možemo vidjeti da je i $f(-m) = -m + n$ (indukcijom po m). Dakle, za sve cijele brojeve x je $f(x) = x + n$.

154. Dokažite da je svaki prebrojiv totalno uređen skup sličan nekom podskupu skupa $\mathbb{Q}$.

R154. Neka je $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$ neki prebrojiv totalno uređen skup (naravno, $i < j$ ne mora povlačiti $a_i < a_j$). Definiramo funkciju $f : A \to \mathbb{Q}$ koja će biti tražena sličnost. Neka je $f(a_0) := 0$. Prepostavimo da ja za neki $n \in \mathbb{N}$ funkcija f definirana za sve a_i, $i \leq n$. Vrijednost funkcije na a_{n+1} definiramo po slučajevima:

a) Neka je $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_k} < a_{n+1} < a_{i_{k+1}} < \ldots < a_{i_n}$, gdje su i_j svi elementi skupa $\{1,\ldots,n\}$. Tada definiramo $f(a_{n+1}) := \frac{f(a_{i_k})+f(a_{i_{k+1}})}{2}$. Lako je vidjeti da vrijedi $f(a_{i_k}) < f(a_{n+1}) < f(a_{i_{k+1}})$.

b) Neka je a_{n+1} veći od a_i za sve $i \in \{0,\ldots,n\}$. Definiramo $f(a_{n+1}) := 1+\max_{0\le j\le n} f(a_{i_j})$. Lako je vidjeti da je $f(a_{n+1})$ veći od $f(a_i)$, za sve $i \in \{0,\ldots,n\}$.

c) Analogno, ako je a_{n+1} manji od a_i za sve $i \in \{0,\ldots,n\}$. Tada definiramo $f(a_{n+1}) := \min_{0\le j\le n} f(a_{i_j}) - 1$. Opet, lako je vidjeti da je tada $f(a_{n+1})$ manji od $f(a_i)$, za sve $i \in \{0,\ldots,n\}$.

Kako smo cijelo vrijeme čuvali uređaj, i u svakom koraku pazili da ne pridružimo element koji je već pridružen nekom prijašnjem elementu od A, funkcija f je sličnost između skupova A i $\operatorname{rng} f \subseteq \mathbb{Q}$.

Primijetite kako gornje rješenje koristi istu ideju kao i dokaz teorema o uređajnoj karakterizaciji skupa $\mathbb{Q}$. Jedina razlika je što ne konstruiramo funkciju u oba smjera simultano, već samo u jednom. Tako ne dobivamo surjektivnost, već samo injektivnost, koja nam je dovoljna za dokaz tvrdnje.

155. Jesu li skupovi $\mathbb{R}$, $\sin[\mathbb{R}]$ i $\operatorname{tg}[\mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\}]$ međusobno slični?

R155. Skup $\sin[\mathbb{R}]$ je slika funkcije sinus, dakle segment $[-1,1]$, koji očito nije sličan s $\mathbb{R}$: na primjer, ima najmanji element -1, dok $\mathbb{R}$ nema najmanji element.

Jednako tako, ovaj treći skup je slika funkcije tangens (u uglatim zagradama je upravo prirodna domena tangensa), što je čitav $\mathbb{R}$ jer je tangens surjekcija. $\mathbb{R}$ je trivijalno sličan s $\mathbb{R}$ (identiteta je sličnost), a već smo vidjeli da nije sličan s $[-1,1]$. Dakle, konačan odgovor je: prvi i treći skup su slični, a drugi nije sličan njima.

156. Koji su od sljedećih skupova, uz standardni uređaj, međusobno slični, a koji nisu? Obrazložite odgovore.

a) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus [0,1\rangle$

b) $[0,1\rangle$, $[0,+\infty\rangle$, $\mathbb{Q} \cap [0,1\rangle$

c) $\mathbb{P}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}_0^+$ (s $\mathbb{P}$ je označen skup svih prostih brojeva)

d) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{A}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ (s $\mathbb{A}$ je označen skup svih realnih algebarskih brojeva)

R156.

a) $\mathbb{Q}$ je prebrojiv, dok $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \setminus [0,1\rangle$ nisu. Kako sličnost mora biti bijekcija, slični skupovi moraju biti ekvipotentni, pa $\mathbb{Q}$ sigurno ne može biti sličan s preostala dva skupa. Ta dva skupa pak jesu slični: preslikavanje f, zadano formulom

$$f(x) = \begin{cases} x & , x < 0 \\ x+1 & , x \ge 0 \end{cases} .$$

je sličnost između $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \setminus [0,1\rangle$.

b) Kao u a), $\mathbb{Q}\cap[0,1\rangle$ ne može biti sličan neprebrojivim skupovima $[0,1\rangle$ i $[0,+\infty\rangle$. Ta dva skupa jesu slični: primjer sličnosti između $[0,1\rangle$ i $[0,+\infty\rangle$ je preslikavanje $x\mapsto\frac{x}{1-x}$.

c) Skup $\mathbb{Q}_0^+$ je gust, dok $\mathbb{P}$ i $\mathbb{N}$ nisu, pa im ne može biti sličan. $\mathbb{P}$ je sličan s $\mathbb{N}$, što možemo provjeriti koristeći uređajnu karakterizaciju od $\mathbb{N}$ (zadatak 148): prostih brojeva ima beskonačno mnogo, dok je svaki početni komad $p_{\mathbb{P}}(n)$ podskup početnog komada $p_{\mathbb{N}}(n)$, dakle konačan.

d) Skup $\mathbb{R}\setminus\mathbb{A}$ je neprebrojiv, dakle nije sličan ni $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$ ni $\mathbb{A}$ (koji su prebrojivi). Ta dva skupa su slični, jer su oba slična $\mathbb{Q}$ po uređajnoj karakterizaciji: prebrojivi su, gusti, i bez najmanjeg i najvećeg elementa. Jedino ne potpuno trivijalno svojstvo je gustoća od $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$, pa ga dokažimo. Ako su x i y elementi od $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$ takvi da je $x<y$, razlikujemo dva slučaja:

   - Ako u intervalu $\langle x,y\rangle$ nema nijedan prirodan broj, tada možemo uzeti $\frac{x+y}{2}$ kao broj iz $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$ koji je između x i y.
   - Ako postoje prirodni brojevi između x i y, tada postoji i najmanji takav (zbog dobre uređenosti od $\mathbb{N}$), označimo ga s n. Tada je $\frac{x+n}{2}$ između x i n, dakle i između x i y, i svakako nije prirodan broj, jer bi tada bio prirodan broj iz intervala $\langle x,y\rangle$, manji od n.

157. Na skupu $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ definiramo uređaj na ovaj način:

$$(x_1,y_1)\preceq(x_2,y_2)\qquad\text{ako i samo ako}\qquad y_1<y_2\quad\text{ili}\quad(\,y_1=y_2\quad\text{i}\quad x_1\le x_2\,)\,.$$

Dokažite da totalno uređeni skup $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\preceq)$ nije sličan s $(\mathbb{R},\le)$.

158. Dokažite da su svi prebrojivi podskupovi od $\mathbb{R}$, koji imaju svojstvo da svaki interval skupa $\mathbb{R}$ sadrži bar jednu njihovu točku, međusobno slični.

R158. Koristit ćemo uređajnu karakterizaciju skupa $\mathbb{Q}$, i dokazati da su svi oni slični s $(\mathbb{Q},<)$. Prebrojivost je zadana u zadatku.

Ako je $A\subseteq\mathbb{R}$ neki takav skup, te $a\in A$ proizvoljan, interval $\langle a-2,a-1\rangle$ sadrži bar jednu točku od A, koja je onda manja od a, pa A nema najmanji element. Jednako tako, promatrajući interval $\langle a+1,a+2\rangle$, zaključujemo da A nema ni najveći element.

Ako su x i y elementi iz A takvi da je $x<y$, interval $\langle x,y\rangle$ (u $\mathbb{R}$) sadrži bar jednu točku od A, pa je A gust. Vidimo da su ispunjeni uvjeti teorema o uređajnoj karakterizaciji od $\mathbb{Q}$, pa su svi takvi skupovi slični s $(\mathbb{Q},<)$, te su i međusobno slični.

159. Dokažite da je skup realnih transcendentnih brojeva sličan sa skupom realnih iracionalnih brojeva.

R159. Uputa: Promotrimo prvo skup algebarskih realnih brojeva $\mathbb{A}$. To je prebrojiv skup, i nadskup od $\mathbb{Q}$, pa svaki interval u $\mathbb{R}$ sadrži bar jednu njegovu točku. Po zadatku 158, $\mathbb{A}$

je sličan s $\mathbb{Q}$, pa postoji sličnost $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{A}$. Pomoću f sada možemo definirati sličnost $g : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, formulom

$$g(x) := \sup\{f(q) : q \in \mathbb{Q} \land q < x\}.$$

(Relativno lako je vidjeti da g čuva uređaj, i time da je injektivna — na primjer, kao u sljedećem zadatku. Teže je vidjeti da je slika od g upravo $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$.)

160. Neka je $(A, \prec)$ totalno uređen skup koji sadrži prebrojiv podskup koji je gust u A. Dokažite da je tada A sličan nekom podskupu skupa $\mathbb{R}$ (uređenom standardnim uređajem).

R160. Neka je B prebrojiv podskup od A koji je gust u A. Prema zadatku 154, postoji sličnost $g : B \to Q$, za neki $Q \subseteq \mathbb{Q}$. Sada definirajmo preslikavanje $f : A \to \mathbb{R}$, formulom

$$f(a) := \sup\{g(b) : b \in B \land b < a\}.$$

Dokažimo da f čuva strogi uređaj: neka je $a_1 \prec a_2$ u A. Kako je B gust u A, postoji $b_2 \in B$ takav da je $a_1 \prec b_2 \prec a_2$. Po definiciji $f(a_2)$, to je supremum skupa koji sadrži $g(b_2)$, pa imamo $f(a_2) \geq g(b_2)$. S druge strane, između a_1 i b_2 postoji novi element od B, označimo ga s b_1. Svaki $b \in B$ manji od a_1 je manji i od b_1, te je $g(b) < g(b_1)$. To znači da je $g(b_1)$ gornja međa za skup čiji supremum je $f(a_1)$, pa kako je supremum najmanja gornja međa, vrijedi $f(a_1) \leq g(b_1)$.

Iz $b_1 \prec b_2$ dobivamo po sličnosti g, $g(b_1) < g(b_2)$. Uklopivši to u gornje nejednakosti, $f(a_1) \leq g(b_1) < g(b_2) \leq f(a_2)$, dobivamo $f(a_1) < f(a_2)$, odnosno f čuva uređaj. Sada ako je $a_1 \neq a_2$ u A, po totalnosti je ili $a_1 \prec a_2$ (pa je $f(a_1) < f(a_2)$), ili $a_2 \prec a_1$ (pa je $f(a_2) < f(a_1)$). U svakom slučaju je $f(a_1) \neq f(a_2)$, pa je f injekcija. To znači da je $Rng(f)$ podskup od $\mathbb{R}$, i f je sličnost između A i tog skupa.

161. Jesu li skupovi $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ i $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, uređeni antileksikografski, slični? Ako jesu, nađite sličnost između njih. Ako nisu, nađite invarijantu sličnosti po kojoj se razlikuju.

R161. Prvo dokažimo da je „svaki neprazni otvoreni interval je neprebrojiv” invarijanta sličnosti. Ako su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ slični totalno uređeni skupovi, sa sličnošću $f : A \to B$, te je u A svaki neprazni otvoreni interval neprebrojiv, trebamo dokazati da u B vrijedi ista tvrdnja. Neka je $\langle b_1, b_2 \rangle$ proizvoljni neprazni otvoreni interval u B. Lako se vidi da je $I := \langle f^{-1}(b_1), f^{-1}(b_2) \rangle$ neprazni otvoreni interval u A, te da je $f|_I$ bijekcija između I i $\langle b_1, b_2 \rangle$. Kako je I neprebrojiv, i $\langle b_1, b_2 \rangle$ mora biti takav (bijekcija čuva kardinalnost).

Sada primijetimo da $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ ima to svojstvo: neka su (r_1, q_1) i (r_2, q_2) proizvoljni elementi od $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ takvi da je $(r_1, q_1) < (r_2, q_2)$ u antileksikografskom uređaju. Imamo dva slučaja:

- $q_1 < q_2$. Tada interval $\langle (r_1, q_1), (r_2, q_2) \rangle$ ima neprebrojiv podskup $\langle r_1, +\infty \rangle \times \{q_1\}$, pa je i sām neprebrojiv.
- $q_1 = q_2 \land r_1 < r_2$. Tada je taj interval oblika $\langle r_1, r_2 \rangle \times \{q_1\}$, ekvipotentan s intervalom $\langle r_1, r_2 \rangle$ u $\mathbb{R}$, dakle neprebrojiv.

No $\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$ nema to svojstvo: neprazan otvoreni interval $\langle(0,0),(1,0)\rangle$ u $\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$ je ekvipotentan s intervalom $\langle 0,1\rangle$ u $\mathbb{Q}$, dakle prebrojiv skup. Zaključujemo da $\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$ nisu slični.

162. Neka je na skupu $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ zadana relacija

$$A \sqsubset B :\Longleftrightarrow (\exists n \in B\setminus A)(A\cap n = B\cap n).$$

Dokažite da je $\big(\mathscr{P}(\mathbb{N}),\sqsubset\big)$ (irefleksivno) totalno uređen skup.

R162.

- irefleksivnost: Pretpostavimo da je $A\subseteq\mathbb{N}$ takav da je $A\sqsubset A$. To bi značilo da postoji $n\in A\setminus A=\emptyset$, što je očito nemoguće.
- tranzitivnost: Neka je $A\sqsubset B$ i $B\sqsubset C$. To znači da postoje $m\in B\setminus A$ takav da je $A\cap m = B\cap m$, i $n\in C\setminus B$ takav da je $B\cap n = C\cap n$. Kako je $m\in B$, a $n\notin B$, zaključujemo $m\neq n$, a kako su m i n prirodni brojevi, vrijedi $m<n$ (dakle $m\subset n$, također i $m\in n$) ili $m>n$ (dakle $m\supset n$, pa i $m\ni n$). Napomena: ovo nije trivijalno simetrična situacija, dakle ne možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti jednu od tih mogućnosti — trebamo dokazati $A\sqsubset C$ za svaku od njih.

  U prvom slučaju je $m = n\cap m$, pa je

  $$C\cap m = C\cap(n\cap m) = (C\cap n)\cap m = (B\cap n)\cap m = B\cap(n\cap m) = B\cap m = A\cap m.$$

  Također vrijedi $m\in B\cap n = C\cap n\subseteq C \wedge m\notin A$, dakle postoji $m\in C\setminus A$ takav da je $C\cap m = A\cap m$, odnosno vrijedi $A\sqsubset C$.

  U drugom slučaju je $n = m\cap n$, pa je

  $$C\cap n = B\cap n = B\cap(m\cap n) = (B\cap m)\cap n = (A\cap m)\cap n = A\cap(m\cap n) = A\cap n.$$

  Sada za n vrijedi $n\in C$, i još samo treba dokazati $n\notin A$. Kad bi bilo $n\in A$, zbog $n\in m$ bi vrijedilo $n\in A\cap m = B\cap m\subseteq B$, što je nemoguće jer je $n\in C\setminus B$. Dakle, postoji $n\in C\setminus A$ za koji je $C\cap n = A\cap n$, pa je opet $A\sqsubset C$.
- totalnost: Za proizvoljne različite podskupove od $\mathbb{N}$, $A\neq B$, pogledajmo simetričnu razliku $A\triangle B\subseteq\mathbb{N}$. Ako su A i B različiti, tada je $A\triangle B$ neprazan (kontrapozicija aksioma ekstenzionalnosti) podskup od $\mathbb{N}$, pa zbog dobre uređenosti od $\mathbb{N}$ ima najmanji element — označimo ga s x. Dakle, $x\in A\triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$, pa zbog simetrije bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x\in B\setminus A$. Ako je sada $y\in x$ proizvoljan, tada je $y<x$, pa $y\notin A\triangle B$ (jer je x najmanji takav). To znači da je $y\in A\Leftrightarrow y\in B$ (za $y\in x$), pa je $A\cap x = B\cap x$. Dakle, postoji $x\in B\setminus A$ takav da je $A\cap x = B\cap x$, te je $A\sqsubset B$, odnosno A i B su usporedivi.

Dodatni zadatak: je li $\big(\mathscr{P}(\mathbb{N}),\sqsubset\big)\simeq([0,1],<)$?

163. Neka je $(X,\prec)$ totalno uređen skup, i $A\subseteq X$. Za A kažemo da je *inicijalni segment* od X ako vrijedi

$$(\forall x\in X)(\forall a\in A)(x\prec a\to x\in A)$$

(odnosno, A je zatvoren nadolje u smislu uređaja $\prec$). Dokažite da postoji prebrojiv totalno uređen skup koji ima neprebrojivo mnogo inicijalnih segmenata.

R163. Skup $\mathbb{Q}$ jest prebrojiv, i totalno uređen standardnim uređajem. Svaki realni broj (kao Dedekindov rez) je inicijalni segment od $\mathbb{Q}$, pa ih sigurno ima neprebrojivo mnogo.

Dodatno pitanje: pored realnih brojeva, koje još inicijalne segmente $\mathbb{Q}$ ima?

164. Neka su $<$ i $\prec$ totalni uređaji na skupu S. Nađite nužne i dovoljne uvjete da bi i $< \circ \prec$ bio totalni uređaj na S. (Podrazumijevamo irefleksivne uređaje.)

R164. Dokažimo da će $< \circ \prec$ biti totalni uređaj na S ako i samo ako je $(<) = (\prec)$, i taj uređaj (jedan te isti) je gust na S. U jednom smjeru, ako je uređaj $<$ gust na S i $(<) = (\prec)$, tada je lako vidjeti da je $(< \circ \prec) = (< \circ <) = (<)$, dakle totalni uređaj na S. Jedna inkluzija slijedi iz tranzitivnosti: ako je $x(< \circ <)y$, postoji $z \in S$ takav da je $x < z < y$, pa je i $x < y$. Druga inkluzija slijedi iz gustoće: ako je $x < y$, postoji $z \in S$ takav da je $x < z < y$, pa je $x(< \circ <)y$.

U drugom smjeru, razlikujemo dva slučaja: kada $<$ i $\prec$ nisu jednaki, i kada jesu jednaki, ali ne gusti. U svakom od tih slučajeva trebamo vidjeti da njihova kompozicija ne može biti totalni uređaj na S.

Ako je $(<) \neq (\prec)$, postoji uređeni par (x, y) koji je u jednom, ali nije u drugom uređaju. Kako su oba uređaja irefleksivni, mora biti $x \neq y$. Bez velikog smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x < y$, ali $x \not\prec y$. No kako je $\prec$ totalni uređaj, a $x \neq y$, mora biti $y \prec x$. To znači da je $y \prec x < y$, pa je $y(< \circ \prec)y$, odnosno $< \circ \prec$ nije irefleksivan.

Ako je $(<) = (\prec)$, i taj uređaj nije gust, tada postoje x i y iz S takvi da je $x < y$, ali ne postoji $z \in S$ takav da je $x < z < y$. To znači da uređen par (x, y) nije u $< \circ <$, što je jednako $< \circ \prec$. No ni (y, x) nije u toj kompoziciji, jer inače bismo po tranzitivnosti imali $y < x$, što je nemoguće jer je $<$ antisimetrična relacija. Kako je $x < y$, zaključujemo da su x i y različiti, pa $< \circ \prec$ nije totalni uređaj.

Dodatni zadatak: što se mijenja ako podrazumijevamo *refleksivne* uređaje?

165. Neka su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ totalno uređeni skupovi, takvi da postoji $b \in B$ takav da je $A \simeq p_B(b)$, te postoji $a \in A$ takav da je $B \simeq q_A(a) := \{y \in A : a < y\}$ — riječima, A je sličan nekom početnom komadu od B, a B je sličan nekom završnom komadu od A. Vrijedi li tada nužno $A \simeq B$?

R165. Vrijedi. Uputa za dokaz: promotrite dokaz Cantor–Schröder–Bernsteinovog teorema. Ista ideja funkcionira, samo treba biti oprezniji što se tiče uređaja. Za detalje pogledati zbirku Komjath, Totik, 6.13.

166. Neka su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ totalno uređeni skupovi, takvi da je svaki od njih sličan početnom komadu onog drugog. Vrijedi li tada nužno $A \simeq B$?

R166. Ne vrijedi. Označimo s P i N redom skup svih pozitivnih i skup svih negativnih cijelih brojeva. Stavimo $A := P \times N$, te $B := A \cup \{(1, 0)\}$, s antileksikografskim uređajem. Očito je $(1, 0) = \max B$, dakle A je jednak (pa onda i sličan) $p_B(1, 0)$.

Ako definiramo $g(x,y) := (x,y-1)$, tada je $g[B] = P \times (N \setminus \{-1\}) \cup \{(1,-1)\} = p_A(2,-1)$. Kako g očito čuva strogi uređaj, B je sličan početnom komadu od A.

No $A \not\simeq B$ jer je postojanje maksimuma invarijanta sličnosti (nijedan $(x,y) \in A$ nije maksimum jer je $(x+1,y) > (x,y)$ također u A).

3.3 Dobro uređeni skupovi

167. Postoji li parcijalno uređen skup $(B,<)$ takav da vrijedi: nijedan parcijalni uređaj $\prec$ na B koji proširuje $<$ nije dobar uređaj?

R167. Da: na primjer, skup $\mathbb{Z}$ sa standardnim uređajem. Bilo koji uređaj na $\mathbb{Z}$ koji je nadskup standardnog uređaja mora biti sām standardni uređaj (zbog totalnosti), a to nije dobar uređaj (čitav $\mathbb{Z}$ nema najmanji element).

Štoviše, bilo koji uređaj na bilo kojem nadskupu $A \supseteq \mathbb{Z}$, koji proširuje standardni uređaj $<$ na $\mathbb{Z}$, ne može biti dobar uređaj — jer uvijek u A postoji neprazni podskup $\mathbb{Z}$ bez najmanjeg elementa.

168. Neka je $(A,<)$ parcijalno uređen skup. Označimo s $W(A)$ skup svih dobro uređenih podskupova od A (u odnosu na relaciju $<$). Na $W(A)$, s $\lhd$ označimo parcijalni uređaj „biti početni komad". Dokažite da je svaki lanac u $\big(W(A),\lhd\big)$ dobro uređen.

R168. Neka je L lanac u $\big(W(A),\lhd\big)$. To znači da je svaki element od L podskup od A, dobro uređen odgovarajućom restrikcijom relacije $<$, te da za svaka dva elementa A_1 i A_2 od L, ili je A_1 početni komad od A_2, ili je A_2 početni komad od A_1 (ili su jednaki). Treba dokazati da je L dobro uređen relacijom $\lhd$ (preciznije, njenom restrikcijom).

Neka je S neprazan podskup od L. Kako je S neprazan, postoji skup $\bigcap S$, presjek svih elemenata u S, koji je također podskup od A. Treba vidjeti da je dobro uređen restrikcijom od $<$, te da je početni komad svih (ostalih) C iz S.

Neka je $B \subseteq \bigcap S$ neprazan. Skup S je neprazan, pa fiksirajmo neki njegov element C. Očito je B podskup i od C, a kako je C dobro uređen (jer je $C \in S \subseteq L \subseteq W(A)$), zaključujemo da B ima $<$-najmanji element. Dakle, $\bigcap S$ je doista dobro uređen restrikcijom od $<$, odnosno $\bigcap S \in W(A)$.

Također, $\bigcap S$ mora biti element i od S — jer da nije, mogli bismo doći do kontradikcije na sljedeći način: $\bigcap S \subseteq C$, a ako su različiti, inkluzija mora biti stroga, pa mora postojati $x \in C$ koji nije u $\bigcap S$. Po de Morganovim pravilima, postoji $C_1 \in S$ takav da $x \notin C_1$. Kako su C_1 i C elementi od S, a time i lanca L, međusobno su usporedivi relacijom $\lhd$. Slučaj $C = C_1$ je nemoguć jer je x u jednom skupu, a nije u drugom. Slučaj $C \lhd C_1$ je nemoguć iz istog razloga: to bi povlačilo $C \subseteq C_1$, no x je kontraprimjer za tu inkluziju. Dakle, mora biti $C_1 \lhd C$. Neka je $x_0 \in C$ takav da je $C_1 = p_C(x_0)$.

Sada možemo cijeli gornji postupak provesti za $C_1 \in S$ umjesto C: tako dobijemo $C_2 \in S$ takav da je $C_2 \lhd C_1$. Neka je $x_1 \in C_1$ takav da je $C_2 = p_{C_1}(x_1)$. Iz $x_1 \in C_1 = p_C(x_0)$ imamo $x_1 \in$

C, te $x_1 < x_0$. Provedemo još jednom cijeli postupak za C_2, i dobijemo $x_2 \in C$ sa svojstvom $x_2 < x_1$. Induktivno, možemo dobiti $x_n \in C$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, takve da je uvijek $x_{n+1} < x_n$. No tada je $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ neprazan podskup od C, pa zbog dobre uređenosti od C ima $<$-najmanji element: neka je to x_k. Naravno, sada je $x_{k+1} < x_k$ kontradikcija. Zaključujemo da je početna pretpostavka bila pogrešna, odnosno $\bigcap S \in S$.

Još treba vidjeti da je $\bigcap S$ $\lhd$-najmanji element u S, odnosno $\bigcap S \lhd D$ za sve $D \in S \setminus \{\bigcap S\}$. Neka je D proizvoljni element od S, različit od $\bigcap S$. Kako je očito $D \supseteq \bigcap S$, zaključujemo da inkluzija mora biti prava, pa postoji element od D koji nije u $\bigcap S$. Skup svih takvih elemenata je neprazan podskup od D, pa zbog dobre uređenosti od D taj skup ima najmanji element: neka je to y. Dokažimo da je $\bigcap S$ upravo $p_D(y)$.

Jedna inkluzija je jasna: ako je $z \in p_D(y)$ proizvoljan, iz toga slijedi $z \in D$ i $z < y$. Kad bi još bilo $z \notin \bigcap S$, to bi bilo u kontradikciji s minimalnošću od y. Dakle, mora biti $z \in \bigcap S$. Za drugu inkluziju, razmišljajmo ovako: neka je $x \in \bigcap S$. Očito je $x \in D$, samo još trebamo $x < y$. Naš y nije iz $\bigcap S$, pa postoji $E \in S$ takav da $y \notin E$. Kao dva elementa u S, D i E su $\lhd$-usporedivi, i kao gore dobivamo da je jedina mogućnost $E \lhd D$. Neka je $w \in D$ takav da je $E = p_D(w)$. S jedne strane, x je u svim elementima iz S, pa tako i u E, dakle $x < w$. S druge strane, u dobro uređenom skupu D neprazan podskup $\{y, w\}$ mora imati najmanji element. Pretpostavka da to nije w značila bi $y < w$, što je nemoguće zbog $y \notin E$. Dakle, mora biti $w \leq y$, što zajedno s $x < w$ daje traženu nejednakost $x < y$.

169. Neka je $(A, <)$ dobro uređen skup i $f : A \to A$ injekcija sa svojstvom da za svaki neprazni podskup B od A koji ima supremum u A, njegova slika $f[B]$ također ima supremum u A, te vrijedi $f(\sup B) = \sup f[B]$. Označimo s $\perp$ najmanji element od A. Dokažite da tada vrijedi: za svaki $a \geq f(\perp)$, postoji najveći $b \in A$ sa svojstvom $f(b) \leq a$.

R169. Prvo dokažimo da je funkcija f strogo rastuća: ako je $a < b$ u A, tada je $\{a, b\}$ neprazan podskup od A, koji ima supremum $b \in A$, pa po uvjetu zadatka njegova slika $\{f(a), f(b)\}$ također ima supremum, i to je upravo $f(b) \in A$. Iz toga slijedi $f(a) \leq f(b)$, no kako je f injekcija, zaključujemo da jednakost ne može vrijediti, dakle je $f(a) < f(b)$.

Za strogo rastuću funkciju na dobro uređenom skupu, za svaki a vrijedi $a \leq f(a)$. Sada imamo dva slučaja:

Ako je a najveći element od A, tada $b := a$ očito ima svojstvo koje se traži: najveći je mogući, i $f(a) \leq a$.

U suprotnom, postoje elementi iz A veći od njega, pa postoji i najmanji takav: označimo ga s a^+ (sljedbenik od A). Očito je $a < a^+$, dakle i $f(a) < f(a^+)$, pa po tranzitivnosti $a < f(a^+)$. To znači da postoje elementi čije funkcijske vrijednosti su strogo veće od a, pa neka je c najmanji takav element.

Ako je c sljedbenik nekog elementa, recimo $c = b^+$ za $b \in A$, očito b zadovoljava sve uvjete iz tvrdnje zadatka: $f(b) \leq a$ jer je $b < c$, a c je najmanji element čija funkcijska slika je iznad a. Također, za svaki element $d > b$ vrijedi $d \geq c$, pa je $f(d) \geq f(c) > a$.

Još je preostalo vidjeti što ako c nije sljedbenik nijednog elementa. Tada promotrimo skup $B := \{x \in A : x < c\}$. Kako je $f(\perp) \leq a < f(c)$, vrijedi $\perp < c$, odnosno $\perp \in B$. Dakle B je neprazan podskup od A. Sljedeće što trebamo pokazati je $c = \sup B$.

Kako je c po definiciji gornja međa od B, očito je $\sup B \leq c$. Pretpostavimo da je nejednakost stroga. Tada je $d := \sup B \in B$ (po definiciji skupa B), pa je d zapravo maksimum od B. Iz $d < c$ dobivamo $d^+ \leq c$ (definicija sljedbenika), no to je nemoguće: $d^+ = c$ je nemoguće jer c nije ničiji sljedbenik, a $d^+ < c$ je nemoguće jer bi to značilo $d^+ \in B$, odnosno $d^+ \leq d$.

Sada imamo neprazan podskup B od A sa supremumom c, pa po uvjetu zadatka vrijedi $a < f(c) = \sup f[B] = \sup_{x<c} f(x)$. To znači da a nije gornja međa za $f[B]$ ($f(c)$ je najmanja takva), pa postoji $x < c$ sa svojstvom $f(x) > a$. No to je u kontradikciji s minimalnošću od c. Dakle, ne može se dogoditi da c nije sljedbenik, odnosno, uvijek imamo b s traženim svojstvom.

170. Neka je $(A, \lhd)$ dobro uređeni skup i f funkcija s domenom A.

a) Definirajte jednu injekciju $g : \operatorname{rng} f \to A$.

b) Pomoću g definirajte jedan dobar uređaj na $\operatorname{rng} f$.

c) Dokažite da je to dobar uređaj.

d) Iskoristite (b) da biste definirali jedan dobar uređaj $\prec$ na $\mathbb{Q}$.

e) Odredite sve sličnosti s $(\mathbb{Q}, \prec)$ na $(\mathbb{Q}, \prec)$.

R170.

a) Za $y \in \operatorname{rng} f$, skup svih elemenata koji se preslikavaju u y je neprazni podskup od A, pa ima (jedinstveni) $\lhd$-najmanji element: definirajmo $g(y) := \min f^{-1}[\{y\}]$.

Injektivnost: po definiciji najmanjeg elementa, $f\big(g(y)\big) = y$ za sve $y \in \operatorname{rng} f$.
Dakle iz $g(x) = g(y)$ slijedi $x = f\big(g(x)\big) = f\big(g(y)\big) = y$.

b) Definirajmo $x \prec y :\Longleftrightarrow g(x) \lhd g(y)$.

c) Irefleksivnost: kad bi bilo $y \prec y$ za neki $y \in \operatorname{rng} f$, bilo bi $g(y) \lhd g(y)$, što je nemoguće jer je $\lhd$ irefleksivna.

Tranzitivnost: iz $x \prec y \prec z$ slijedi $g(x) \lhd g(y) \lhd g(z)$, po tranzitivnosti $\lhd$ imamo $g(x) \lhd g(z)$, odnosno $x \prec z$.

Dakle, $(\operatorname{rng} f, \prec)$ je parcijalno uređen skup, i g (po definiciji $\prec$) čuva strogi uređaj.

Totalnost: neka su $x, y \in \operatorname{rng} f$ različiti. Zbog injektivnosti je $g(x) \neq g(y)$, pa zbog totalnosti $\lhd$ BSOMP $g(x) \lhd g(y)$, odnosno $x \prec y$ pa su usporedivi.

Sada je g sličnost totalno uređenih skupova $(\operatorname{rng} f, \prec)$ i $(\operatorname{rng} g, \lhd)$,
pa tvrdnja slijedi iz toga da je dobra uređenost invarijanta sličnosti.

d) Skup $\mathbb{N}^3$ je dobro uređen antileksikografskim uređajem, kao Kartezijev produkt tri primjerka dobro uređenog skupa $\mathbb{N}$.

Funkcija $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{Q}$ zadana s $f(x, y, z) := (-1)^x \cdot \frac{y}{z+1}$ je surjekcija: svaki nenegativni razlomak je $\frac{a}{b} = f(0, a, b-1)$, dok je svaki negativni razlomak $-\frac{a}{b} = f(1, a, b-1)$.

Primijenivši (b) dobivamo traženi dobar uređaj na $\mathbb{Q}$.

e) Sličnost između dobro uređenih skupova je jedinstvena, pa je identiteta $id_{\mathbb{Q}}$ jedina sličnost sa skupa $(\mathbb{Q},<)$ na samog sebe.

171. Dokažite ili oprovrgnite: za svaki totalno uređen skup S, ako postoji jedinstvena sličnost sa S na S, tada je S dobro uređen.

R171. Tvrdnja ne vrijedi: skup $\mathbb{N}$ jest totalno uređen relacijom $>$, a nije dobro uređen: na primjer, sām $\mathbb{N}$ nema $>$-najmanji ($<$-najveći) element. No svaka sličnost između $(\mathbb{N},>)$ i $(\mathbb{N},>)$ je ujedno i sličnost između $(\mathbb{N},<)$ i $(\mathbb{N},<)$ (ako čuva uređaj $>$, i čuva jednakost jer je injekcija, tada čuva i uređaj $<$ zbog totalnosti), a takva postoji samo jedna jer $(\mathbb{N},<)$ *jest* dobro uređen.

172. Nađite sve sličnosti između (a) $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}$, (b) $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$, (c) $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}$ (uz standardne uređaje).

R172.

a) Kako je $\mathbb{N}$ sa standardnim uređajem dobro uređen skup, znamo da postoji jedinstvena sličnost između $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}$, i to je $id_{\mathbb{N}}$.

b) Budući da $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ nisu slični (na primjer, $\mathbb{N}$ ima minimum, $\mathbb{Z}$ ga nema, a postojanje minimuma je invarijanta sličnosti), ne postoji nijedna sličnost između $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$.

c) U zadatku 153 smo vidjeli da sve takve moraju biti translacije: oblika $x \mapsto x+n$ za neki $n \in \mathbb{Z}$. Obrnuto, sve translacije zaista jesu sličnosti između $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}$ ($x \mapsto x+n$ je bijekcija, s inverznim preslikavanjem $x \mapsto x-n$, te $x<y$ povlači $x+n<y+n$).

173. Postoji li skup svih dobro uređenih skupova sličnih nekom skupu S? Obrazložite!

R173. Ako skup S nije dobro uređen, tada očito ne postoji dobro uređen skup njemu sličan (dobra uređenost je invarijanta sličnosti), pa je skup svih dobro uređenih skupova sličnih sa S prazan te postoji po aksiomu praznog skupa.

Ako je S prazan, tada jest dobro uređen, a kako sličnost mora biti bijekcija, jedini skup s kojim S može biti sličan je upravo $\emptyset$. To znači da je skup svih dobro uređenih skupova sličnih sa S jednočlan skup $\{\emptyset\}$ (svi prazni skupovi su međusobno jednaki po aksiomu ekstenzionalnosti), pa je dobro definiran (aksiom praznog skupa, i aksiom para ili partitivnog skupa).

Ako je pak S dobro uređen neprazan skup, tada on ima najmanji element, označimo ga s $\perp$. Označimo $S' := S \setminus \{\perp\}$. Ako je x proizvoljni skup koji nije element od S, sa $S(x)$ označimo skup $\{x\} \cup S'$, uređen tako da je x prije svih elemenata od S', koji su međusobno uređeni restrikcijom izvornog uređaja na S (dakle, efektivno smo u S element $\perp$ zamijenili s x).

Očito je $S(x)$ dobro uređen skup sličan sa S (sličnost preslikava x u $\perp$, a sve ostale elemente ostavlja na miru). Kad bi postojao skup $\mathbf{S}$ svih dobro uređenih skupova sličnih sa S, bio bi — kao njegov podskup — dobro definiran i skup svih $S(x)$, gdje $x \notin S$ (aksiom separacije):

$$\mathbf{T} := \{S(x); x \notin S\} = \big\{T \in \mathbf{S} : \exists x\big(x \notin S \land T = (S \setminus \{\perp\}) \cup \{x\}\big)\big\}.$$

Sada za proizvoljni $S(x) \in \mathbf{T}$, primijetimo da je x upravo njegov najmanji element, pa postoji formula $(\forall y \in T)(x < y \vee x = y)$ s dvije slobodne varijable x i T, koja je funkcijska veza T i x. Po aksiomu zamjene, kad bi $\mathbf{T}$ bio skup, bio bi i skup dobiven djelovanjem te funkcijske veze na $\mathbf{T}$, a to je upravo $S^{\mathbf{c}}$, „skup" svih x koji nisu u S. Naravno, to je kontradikcija: po aksiomu para bi tada $\{S, S^{\mathbf{c}}\}$ bio skup, te bismo po aksiomu unije imali i „skup" $\mathbf{V} = \bigcup\{S, S^{\mathbf{c}}\} = S \cup S^{\mathbf{c}}$ svih skupova, što znamo da je nemoguće (po aksiomu separacije mogli bismo separirati skup svih $r \in \mathbf{V}$ takvih da je $r \notin r$, te bismo dobili Russellov paradoks).

Dakle, osim u gore navedenim slučajevima (kad je S prazan, ili kad sām nije dobro uređen), svi dobro uređeni skupovi slični sa S ne čine skup.

Primijetimo da, striktno govoreći, zadatak nije potpuno interpretiran u teoriji ZFC, jer umjesto da promatramo uređen par $(S, <)$, pretpostavljamo da skup S sa sobom nosi uređaj, koji je dakle definabilan koristeći samo S. To možemo popraviti tako da S, ako jest dobro uređen, zamijenimo jedinstvenim ordinalnim brojem sličnim sa S (što možemo po teoremu enumeracije). Tada taj ordinalni broj zaista posjeduje „svoj" dobar uređaj, relaciju „$\in$", tako da ne trebamo promatrati uređene parove.

174. Neka je $(S, <)$ totalno uređen skup.
Dokažite da je S konačan ako i samo ako su $(S, <)$ i $(S, >)$ dobro uređeni skupovi.

R174. Ako je $(S, <)$ konačan, svaki njegov neprazan podskup je konačan, pa iz zadatka 141 slijedi da ima najmanji i najveći ($>$-najmanji) element. To znači da su i $(S, <)$ i $(S, >)$ dobro uređeni.

Drugi smjer: pretpostavimo da je S beskonačan, i da je dobro uređen relacijom $<$. Dokažimo da ne može biti dobro uređen i relacijom $>$. Definirajmo niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u S induktivno pomoću $x_n := \min(S \setminus \{x_0, \ldots, x_{n-1}\})$ (kako je S beskonačan, uvijek tražimo najmanji element nepraznog podskupa od S). Tada se iz definicije niza vidi da je $x_{n+1} > x_n$ (usporedivi su jer je S totalno uređen, jednaki nisu jer je x_n izbačen iz skupa čiji minimum je x_{n+1}, a $x_{n+1} < x_n$ bi bila kontradikcija s minimalnošću od x_n u skupu iz kojeg još nije izbačen x_{n+1}). To znači da neprazan podskup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq S$ ne može imati najveći ($>$-najmanji) element, pa $>$ ne može biti dobar uređaj na S.

175. Dokažite da je skup A konačan ako i samo ako je $(\mathscr{P}(A), \subset)$ dobro utemeljen.

R175. Ako je A konačan, tada je i $\mathscr{P}(A)$ konačan, pa je i svaki podskup od $\mathscr{P}(A)$ konačan. Po zadatku 137, taj podskup dakle ima minimalni element s obzirom na relaciju $\subset$.

S druge strane, ako je A beskonačan, tada A ima prebrojiv podskup $B = \{b_i : i \in \mathbb{N}\}$ (pretpostavljamo da su svi b_i različiti). Ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ označimo $B_n := \{b_i : i > n\}$, lako vidimo da je $B_{n+1} \subset B_n$ za sve n, pa podskup $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ od $\mathscr{P}(A)$ nema $\subset$-minimalni element.

176. Dokažite da je svaki podskup od $\mathbb{R}$, koji je dobro uređen
restrikcijom standardnog uređaja $<$, konačan ili prebrojiv.

R176. Prvo, poredajmo racionalne brojeve u niz: $q_0, q_1, q_2, \ldots$.

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$, takav da je $(A, <)$ dobro uređen skup. U dobrom uređaju svaki element a, osim najvećeg, ima neposrednog sljedbenika a^+ (najmanji od svih elemenata većih od a). Oznakom $f(a)$ označimo prvi racionalni broj u gornjem nizu, koji je strogo između a i a^+; takav uvijek postoji, jer između svaka dva realna broja postoji racionalni broj.

Označimo s A' skup A bez eventualnog najvećeg elementa (ako taj postoji). Očito je $\mathfrak{K}(A) \leq \mathfrak{K}(A') + 1$. Upravo definirano preslikavanje f je strogo rastuća funkcija s A' u $\mathbb{Q}$: ako je $a < b$ u A', tada je $f(a) < a^+ \leq b < f(b)$. To znači da je f injekcija, pa je $k(A') \leq k(\mathbb{Q}) = \aleph_0$. No tada je i $\mathfrak{K}(A) \leq \mathfrak{K}(A') + 1 \leq \aleph_0 + 1 = \aleph_0$, pa je A konačan ili prebrojiv.

4 Aritmetika ordinalnih brojeva

Primjenom teorema rekurzije slijedi da postoji jedinstvena funkcija $+ : On \times On \to On$ koja ima sljedeća svojstva:

$$\begin{aligned}
&\alpha + 0 = \alpha \\
&\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1 \\
&\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\}, \ \text{ ako je } \beta \text{ granični ordinalni broj.}
\end{aligned}$$

Neka su α, β i γ proizvoljni ordinalni brojevi. Tada vrijedi:

a) $0 + \alpha = \alpha$

b) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

c) Ako je $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ tada je $\beta = \gamma$

d) Ako $\alpha \leq \beta$ tada $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$

Zbrajanje ordinalnih brojeva općenito nije komutativno.
Npr. $1 + \omega = \sup\{1 + n : n \in \omega\} = \omega$, ali $\omega + 1 \neq \omega$, jer znamo da vrijedi $\omega < \omega + 1$.

Zatim, općenito iz $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$ ne mora slijediti $\beta = \gamma$ (npr. $1 + \omega = 2 + \omega$).

Teorem o oduzimanju. *Neka su α i β ordinalni brojevi takvi da je $\beta \leq \alpha$. Tada postoji jedinstveni ordinalni broj γ takav da vrijedi $\alpha = \beta + \gamma$.*

Sume $\sum\limits_{i\in\beta} \alpha_i$ su definirane s

$$\sum_{i\in\beta} \alpha_i = \begin{cases} 0, & \beta = 0, \\ \left(\sum\limits_{i\in\gamma} \alpha_i\right) + \alpha_\gamma, & \beta = \gamma + 1, \\ \sup\limits_{\gamma\in\beta} \sum\limits_{i\in\gamma} \alpha_i, & \text{ako je } \beta \text{ granični ordinalni broj.} \end{cases}$$

Primjenom teorema rekurzije slijedi da je s jednakostima koje slijede definirana jedinstvena funkcija $\cdot : \mathbf{On} \times \mathbf{On} \to \mathbf{On}$:

$$\begin{aligned}
&\alpha \cdot 0 = 0 \\
&\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha \\
&\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \gamma : \gamma < \beta\}, \ \text{ ako je } \beta \text{ granični ordinalni broj.}
\end{aligned}$$

Neka su α, β i γ proizvoljni ordinalni brojevi. Tada vrijedi:

a) $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$

b) $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$

c) $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$

d) Ako $\alpha\le\beta$ tada $\alpha\cdot\gamma\le\beta\cdot\gamma$

Množenje ordinalnih brojeva općenito nije komutativno.
Npr. $2\cdot\omega=\sup\{2\cdot n : n\in\omega\}=\omega$, a $\omega\cdot 2=\omega\cdot(1+1)=\omega+\omega>\omega$.

Općenito ne vrijedi druga distributivnost, tj. ne mora vrijediti $(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$.
Npr. $(1+1)\cdot\omega=2\cdot\omega=\omega<\omega+\omega=1\cdot\omega+1\cdot\omega$.

Teorem o dijeljenju s ostatkom. *Neka su α i $\beta>0$ ordinalni brojevi. Tada postoje jedinstveni ordinalni brojevi δ i $\rho<\beta$ takvi da je $\alpha=\beta\cdot\delta+\rho$.*

Produkti $\prod\limits_{i\in\beta}\alpha_i$ su definirani s

$$\prod_{i\in\beta}\alpha_i=\begin{cases}1, & \beta=0,\\ \Big(\prod\limits_{i\in\gamma}\alpha_i\Big)\alpha_\gamma, & \beta=\gamma+1,\\ \sup\limits_{0\in\gamma\in\beta}\prod\limits_{i\in\gamma}\alpha_i, & \text{ako je } \beta \text{ granični ordinalni broj.}\end{cases}$$

Primjenom teorema rekurzije slijedi da je s jednakostima koje slijede definirana jedinstvena funkcija na **On** $\times$ **On**:

$$\begin{aligned}&\alpha^0=1\\ &\alpha^{\beta+1}=\alpha^\beta\cdot\alpha\\ &\alpha^\beta=\sup\{\alpha^\gamma:\gamma<\beta\},\ \text{ ako je } \beta \text{ granični ordinalni broj.}\end{aligned}$$

Neka su α,β i γ proizvoljni ordinalni brojevi. Tada vrijedi:

a) $\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma=\alpha^{\beta+\gamma}$

b) $(\alpha^\beta)^\gamma=\alpha^{\beta\cdot\gamma}$

c) Ako je $\alpha>1$ i $\beta<\gamma$ tada je $\alpha^\beta<\alpha^\gamma$

Općenito ne vrijedi jednakost $\alpha^\beta\cdot\gamma^\beta=(\alpha\cdot\gamma)^\beta$ (npr. $2^\omega\cdot 2^\omega=\omega\cdot\omega>\omega=4^\omega$).

Za svaki ordinalni broj α postoji jedinstveni prirodan broj n i konačni nizovi ordinalnih brojeva $\gamma_0>\gamma_1>\cdots>\gamma_n$ i $m_0,\ldots,m_n\in\omega\setminus 1$, takvi da vrijedi

$$\alpha=\omega^{\gamma_0}m_0+\omega^{\gamma_1}m_1+\ldots+\omega^{\gamma_n}m_n.$$

Taj prikaz nazivamo Cantorovom normalnom formom ordinalnog broja α.

4.1 Osnovna aritmetika

177. Neka su $\alpha,\beta\ne 0$ ordinalni brojevi. Dokažite da $\alpha+\beta=\omega$ povlači $\alpha\cdot\beta=\omega$.

R177. Ako je $\alpha+\beta=\omega$, onda su $\alpha,\beta\le\omega$. Nadalje, kad bi bilo $\alpha=\beta=\omega$, bilo bi $\alpha+\beta=\omega\cdot 2\ne\omega$, pa je α ili β konačan (i nijedan nije nula niti mogu oba biti konačni). Ako je $\beta\ne 0$

konačan i $\alpha = \omega$ imali bismo $\alpha + \beta > \omega$, pa preostaje α konačan i $\beta = \omega$, a u tom se slučaju lako (pomoću definicije množenja) provjeri da je $\alpha \cdot \beta = \omega$.

178. Dokažite da za svaki ordinalni broj α vrijedi $\alpha + 1 + \alpha = 1 + \alpha \cdot 2$.

R178. Za konačne α tvrdnja je očigledna. Nadalje, po teoremu o oduzimanju, vrijedi

$$(\heartsuit) \qquad \alpha \geq \omega \Rightarrow \exists \delta(\alpha = \omega + \delta)$$

(taj način zapisa beskonačnog ordinalnog broja u obliku $\omega + \delta$ koristit ćemo često u izračunavanju suma ordinalnih brojeva).

Imamo dakle da za beskonačne α vrijedi $\alpha + 1 + \alpha = \omega + \delta + 1 + \omega + \delta = \omega + \delta + \omega + \delta = 1 + \omega + \delta + \omega + \delta = 1 + \alpha + \alpha = 1 + \alpha \cdot 2$.

179. Dokažite: ako je β granični ordinalni broj i $\alpha < \beta$, onda je $\alpha + \beta = \beta$.

180. Ako je $\alpha \geq \omega,\ k \in \omega$ i $\omega^k < \alpha$, onda je $\omega^k + \alpha = \alpha$. Dokažite.

181. Dokažite da za ordinalne brojeve $\alpha > 1$ i $\beta \geq 1$ vrijedi $\alpha^\beta \geq \alpha \cdot \beta$.

R181. Uputa: transfinitna indukcija po β.

182. Pokažite da je $(\omega + 1)^\omega = \omega^\omega$.

R182. Iz $\omega < \omega + 1 < \omega^2$ po monotonosti slijedi $\omega^\omega \leq (\omega + 1)^\omega \leq \left(\omega^2\right)^\omega = \omega^{2\cdot\omega} = \omega^\omega$.

183. Neka su $k \in \omega \setminus \{0\}$ i $i \in \omega$. Izračunajte $(\omega \cdot k + i) \cdot \omega$.

R183. Po definiciji množenja imamo:

$$(\omega \cdot k + i) \cdot \omega = \sup_{n \in \omega}\big((\omega \cdot k + i) \cdot n\big)$$

Očito je $(\omega \cdot k + i) \cdot n < \omega^2$ za svaki $n \in \omega$. S druge strane za svaki $m \in \omega$ postoji $n \in \omega$ takav da je $\omega \cdot m < (\omega \cdot k + i) \cdot n$. Stoga vidimo da vrijedi:

$$(\Delta) \qquad (\omega \cdot k + i) \cdot \omega = \omega^2$$

Prethodno navedenu jednakost ćemo često koristiti u zadacima koji slijede.

184. Izračunajte $(\omega \cdot 3 + 2) \cdot (\omega + \omega^2) \cdot 2$.

R184. Primijetimo prvo da vrijedi:

$$(\omega \cdot 3 + 2) \cdot (\omega + \omega^2) \cdot 2 = (\omega \cdot 3 + 2) \cdot \omega^2 \cdot 2$$

Preostalo je izračunati $\sup\limits_{\alpha \in \omega^2} (\omega \cdot 3 + 2) \cdot \alpha$. Uočimo da se svaki $\alpha \in \omega^2$ može zapisati kao $\alpha = \omega \cdot k + i$, gdje su $k, i \in \omega$. Koristeći jednakost (Δ) iz rješenja zadatka 183 dobivamo:

$$
\begin{aligned}
(\omega\cdot 3+2)\cdot(\omega\cdot k+i) &= (\omega\cdot 3+2)\cdot\omega\cdot k+(\omega\cdot 3+2)\cdot i = \\
&= \underbrace{((\omega\cdot 3+2)\cdot\omega)}_{(\Delta)=\omega^2}\cdot k+ \\
&+\underbrace{\omega\cdot 3+2+\omega\cdot 3+2+\cdots+\omega\cdot 3+2}_{i\text{ puta}} = \\
&= \omega^2\cdot k+\omega\cdot 3\cdot i+2<\omega^3
\end{aligned}
$$

S druge strane za svaki $m\in\omega$ postoje $k,i\in\omega$ takav da je $\omega^2\cdot k+\omega\cdot 3\cdot i+2>\omega^2\cdot m$, pa je prema tome $\sup\limits_{\alpha\in\omega^2}(\omega\cdot 3+2)\cdot\alpha=\omega^3$. Dakle $(\omega\cdot 3+2)\cdot(\omega+\omega^2)\cdot 2=\omega^3\cdot 2$.

185. Nađite ordinalni broj α tako da vrijedi $\omega^{n+1}=1+\omega+\omega^2+\ldots+\omega^n+\alpha$.

186. Izračunajte $\sum\limits_{j\in 4}(\omega+j)^j$.

R186. Po definiciji sume imamo:

$$\sum_{j\in 4}(\omega+j)^j=(\omega+0)^0+(\omega+1)^1+(\omega+2)^2+(\omega+3)^3$$

Redom računamo:

$$
\begin{aligned}
(\omega+2)^2 &= (\omega+2)\cdot(\omega+2)=(\omega+2)\cdot\omega+(\omega+2)\cdot 2=(\Delta) \\
&= \omega^2+(\omega+2)+(\omega+2)=\omega^2+\omega+(2+\omega)+2= \\
&= \omega^2+\omega+\omega+2=\omega^2+\omega\cdot 2+2
\end{aligned}
$$

Analogno bismo dobili $(\omega+3)^2=\omega^2+\omega\cdot 3+3$. Tada imamo:

$$
\begin{aligned}
(\omega+3)^3 &= (\omega+3)^2\cdot(\omega+3) = (\omega^2+\omega\cdot 3+3)\cdot(\omega+3) \\
&= (\omega^2+\omega\cdot 3+3)\cdot\omega + (\omega^2+\omega\cdot 3+3)\cdot 3 \\
&= \sup_{n\in\omega}(\omega^2+\omega\cdot 3+3)\cdot n + \\
&\quad (\omega^2+\omega\cdot 3+3) + (\omega^2+\omega\cdot 3+3) + (\omega^2+\omega\cdot 3+3) \\
&= \sup_{n\in\omega}\Big(\underbrace{(\omega^2+\omega\cdot 3+3)+\ldots+(\omega^2+\omega\cdot 3+3)}_{n\text{ puta}}\Big)+ \\
&\quad \omega^2+(\omega\cdot 3+3+\omega^2) + (\omega\cdot 3+3+\omega^2)+\omega\cdot 3+3 \\
&= \sup_{n\in\omega}(\omega^2\cdot n+\omega\cdot 3+3)+\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 3+3 \\
&= \omega^3+\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 3+3
\end{aligned}
$$

Sada možemo konačno odrediti početnu sumu.

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\in 4}(\omega+j)^j &= 1+(\omega+1)+(\omega^2+\omega\cdot 2+2)+(\omega^3+\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 3+3) \\
&= \omega^3+\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 3+3
\end{aligned}
$$

187. Dokažite da za sve ordinalne brojeve α i β vrijedi $\sum\limits_{i\in\beta} \alpha = \alpha \cdot \beta$.

R187. Imamo $\alpha_i = \alpha$ za sve $i \in \beta$. Tvrdnja se dokazuje transfinitnom indukcijom po β.

188. Izračunajte $\sum\limits_{i\in\omega} i^2$.

R188. Po definiciji je $\sum\limits_{i\in\omega} i^2 = \sup\limits_{n<\omega} \sum\limits_{i=0}^{n-1} i^2 = \sup_{n<\omega} S_i$. Brojevi $S_i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} i^2$ su konačni i za svaki $m<\omega$ postoji $S_i > m$ (recimo, $S_{m+3} > m$) pa je $\sup\limits_{n<\omega} S_i = \omega$.

189. Dokažite da za svaki konačni ordinalni broj m vrijedi

$$\sum_{i\in\omega\cdot(m+1)} f(i) = \sum_{i\in\omega} f(i) + \sum_{i\in\omega} f(\omega+i) + \ldots + \sum_{i\in\omega} f(\omega\cdot m+i)$$

190. Neka je $\{\alpha_i : i \in \omega\cdot 2\}$ neki skup ordinalnih brojeva. Pokažite da vrijedi:

$$\sum_{i\in\omega\cdot 2} \alpha_i = \sum_{i\in\omega} \alpha_i + \sum_{i\in\omega} \alpha_{\omega+i}.$$

R190. Znamo da je $\beta \in \omega\cdot 2$ ako i samo ako je $\beta = n \in \omega$ ili $\beta = \omega + n$ za neki $n \in \omega$. Nadalje,

$$\sum_{i\in\omega} \alpha_i \leq \sup_{\beta\in\omega+n} \sum_{i\in\beta} \alpha_i$$

za sve $n \in \omega$ jer je

$$\sum_{i\in\omega+n} \alpha_i = \sum_{i\in\omega} \alpha_i + \alpha_\omega + \alpha_{\omega+1} + \ldots + \alpha_{\omega+n-1}.$$

Stoga imamo:

$$\sum_{i\in\omega\cdot 2} \alpha_i = \sup_{\beta\in\omega\cdot 2} \sum_{i\in\beta} \alpha_i = \sup_{n\in\omega} \left(\sum_{i\in\omega} \alpha_i + \alpha_\omega + \alpha_{\omega+1} + \ldots + \alpha_{\omega+n-1} \right).$$

Označimo li $\gamma = \sum_{i\in\omega} \alpha_i$ i $\delta_n = \alpha_\omega + \alpha_{\omega+1} + \ldots + \alpha_{\omega+n-1}$, imamo da je zadnja jednakost dalje jednaka

$$\sup_{n\in\omega} (\gamma + \delta_n) = \gamma + \sup_{n\in\omega} \delta_n = \sum_{i\in\omega} \alpha_i + \sum_{i\in\omega} \alpha_{\omega+i},$$

što je i trebalo dokazati.

Pritom smo za dobivanje predzadnje jednakosti koristili svojstvo da za sve ordinalne brojeve $\alpha > 0$ i γ vrijedi

$$\sup_{\beta\in\alpha} (\gamma + \beta) = \gamma + \sup_{\beta\in\alpha} \beta.$$

Dokažimo to: Kako je $\beta \le \sup_{\beta\in\alpha} \beta$ za svaki $\beta \in \alpha$, vrijedi $\gamma + \beta \le \gamma + \sup_{\beta\in\alpha} \beta$ iz čega slijedi da je

$$\sup_{\beta\in\alpha} (\gamma + \beta) \le \gamma + \sup_{\beta\in\alpha} \beta.$$

S druge strane, neka je δ neka gornja međa za $\{\gamma + \beta : \beta \in \alpha\}$ koja je veća od $\gamma + \sup_{\beta\in\alpha} \beta$. Tada je sigurno $\gamma \le \delta$ i po teoremu o oduzimanju postoji ordinalni broj ρ takav da je $\delta = \gamma + \rho$. Sad imamo da je $\gamma + \beta \le \gamma + \rho$ pa mora biti $\beta \le \rho$ (za svaki $\beta \in \alpha$). Stoga je $\sup_{\beta\in\alpha} \beta \le \rho$ i $\gamma + \sup_{\beta\in\alpha} \beta \le \gamma + \rho = \delta$, pa je

$$\sup_{\beta\in\alpha} (\gamma + \beta) \ge \gamma + \sup_{\beta\in\alpha} \beta,$$

čime je tvrdnja dokazana.

191. Izračunajte $\sum_{i\in\omega+3} (i \cdot \omega + \omega \cdot i)$.

R191.

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\omega+3} (i\cdot\omega+\omega\cdot i) &= \sum_{i\in\omega} (i\cdot\omega+\omega\cdot i) + (\omega\cdot\omega+\omega\cdot\omega)\\
&\quad + ((\omega+1)\cdot\omega+\omega\cdot(\omega+1)) +\\
&\quad + ((\omega+2)\cdot\omega+\omega\cdot(\omega+2))\\
&= \sup_{n\in\omega} \sum_{i=1}^{n} (i\cdot\omega+\omega\cdot i) + \omega^2\cdot 2 +\\
&\quad + \sup_{n\in\omega}((\omega+1)\cdot n) + \omega^2 + \omega\\
&\quad + \sup_{n\in\omega}((\omega+2)\cdot n) + \omega^2 + \omega\cdot 2\\
&= \sup_{n\in\omega}[(1\cdot\omega+\omega\cdot 1)+\ldots+(n\cdot\omega+\omega\cdot n)] + \omega^2\cdot 2\\
&\quad + \sup_{n\in\omega} \underbrace{(\omega+1+\omega+1+\ldots+\omega+1)}_{n \text{ puta}} + \omega^2 + \omega\\
&\quad + \sup_{n\in\omega} \underbrace{(\omega+2+\omega+2+\ldots+\omega+2)}_{n \text{ puta}} +\\
&\quad + \omega^2 + \omega\cdot 2\\
&= \sup_{n\in\omega}(\omega+\omega+\omega+\omega\cdot 2+\ldots+\omega+\omega\cdot n)\\
&\quad + \omega^2\cdot 2 + \sup_{n\in\omega}(\omega\cdot n+1) + \omega^2 + \omega +\\
&\quad + \sup_{n\in\omega}(\omega\cdot n+2) + \omega^2 + \omega\cdot 2\\
&= \omega^2 + \omega^2\cdot 2 + \omega^2 + \omega + \omega^2 + \omega\cdot 2\\
&= \omega^2\cdot 5 + \omega\cdot 2
\end{aligned}$$

192. Izračunajte $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2} i$.

R192. Imamo prvo (po zadatku 190)

$$\sum_{i\in\omega\cdot 2} i = \sup_{n<\omega}\sum_{i=0}^{n-1} i + \sup_{n<\omega}\sum_{i=0}^{n-1}(\omega+i).$$

Prvi od ta sva supremuma iznosi ω, a drugi je jednak

$$\begin{aligned}\sup_{n<\omega} \quad & (\omega+\omega+1+\omega+2+\ldots+\omega+(n-2)+\omega+(n-1)) = \\ & \sup_{n<\omega}(\omega+\omega+\omega+\ldots+\omega+\omega+(n-1) = \sup_{n<\omega}(\omega\cdot n+(n-1) = \omega^2\end{aligned}$$

Stoga je $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2} i = \omega+\omega^2 = \omega(1+\omega) = \omega^2$.

193. Izračunajte $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2+3}((\omega+i)\cdot\omega)$.

R193.

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\omega\cdot 2+3}((\omega+i)\cdot\omega) \quad = \quad & \sum_{i\in\omega}((\omega+i)\cdot\omega) \;+\; \sum_{i\in\omega}((\omega+\omega+i)\cdot\omega) \;+ \\ & ((\omega+\omega\cdot 2)\cdot\omega) \;+\; ((\omega+\omega\cdot 2+1)\cdot\omega) \;+ \\ & ((\omega+\omega\cdot 2+2)\cdot\omega)\end{aligned}$$

Redom računamo svaki sumand posebno. Iz jednakosti (Δ) iz rješenja zadatka 183 znamo da je $(\omega+i)\cdot\omega = \omega^2$ za proizvoljan $i\in\omega$. Sada računamo $\sum\limits_{i\in\omega}((\omega+i)\cdot\omega)$.

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\omega}((\omega+i)\cdot\omega) \quad &= \quad \sum_{i\in\omega}\omega^2 \;=\; \sup_{n\in\omega}\sum_{i\in n}\omega^2 \\ &= \quad \sup_{n\in\omega}(\underbrace{\omega^2+\ldots+\omega^2}_{n \text{ puta}}) \;=\; \sup_{n\in\omega}(\omega^2\cdot n) \;=\; \omega^3\end{aligned}$$

Kako bi izračunali $\sum\limits_{i\in\omega}((\omega+\omega+i)\cdot\omega)$ prvo ćemo pojednostaviti izraz $(\omega+\omega+i)\cdot\omega$. Koristeći ponovno jednakost (Δ) iz rješenja zadatka 183 dobivamo:

$$(\omega+\omega+i)\cdot\omega = (\omega\cdot 2+i)\cdot\omega \overset{(\Delta)}{=} \omega^2.$$

Sada sumu $\sum\limits_{i\in\omega}((\omega+\omega+i)\cdot\omega)$ lako izračunamo:

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\omega}((\omega+\omega+i)\cdot\omega) \quad &= \quad \sum_{i\in\omega}\omega^2 \;=\; \sup_{n\in\omega}\sum_{k\in\omega}\omega^2 \\ &= \quad \sup_{n\in\omega}(\omega^2\cdot n) \;=\; \omega^3\end{aligned}$$

Vidimo da je potrebno pojednostaviti još tri izraza. Redom to činimo (koristeći jednakost (Δ) iz rješenja zadatka 183).

$$(\omega+\omega\cdot 2)\cdot\omega=(\omega\cdot(1+2))\cdot\omega \;=\; (\omega\cdot 3)\cdot\omega=\omega\cdot(3\cdot\omega) \;=\; \omega\cdot\omega \;=\omega^2$$
$$(\omega+\omega\cdot 2+1)\cdot\omega=(\omega\cdot 3+1)\cdot\omega \overset{(\Delta)}{=} \omega^2$$
$$(\omega+\omega\cdot 2+2)\cdot\omega=(\omega\cdot 3+2)\cdot\omega \overset{(\Delta)}{=} \omega^2$$

Koristeći sve što smo izračunali konačno možemo izračunati traženu početnu sumu.

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\omega\cdot 2+3}((\omega+i)\cdot\omega) &= \omega^3 + \omega^3 + \omega^2+\omega^2+\omega^2\\ &= \omega^3\cdot 2 + \omega^2\cdot 3\end{aligned}$$

194. Izračunajte $\sum\limits_{i\in\omega} i^2$.

R194.
$$\sum_{i\in\omega} i^2 \;=\; \sup_{i\in\omega}\sum_{j\in i} j^2 \;=\; \sup_{i\in\omega}\frac{1}{6}i\cdot(i+1)\cdot(2i+1) \;=\; \omega$$

195. Izračunajte $\sum\limits_{i\in\omega+n} i^n$, gdje je $n\in\omega\setminus\{0\}$ proizvoljan.

R195.
$$\sum_{i\in\omega+n} i^n \;=\; \sum_{i\in\omega} i^n+\omega^n+(\omega+1)^n+\ldots+(\omega+n-1)^n$$

Očito je $\sum\limits_{i\in\omega} i^n=\omega$ (vidi rješenje prethodnog zadatka). Lako je dokazati da vrijedi

$$(\omega+n)^2=\omega^2+\omega\cdot n+n$$

Indukcijom po $k>0$ lako je dobiti da vrijedi

$$(\omega+n)^k \;=\; \omega^k+\omega^{k-1}\cdot n+\ldots+\omega\cdot n+n$$

Tada je lako dobiti da je početna suma jednaka

$$\omega^n\cdot n+\omega^{n-1}\cdot(n-1)+\ldots+\omega\cdot(n-1)+(n-1).$$

196. Izračunajte:

a) $\sum\limits_{\alpha\in\omega\cdot 2+2}(2+\alpha+2^{\alpha})$ b) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 3}(i^3+3^i)$
c) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2}(i+\omega\cdot 2)$ d) $\sum\limits_{i\in\omega^2}(i+\omega)$
e) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2} i^2$ f) $\sum\limits_{i\in\omega+3}(\omega+i)\cdot\omega^{i+2}$
g) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2}(\omega+2i)$ h) $\sum\limits_{i\in\omega+1}(i+2)^{\omega+i}$
i) $\sum\limits_{i\in\omega+2} i^{\omega}$ j) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2}\omega$
k) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2}(\omega\cdot i\cdot(i+1))$ l) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2+2}(\omega^2+\omega+i)$
m) $\sum\limits_{i\in\omega+2}\omega^i$ n) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2} i\cdot(\omega+i)$
o) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 3} 3$ p) $\sum\limits_{n\in\omega+5}\omega^n\cdot n$
r) $\sum\limits_{n\in\omega\cdot 5}\omega$ s) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 3}(i\cdot 3)$
t) $\sum\limits_{i\in\omega+1}\omega$ u) $\sum\limits_{i\in\beta}\alpha.$

R196.

a) $\omega^2\cdot 4$ b) $\omega^4\cdot 2$
c) $\omega^2\cdot 2$ d) ω^3
e) ω^3 f) $\omega^{\omega+4}$
g) $\omega^2\cdot 2$ h) $\omega^{\omega\cdot 2}$
i) $\omega^{\omega}\cdot 2$ j) $\omega^2\cdot 2$
k) ω^4 l) $\omega^3\cdot 2+\omega^2\cdot 2+\omega\cdot 3+1$
m) $\omega^{\omega+1}$

197. Izračunajte $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2} i^2$.

R197.

$$\sum_{i\in\omega\cdot 2} i^2 = \sum_{i\in\omega+\omega} i^2 = \sum_{i\in\omega} i^2 + \sum_{\omega\le k<\omega+\omega} k^2.$$

Iz prethodnog zadatka znamo da je prva suma jednaka ω. Računamo drugu sumu. Primijetimo prvo da je druga suma jednaka $\sum\limits_{i\in\omega}(\omega+i)^2$.

Za $i\in\omega$ računamo $(\omega+i)^2$. Ako je $i=0$ tada je $(\omega+i)^2=\omega^2$. Za $i\in\omega\setminus\{0\}$ lakim računom dobiva se $(\omega+i)^2=\omega^2+\omega\cdot i+i$. Tada je tražena suma jednaka:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in\omega}(\omega^2+\omega\cdot i+i) &= \sup_{n\in\omega}\sum_{i\in n}(\omega^2+\omega\cdot i+i)\\
&= \sup_{n\in\omega}\Big((\omega^2+\omega\cdot 0+0)+\ldots+\\
&\quad + (\omega^2+\omega\cdot(n-1)+(n-1))\Big)\\
&= \sup_{n\in\omega\setminus\{0\}}\Big(\omega^2+\omega^2+(\omega+(1+\omega^2))+\ldots+\\
&\quad + (\omega^2+\omega\cdot(n-1)+(n-1))\Big)\\
&= \sup_{n\in\omega\setminus\{0\}}\Big(\underbrace{\omega^2+\ldots+\omega^2}_{n\text{ puta}}+\omega\cdot(n-1)+(n-1)\Big)\\
&= \sup_{n\in\omega\setminus\{0\}}(\omega^2\cdot n+\omega\cdot(n-1)+(n-1)) \;=\; \omega^3
\end{aligned}
$$

Tada je početna suma jednaka $\omega+\omega^3$, tj. ω^3.

198. Izračunajte $\sum\limits_{n\in\omega+1}\sum\limits_{k\in\omega} n^k$

R198.

$$\sum_{n\in\omega+1}\sum_{k\in\omega} n^k = \sum_{n\in\omega}\sum_{k\in\omega} n^k \;+\; \sum_{k\in\omega}\omega^k$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\in\omega}\sum_{k\in\omega} n^k &= \sup_{p\in\omega}\sum_{n\in p}\sum_{k\in\omega} n^k \;=\; \sup_{p\in\omega}\Big(\sum_{n\in p}(\sup_{r\in\omega}\sum_{k\in r} n^k)\Big)\\
&= \sup_{p\in\omega}\Big(\sum_{n\in p}(\sup_{r\in\omega}(n^0+n^1+\ldots+n^{r-1}))\Big)\\
&= \sup_{p\in\omega}\Big(\sum_{n\in p}\omega\Big)\\
&= \sup_{p\in\omega}\Big(\underbrace{\omega+\ldots+\omega}_{p\text{ puta}}\Big)\\
&= \sup_{p\in\omega}\Big(\omega\cdot p\Big)\\
&= \omega\cdot\omega \;=\; \omega^2
\end{aligned}
$$

$$\sum_{k\in\omega}\omega^k \;=\; \sup_{n\in\omega}\sum_{k\in n}\omega^k \;=\; \sup_{n\in\omega}(\omega^0 \;+\; \omega^1 \;+\; \ldots \;+\; \omega^{n-1}) \;=\; \omega^\omega$$

Konačno, dobivamo da je početna tražena suma jednaka:

$$\sum_{n\in\omega+1}\sum_{k\in\omega} n^k \;=\; \omega^2+\omega^\omega \;=\; \omega^\omega$$

199. Izračunajte

a) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2}\left(\omega+\sum\limits_{j\in i}1\right)$ b) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2}\sum\limits_{j\in i}(j+\omega+2)$

c) $\sum\limits_{i\in\omega+2}\sum\limits_{j\in i}(\omega\cdot j+i)$ d) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2}\sum\limits_{j\in i}j\cdot i$

e) $\sum\limits_{i\in\omega+2}\sum\limits_{j\in i}(2i+j)$ f) $\sum\limits_{i\in\omega\cdot 2}\sum\limits_{j\in i+1}\omega\cdot i\cdot j$

R199.

a) $\omega^2\cdot 2$ b) ω^3

c) $\omega^2\cdot 4+\omega+1$

200. Izračunajte $\prod\limits_{\alpha\in\omega\cdot 3+2}(\alpha+\omega)$.

R200.

$$\begin{aligned}
\prod_{\alpha\in\omega\cdot 3+2}(\alpha+\omega) &= \Big(\prod_{\alpha\in\omega\cdot 3}(\alpha+\omega)\Big)\cdot(\omega\cdot 3+\omega)\cdot(\omega\cdot 3+1+\omega)\\
&= \Big(\prod_{\alpha\in\omega}(\alpha+\omega)\Big)\cdot\Big(\prod_{\alpha\in\omega}(\omega+\alpha+\omega)\Big)\cdot\Big(\prod_{\alpha\in\omega}(\omega\cdot 2+\alpha+\omega)\Big)\cdot\\
&\quad\cdot(\omega\cdot 3+\omega)\cdot(\omega\cdot 3+1+\omega)\\
&= \Big(\prod_{\alpha\in\omega}(\alpha+\omega)\Big)\cdot\Big(\prod_{\alpha\in\omega}(\omega+\alpha+\omega)\Big)\cdot\Big(\prod_{\alpha\in\omega}(\omega\cdot 2+\alpha+\omega)\Big)\cdot\\
&\quad\cdot(\omega\cdot 4)\cdot(\omega\cdot 4)
\end{aligned}$$

Kako bismo izračunali posljednji produkt uvodimo oznake:

$$(*)=\prod_{\alpha\in\omega}(\alpha+\omega)\qquad (**)=\prod_{\alpha\in\omega}(\omega+\alpha+\omega)\qquad (***)=\prod_{\alpha\in\omega}(\omega\cdot 2+\alpha+\omega)$$

Redom računamo produkte $(*)$, $(**)$ i $(***)$.

$$\begin{aligned}
(*) &= \prod_{\alpha\in\omega}(\alpha+\omega) = \sup_{n\in\omega}\prod_{i=0}^{n-1}(i+\omega)\\
&= \sup_{n\in\omega}\Big((0+\omega)(1+\omega)\cdot\ldots\cdot(n-1+\omega)\Big)\\
&= \sup_{n\in\omega}(\underbrace{\omega\cdot\ldots\cdot\omega}_{n}) = \sup_{n\in\omega}\omega^n = \omega^\omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(**) &= \prod_{\alpha\in\omega}(\omega\alpha+\omega) = \sup_{n\in\omega}\prod_{i=0}^{n}(\omega+i+\omega)\\
&= \sup_{n\in\omega}\Big((\omega+0+\omega)\cdot\ \ldots\ \cdot(\omega+(n-1)+\omega)\Big)\\
&= \sup_{n\in\omega}(\underbrace{(\omega\cdot 2)\cdot\ldots\cdot(\omega\cdot 2)}_{n})\\
&= \sup_{n\in\omega}\Big(\omega\cdot(2\cdot\omega)\cdot\ldots\cdot(2\cdot\omega)\cdot 2\Big)\\
&= \sup_{n\in\omega}(\underbrace{\omega\cdot\ldots\cdot\omega}_{n}\cdot 2) = \sup_{n\in\omega}(\omega^n\cdot 2) = \omega^\omega
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(***) &= \prod_{\alpha\in\omega}(\omega\cdot 2+\alpha+\omega) = \sup_{n\in\omega}\prod_{i=0}^{n}(\omega\cdot 2+i+\omega)\\
&= \sup_{n\in\omega}\Big((\omega\cdot 2+0+\omega)\cdot\ldots\cdot(\omega\cdot 2)+(n-1)+\omega)\Big)\\
&= \sup_{n\in\omega}(\underbrace{(\omega\cdot 2+\omega)\cdot\ldots\cdot(\omega\cdot 2+\omega)}_{n})\\
&= \sup_{n\in\omega}(\underbrace{(\omega\cdot 3)\cdot\ldots\cdot(\omega\cdot 3)}_{n})\\
&= \sup_{n\in\omega}(\omega\cdot\underbrace{(3\cdot\omega)\ldots\cdot(3\cdot\omega)}_{n}\cdot 3)\\
&= \sup_{n\in\omega}(\underbrace{\omega\cdot\ldots\cdot\omega}_{n}\cdot 3) = \sup_{n\in\omega}(\omega^{n}\cdot 3) = \omega^{\omega}
\end{aligned}
$$

Sada možemo konačno napisati rješenje zadatka:

$$
\begin{aligned}
\prod_{\alpha\in\omega\cdot 3+2}(\alpha+\omega) &= \omega^{\omega}\cdot\omega^{\omega}\cdot\omega^{\omega}\cdot(\omega\cdot 4)\cdot(\omega\cdot 4)\\
&= \omega^{\omega\cdot 3}\cdot\omega\cdot(4\cdot\omega)\cdot 4\\
&= \omega^{\omega\cdot 3}\cdot\omega^{2}\cdot 4 = \omega^{\omega\cdot 3+2}\cdot 4
\end{aligned}
$$

201. Izračunajte $\prod_{\alpha\in\omega+2}(\alpha+2)^{\alpha+1}$.

R201. Uputa:

$$
\begin{aligned}
\prod_{\alpha\in\omega+2}(\alpha+2)^{\alpha+1} &= \prod_{\alpha\in\omega}(\alpha+2)^{\alpha+1}\cdot(\omega+2)^{\omega+1}\cdot(\omega+3)^{\omega+2}\\
&= \omega\cdot\omega^{\omega}\cdot(\omega+2)\cdot\omega^{\omega}\cdot(\omega+3)^{2}\\
&= \omega^{\omega\cdot 2}(\omega^{2}+\omega\cdot 3+3)
\end{aligned}
$$

202. Izračunajte $\prod_{i\in\omega}\omega^{\omega+i}$.

R202.

$$
\begin{aligned}
\prod_{i\in\omega}\omega^{\omega+i} &= \sup_{i\in\omega}\prod_{k\in i}\omega^{\omega+i}\\
&= \sup_{i\in\omega}(\omega^{\omega}\cdot\omega^{\omega+1}\cdot\ldots\cdot\omega^{\omega+(i-1)})\\
&= \sup_{i\in\omega}\omega^{\omega+(\omega+1)+\ldots+(\omega+n-1)}\\
&= \sup_{i\in\omega}\omega^{\omega+\omega+(1+\omega)+\ldots+(n-2+\omega)+n-1)}\\
&= \sup_{i\in\omega}\omega^{\overbrace{\underbrace{\omega+\ldots+\omega}_{i\text{ puta}}+n-1)}}\\
&= \sup_{i\in\omega}\omega^{\omega\cdot i+n-1)} = \omega^{\omega^{2}}
\end{aligned}
$$

203. Izračunajte

a) $\prod_{i\in\omega+2}(\omega^2+2^i)$ b) $\prod_{i\in\omega+3}(2\cdot i+\omega)^2$

c) $\prod_{i\in\omega+2}(i+\omega\cdot 2+i)$ d) $\prod_{i\in\omega\cdot 2}(2^i+\omega)$

e) $\prod_{i\in\omega+3}\omega\cdot(i+1)^2$ f) $\prod_{\alpha\in\omega+3}\alpha^\alpha$

g) $\prod_{i\in\omega+3}(i^\omega\cdot 2)$ h) $\prod_{i\in\omega}i^{\omega+i}$

i) $\prod_{i\in\omega}(i\cdot\omega)$ j) $\prod_{i\in\omega+1}\omega^i$

k) $\prod_{i\in\omega+2}(i+\omega\cdot 2+i)$ l) $\prod_{i\in\omega\cdot 2}(2^i+\omega)$

R203.

a) $\omega^{\omega+3}\cdot(\omega+2)$ b) $\omega^{\omega+6}\cdot 2$

c) $\omega^{\omega+2}\cdot 4+\omega^{\omega+1}\cdot 4$ d) $\omega^{\omega\cdot 2}$

204. Izračunajte

a) $\sum_{i\in\omega+1}\prod_{j\in i}(\omega+i)\cdot j$; b) $\sum_{i\in\omega}\prod_{j\in\omega+1}(\omega+i)^j$;

c) $\sum_{i\in\omega+1}\prod_{j\in i}(j+2)^i$; d) $\sum_{i\in\omega}(i+2)^{\prod_{j\in\omega}(j+1)}$.

R204.

a) Uputa:

$$\sum_{i\in\omega+1}\prod_{j\in i}(\omega+i)\cdot j \;=\; \sum_{i\in\omega+1}\alpha_i \;=\; \sum_{i\in\omega}\alpha_i \;+\; \alpha_\omega,$$

gdje je $\alpha_\omega=\omega^\omega$.

b) Uputa: Označimo $\alpha_i=\prod_{j\in\omega+i}(\omega+i)^j$. Računamo α_i.

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \left(\prod_{j\in\omega}(\omega+i)^j\right)\cdot(\omega+i)^\omega \;=\; \left(\prod_{j\in\omega}(\omega+i)^j\right)\cdot i\omega^\omega\\ &= \left(\sup_{n\in\omega}\prod_{j=0}^{n}(\omega+i)^j\cdot\omega\right)\cdot\omega^\omega \;=\; \omega^\omega\cdot\omega^\omega \;=\; \omega^{\omega\cdot 2}\end{aligned}$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\omega}\alpha_i &= \sum_{i\in\omega}\omega^{\omega\cdot 2} \;=\; \sup_{n\in\omega}\sum_{i\in n}\omega^{\omega\cdot 2} \;=\; \sup_{n\in\omega}(\underbrace{\omega^{\omega\cdot 2}+\ldots+\omega^{\omega\cdot 2}}_{n\text{ puta}})\\ &= \sup_{n\in\omega}(\omega^{\omega\cdot 2}\cdot n) \;=\; \omega^{\omega\cdot 2}\cdot\omega \;=\; \omega^{\omega\cdot 2+1}\end{aligned}.$$

c)

$$\sum_{i\in\omega+1}\prod_{j\in i}(j+2)^i \;=\; \sum_{i\in\omega}\prod_{j\in i}(j+2)^i \;+\; \prod_{j\in\omega}(j+2)^\omega$$

Računamo dva izraza.

$$\sum_{i\in\omega}\prod_{j\in i}(j+2)^i \;=\; \sup_{n\in\omega}\sum_{i\in n}\prod_{j\in i}(j+2)^i \;=\; \omega$$

$$\prod_{j\in\omega}(j+2)^{\omega} = \sup_{n\in\omega}\prod_{j\in n}(j+2)^{\omega} = \sup_{n\in\omega}\prod_{j\in n}\omega = \sup_{n\in\omega}\omega^{n} = \omega^{\omega}$$

To znači da je rješenje zadatka $\omega+\omega^{\omega}$, tj. ω^{ω}.

d)

$$\prod_{j\in\omega}(j+1) = \sup_{k\in\omega}\prod_{j\in k}(j+1) = \sup_{k\in\omega}k! = \omega.$$

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\omega}(i+2)^{\prod_{j\in\omega}(j+1)} &= \sum_{i\in\omega}(i+2)^{\omega} = \sup_{j\in\omega}\sum_{i\in j}(i+2)^{\omega}\\ &= \sup_{j\in\omega}(2^{\omega}+3^{\omega}+\ldots+(j+1)^{\omega})\\ &= \sup_{j\in\omega}(\underbrace{\omega+\ldots+\omega}_{j\text{ puta}})\\ &= \sup_{j\in\omega}(\omega\cdot j) = \omega^{2}\end{aligned}$$

205. Izračunajte

a) $\prod_{j\in\omega+1}\sum_{i\in\omega}\omega^{i+j}$

b) $\left(\sum_{i\in\omega}\omega\right)\cdot\left(\prod_{j\in\omega+2}j\right)$

c) $\sum_{i\in\omega+2}\prod_{j\in i}(j+1)(i+1)$

d) $\sum_{i\in\omega+1}\prod_{j\in i}(\omega+(i+1)^{j})$

e) $\sum_{i\in\omega+1}\prod_{j\in\omega+1}(\omega^{2}+\omega\cdot i+j)$

f) $\sum_{i\in\omega+1}\prod_{j\in i}i^{j^{\omega}}$

g) $\sum_{i\in\omega+2}\prod_{j\in i}j\cdot\omega^{i}$

h) $\sum_{i\in\omega+2}\prod_{j\in i}j^{\omega^{i}}$

i) $\sum_{i\in\omega+1}\prod_{j\in i}(j^{i}\cdot i^{j})$

j) $\prod_{i\in\omega+3}\sum_{j\in i}\omega\cdot j$

R205.

a) $\omega^{\omega^{2}+\omega+1}$

b) $\omega^{5}+\omega^{4}$

c) $\omega^{\omega}\cdot(\omega^{2}+\omega\cdot 2+1)$

d) $\omega^{\omega}\cdot 2$

206. Izračunajte

a) $\sum_{i\in\omega+1}(i+1)^{\omega+i}$

b) $\sum_{i\in\omega+2}\prod_{j\in i}(i\cdot(j+2)^{\omega})$

c) $\sum_{i\in\omega\cdot 3}(i^{3}+3^{i})$

d) $\sum_{i\in\omega+1}(i+1)^{\omega+1}$

e) $\sum_{i\in\omega}(i+2)^{\prod_{j\in\omega}(j+1)}$

f) $\sum_{i\in\omega+2}\omega^{i}$ i $\sum_{i\in\omega+2}i^{\omega}$

g) $\sum_{i\in\omega\cdot 2}\sum_{j\in i+1}(3+i+(j+1)^{\omega})$

h) $\sum_{i\in\omega+22}\sum_{j\in i}\omega^{j}\cdot i^{\omega}$

i) $\sum_{i\in\omega+1}\omega^{i}$

R206.

a) $\omega^{\omega\cdot 2}$

b) $\omega^{\omega\cdot 2}$

c) $\omega^{4}\cdot 2$

d) $\omega^{\omega+1}+\omega^{\omega}$

e) ω^{2}

207. Odredite Cantorovu normalnu formu za $2^{\omega\cdot\alpha+\beta}$ ako je β konačan.

R207. Imamo $2^{\omega\cdot\alpha+\beta} = (2^\omega)^\alpha \cdot 2^\beta = \omega^\alpha \cdot 2^\beta$, što je Cantorova normalna forma jer je za konačan β i 2^β konačan.

208. Odredite Cantorovu normalnu formu ordinalnog broja

$$(\omega\cdot 2+1)(\omega+1)\cdot 3.$$

R208. Primjenom distributivnosti dobivamo:

$$\begin{aligned}(\omega\cdot 2+1)(\omega+1)3 &= [(\omega\cdot 2+1)\cdot\omega+\omega\cdot 2+1]3\\ &= [\sup_{n\in\omega}((\omega\cdot 2+1)\cdot n)\ +\ \omega\cdot 2+1]\cdot 3 \qquad\qquad (*)\end{aligned}$$

Odredimo prvo $\sup\limits_{n\in\omega}((\omega\cdot 2+1)\cdot n)$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\omega}\ &((\omega\cdot 2+1)\cdot n) =\\ &= \sup_{n\in\omega}(\underbrace{(\omega\cdot 2+1)+(\omega\cdot 2+1)+\ldots+(\omega\cdot 2+1)}_{n \text{ puta}})\\ &= \sup_{n\in\omega}(\omega\cdot 2+(1+\omega\cdot 2)+\ldots+(1+\omega\cdot 2)+1)\\ &= \sup_{n\in\omega}(\omega\cdot 2+\ldots+\omega\cdot 2+1)\\ &= \sup_{n\in\omega}(\omega\cdot 2\cdot n+1) = \omega^2\end{aligned}$$

Iz ovog posljednjeg i $(*)$ slijedi

$$\begin{aligned}(\omega\cdot 2+1)(\omega+1)\cdot 3 &= (\omega^2+\omega\cdot 2+1)\cdot 3\\ &= (\omega^2+\omega\cdot 2+1)+(\omega^2+\omega\cdot 2+1)+(\omega^2+\omega\cdot 2+1)\\ &= \omega^2+\omega\cdot 2+(1+\omega^2)+\omega\cdot 2+(1+\omega^2)+\omega\cdot 2+1\\ &= \omega^2+\omega\cdot 2+\omega^2+\omega\cdot 2+\omega^2+\omega\cdot 2+1\\ &= \omega^2+(\omega\cdot 2+\omega^2)+(\omega\cdot 2+\omega^2)+\omega\cdot 2+1\\ &= \omega^2+\omega\cdot(2+\omega)+\omega\cdot(2+\omega)+\omega\cdot 2+1\\ &= \omega^2+\omega^2+\omega^2+\omega\cdot 2+1\\ &= \omega^2\cdot 3+\omega\cdot 2+1\end{aligned}$$

209. Nađite Cantorovu normalnu formu za

$$\omega\cdot(\omega+1)\cdot(\omega^2+1)$$

R209.

$$\omega(\omega+1)(\omega^2+1) = (\omega^2+\omega)(\omega^2+1) = (\omega^2+\omega)\omega^2+\omega^2+\omega =$$
$$\sup_{\alpha\in\omega^2}((\omega^2+\omega)\cdot\alpha)\ +\ \omega^2+\omega = \omega^4+\omega^2+\omega$$

210. Odredite Cantorovu normalnu formu ordinalnog broja:

a) $3^{\sum\limits_{i\in\omega\cdot 3} 3^i}$

b) $2\cdot\omega(\omega+1)(\omega+2)$

c) $123456789^{\alpha+\omega+5}$, gdje je $\alpha=\prod_{i\in\omega+2} i^{i^\omega+1}$

d) $99^{\prod\limits_{i\in\omega\cdot 2}(i+1)+3}$

R210.

a) Suma iznosi ω^3, pa je Cantorova normalna forma ω^{ω^2}.

b) $\omega^3+\omega^2\cdot 2+\omega$

211. Odredite Cantorovu normalnu formu broja $\omega+2^\alpha$, gdje je

$$\alpha=\sum_{i\in\omega+2}\prod_{j\in i}\left(2\cdot(j+1)^i\right).$$

212. Dokažite da je ekvivalentno:

a) $\alpha=\omega\cdot\alpha$;

b) postoji β takav da je $\alpha=\omega^\omega\cdot\beta$.

R212. Ako vrijedi a), onda koristeći Cantorovu normalnu formu za α, gdje je

$$\alpha=\omega^{\gamma_0}m_0+\omega^{\gamma_1}m_1+\ldots+\omega^{\gamma_n}m_n,$$

dobivamo

$$\alpha=\omega\cdot\alpha=\omega^{1+\gamma_0}m_0+\omega^{1+\gamma_1}m_1+\ldots+\omega^{1+\gamma_n}m_n.$$

Zbog jedinstvenosti Cantorove normalne forme slijedi da je $1+\gamma_j=\gamma_j$ za sve $j=0,\ldots,n$ pa su svi $\gamma_j\geq\omega$ (očigledno za konačan γ ne vrijedi $1+\gamma=\gamma$). Stoga po (♡) iz rješenja zadatka 178 imamo da je $\gamma_j=\omega+\delta_j$ (za svaki j postoji takav δ_j) te imamo

$$\alpha=\omega^{\omega+\delta_0}m_0+\omega^{\omega+\delta_1}m_1+\ldots+\omega^{\omega+\delta_n}m_n=\omega^\omega\cdot(\omega^{\delta_0}m_0+\omega^{\delta_1}m_1+\ldots+\omega^{\delta_n}m_n)$$

te uz $\beta=\omega^{\delta_0}m_0+\omega^{\delta_1}m_1+\ldots+\omega^{\delta_n}m_n$ dobivamo b).

Obrnuto, ako vrijedi b), onda je $\omega\cdot\alpha=\omega\cdot\omega^\omega\cdot\beta=\omega^{1+\omega}\cdot\beta=\omega^\omega\cdot\beta$.

213. Niz ordinalnih brojeva $(\alpha_i : i\in\omega)$ definiran je s:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \omega\\ \alpha_{i+1} &= (\alpha_i)^\omega\end{aligned}$$

Označimo $\epsilon_0=\sup\{\alpha_i : i\in\omega\}$. Dokažite da je $\omega^{\epsilon_0}=\epsilon_0$.

R213. Indukcijom je lako dokazati da za sve $i \in \omega \setminus \{0\}$ vrijedi $\omega^{\alpha_i} = \alpha_i^\omega$:
Očito vrijedi $\omega^{\alpha_0} = \omega^\omega = \alpha_0^\omega$. Pretpostavimo da za neki $i \in \omega$ vrijedi $\omega^{\alpha_i} = \alpha_i^\omega$. Tada imamo

$$\omega^{\alpha_{i+1}} = \omega^{\omega^{\alpha_i}} = \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}} = \alpha_{i+1}^\omega$$

Sada je

$$\omega^{\epsilon_0} = \sup\{\omega^{\alpha_i} : i \in \omega\} = \sup\{\alpha_i^\omega : i \in \omega\} = \sup\{\alpha_{i+1} : i \in \omega\} = \epsilon_0$$

Uočimo da je $\epsilon_0^\omega = \epsilon_0$, jer imamo

$$\epsilon_0^\omega = \sup\{\alpha_i^\omega : i \in \omega\} = \sup\{\alpha_{i+1} : i \in \omega\} = \epsilon_0$$

214. Dokažite da su svi beskonačni ordinalni brojevi do uključivo ϵ_0 prebrojivi skupovi.

R214. Najmanji beskonačni ordinalni broj je ω, i po definiciji je prebrojiv. Ordinalni brojevi $\omega+1,\ \omega+2,\ \ldots\omega+n, \ldots\omega+\omega, \ldots, \omega\cdot n$ su očito prebrojivi skupovi. Pošto je $\omega \times \omega$ prebrojiv skup tada iz $\omega\cdot\omega = o(\omega\times\omega)$ slijedi da je i $\omega\cdot\omega$ također prebrojiv skup. Pošto za sve $n \in \omega \setminus \{0\}$ vrijedi $\omega^n = o(\underbrace{\omega \times \ldots \times \omega}_{n})$ tada je i svaki ordinalni broj oblika ω^n prebrojiv skup. Tada zbog

$$\omega^\omega \;=\; \sup\{\omega^n : n \in \omega\} \;=\; \bigcup_{n\in\omega} \omega^n$$

slijedi da ω^ω možemo prikazati kao prebrojivu uniju prebrojivih skupova, pa je i ordinalni broj ω^ω prebrojiv. Na isti način, zbog

$$\omega^{\omega^\omega} \;=\; \sup\{\omega^{\omega^n} : n \in \omega\} \;=\; \bigcup_{n\in\omega} \omega^{\omega^n},$$

slijedi da je skup ω^{ω^ω} prebrojiv, a onda i $\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}$.
Pošto je po definiciji

$$\epsilon_0 = \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}} \;=\; \sup\{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}} : n \in \omega\} \;=\; \bigcup_{n\in\omega} \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}},$$

tada imamo da je ϵ_0 prikazan kao prebrojiva unija prebrojivih skupova, pa zaključujemo da je ϵ_0 prebrojiv skup.

5 Aksiom izbora

5.1 Primjeri iz Osnova matematike

215. Neka je $\mathfrak{F}$ neka familija skupova. Označimo:

$$c(\mathfrak{F}) = \{f\ :\ f \text{ je funkcija, } Dom(f) \in \mathfrak{F},\ (\forall S \in Dom(f))\ f(S) \in S\}$$

Možemo shvatiti da je skup $c(\mathfrak{F})$ parcijalno uređen inkluzijom (čitatelja pozivamo da se podsjeti da su funkcije definirane kao relacije, odnosno Kartezijevi produkti skupova pa skup $c(\mathfrak{F})$ ima smisla parcijalno urediti inkluzijom). Dokažite da za svaki $f \in c(\mathfrak{F})$vrijedi:

> funkcija f je maksimalni element u skupu $c(\mathfrak{F})$ ako i samo ako je f funkcija izbora za familiju $\mathfrak{F}$, tj. za funkciju f vrijedi $Dom(f) = \bigcup \mathfrak{F} \setminus \{\emptyset\}$.

R215. Neka je $f \in c(\mathfrak{F})$ proizvoljna funkcija. Primijetimo prvo da tada $\emptyset \notin Dom(f)$ (inače bi po definiciji skupa $c(\mathfrak{F})$ imali $f(\emptyset) \in \emptyset$).

Pretpostavimo prvo da $Dom(f) \neq \bigcup \mathfrak{F} \setminus \{\emptyset\}$. Budući da je $Dom(f) \in \mathfrak{F}$ te $\emptyset \notin Dom f$, vrijedi da je $Dom f \subseteq \bigcup \mathfrak{F} \setminus \{\emptyset\}$. Dakle, ne vrijedi obratna inkluzija pa zaključujemo da postoji $S \in (\bigcup \mathfrak{F} \setminus \emptyset)$ i $S \notin Dom(f)$. Pošto je $S \neq \emptyset$, tada postoji $x \in S$. Primijetimo da je funkcija $f \cup \{(S,x)\} \in c(\mathfrak{F})$ strogo veća od f što je kontradikcija sa činjenicom da je f maksimalna funkcija u $c(\mathfrak{F})$.

Neka je $Dom(f) = \bigcup \mathfrak{F} \setminus \{\emptyset\}$. Neka je $g \in c(\mathfrak{F})$ takva da vrijedi $f \subseteq g$, odnosno ako naglasimo činjenicu da su f i g relacije, imamo $Dom(f) \times Rng(f) \subseteq Dom(g) \times Rng(g)$. Posebno je $\bigcup(F) = Dom(f) \subseteq Dom(g)$, no jer jer $Dom(g) \subseteq \bigcup(F)$, zaključujemo da je $Dom(f) = Dom(g)$. Neka je $x \in Rng(g)$ proizvoljan. Tada postoji $A \in Dom(g) = Dom(f)$ takav da je $(A,x) \in g$. Međutim jer je $A \in Dom(f)$, postoji $y \in Rng(f)$ takav da je $(A,y) \in f$. Ali $f \subseteq g$ povlači da je $(A,x) \in g$ i (A,y) pa iz funkcijskog svojstva relacije g slijedi $x = y$, to jest $x \in Rng(f)$. Budući da je x bio proizvoljan slijedi $Rng(g) \subseteq Rng(f)$, a obrnuta inkluzija je trivijalna posljedica inkluzije $f \subseteq g$. Dakle, pokazali smo $Dom(f) = Dom(g)$ i $Rng(f) = Rng(g)$ pa zaključujemo da je $f = g$. Budući da je funkcija g bila proizvoljna, zaključujemo da je f maksimalan element u $c(\mathfrak{F})$.

216. Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne s aksiomom izbora:

a) Neka je $A \neq \emptyset$. Tada postoji funkcija $f : \mathscr{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ takva da je $f(B) \in B$, za sve $\emptyset \neq B \subseteq A$.

b) Neka je $A \neq \emptyset$ i $\mathscr{A} = \{A_i : i \in I\}$ neka particija skupa A. Tada postoji funkcija $g : \mathscr{A} \to A$ takav da je $g(A_i) \in A_i$, za sve $i \in I$.

R216. Redom ćemo dokazati sljedeće implikacije: $[AC] \Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow [AC]$.

$[AC] \Rightarrow$ a) Neka je A proizvoljan neprazan skup. Definiramo familiju skupova $\mathscr{A} = \{B \times \{B\} : B \in \mathscr{P}(A) \setminus \{\emptyset\}\}$. Očito je to familija nepraznih skupova koji su u parovima disjunktni. Iz aksioma izbora slijedi da postoji skup $\mathscr{B}$ tako da je za svaki $B \in \mathscr{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ presjek $\mathscr{B} \cap B \times \{B\}$ jednočlan skup. Za svaki $B \in \mathscr{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ neka je $\mathscr{B} \cap B \times \{B\} = \{(b, B)\}$. Definiramo funkciju $f : \mathscr{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ sa $f(B) = b \in B$ pa vrijedi da f ima traženo svojstvo.

a) $\Rightarrow$ b) Neka je $A \neq \emptyset$ i $\mathscr{A} = \{A_i : i \in I\}$ neka particija skupa A. Iz (a) slijedi da postoji funkcija $f : \mathscr{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ takva da vrijedi $f(B) \in B$, za sve $B \in \mathscr{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$. Budući da je za svaki $i \in I$ skup $A_i \in \mathscr{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$, tada za sve $i \in I$ vrijedi $f(A_i) \in A_i$. To znači da za restrikciju funkcije f na $\mathscr{A}$ vrijedi traženo svojstvo.

b) $\Rightarrow [AC]$ Neka je $\mathscr{A} = \{A_i : i \in I\}$ neprazna familija nepraznih skupova koji su u parovima disjunktni. Označimo $A = \cup_{i \in I} A_i$. Uočimo da je $\mathscr{A}$ jedna particija skupa A. Tada po pretpostavci postoji funkcija $g : \mathscr{A} \to A$ takva da je $g(A_i) \in A_i$, za sve $i \in I$. Tada je $B = \{g(A_i) : i \in I\}$ jedan izborni skup za familiju $\mathscr{A}$.

217. Dokažite da je sljedeća tvrdnja ekvivalentna sa Zornovom lemom:

> Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup u kojem svaki neprazan lanac ima donju među. Tada skup A sadrži barem jedan minimalni element.

R217. Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup čiji svaki lanac ima donju među. Promotrimo dualni uređaj od $<$, tj. relaciju $<^*$ definiranu s

$$a <^* b \quad \text{ako i samo ako} \quad b < a.$$

Pretpostavimo da vrijedi Zornova lema. Neka je $L \subseteq A$ neprazan lanac u odnosu na uređaj $<$ koji ima donju među. Primijetimo da je L također i lanac u odnosu na uređaj $<^*$, ali je sada ograničen odozdo. Dakle, proizvoljan neprazan lanac u $(A, <^*)$ ima gornju među pa po Zornovoj lemi slijedi da za skup A postoji maksimalni element u odnosu na uređaj $<^*$. No, to je onda minimalni element u odnosu na uređaj $<$.

Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja zadatka. Neka je $L \subseteq A$ neprazan lanac u odnosu na uređaj $<$ koji ima gronju među. Primijetimo da je L također i lanac u odnosu na uređaj $<^*$, ali je sada ograničen odozgo. Dakle, proizvoljan neprazan lanac u $(A, <^*)$ ima donju među pa po pretpostavci slijedi da za skup A postoji minimalni element u odnosu na uređaj $<^*$. No, to je onda maksimalni element u odnosu na uređaj $<$.

218. Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup u kojem svaki lanac ima gornju (donju) među. Neka je $x_0 \in A$ proizvoljan. Dokažite da postoji maksimalan (minimalan) $y \in A$ takav da je $y \geq x_0$ $(y \leq x_0)$.

R218. Promotrimo skup $B = \{x \in A : x \geq x_0\}$ te uređaj $<$ na njemu naslijeđen s A. Neka je L proizvoljan neprazan lanac u B. Primjetimo da je L također i lanac u A pa po pretpostavci ima gornju među $z \in A$. Budući da je L neprazan, postoji $x \in L$. Međutim imamo $x_0 \le x \le z$ pa slijedi $z \ge x_0$, odnosno $z \in B$. Zbog proizvoljnosti od L, slijedi da svaki neprazan lanac u B ima gornju među u B. Primjenom Zornove leme, sada slijedi da u B postoji maksimalan element y, a po definiciji skupa B vrijedi da je y maksimalan element u A za koji je $y \ge x_0$.

Dokaz trdnje za minimalni slijedi iz zadatka 217 te blage modifikacije dokaza za maksimalni element.

219. Dokažite da Zornova lema povlači aksiom izbora.

R219. Iz zadatka 216 znamo da je aksiom izbora ekvivalentan sa sljedećom tvrdnjom:

> Za svaku particiju $\mathscr{A} = \{A_i : i \in I\}$ nekog nepraznog skupa A postoji funkcija $g : \mathscr{A} \to A$ tako da za svaki $i \in I$ vrijedi $g(A_i) \in A_i$.

Dokazujemo da Zornova lema povlači navedenu tvrdnju. Neka je A proizvoljan neprazan skup i $\mathscr{A} = \{A_i : i \in I\}$ neka particija skupa A. Neka je

$$\mathfrak{F} = \{f : \mathscr{B} \to A : \mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}, \forall B \in \mathscr{B}, f(B) \in \mathscr{B}\}.$$

Uzmimo proizvoljan $A_i \in \mathscr{A}$ te stavimo $\mathscr{B} = \{A_i\}$. Budući da je A_i element particije $\mathscr{A}$, vrijedi da je neprazan pa postoji $a \in A_i$. Definiramo funkciju $f : \mathscr{A} \to A$ sa $f(A_i) = a$. Vrijedi $f \in \mathfrak{F}$, pa je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Za komentar o uspoređivanju funkcija inluzijom, pogledajte tekst zadatka 215.

Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ proizvoljan neprazan lanac. Označimo $\mathscr{D} = \cup\{Dom(f) : f \in L\}\ \}$. Budući da je za svaku $f \in L$, $Dom(f) \subseteq \mathscr{A}$Vrijedi da je $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{A}$. Označimo $F : \mathscr{D} \to A$ funkciju koja je definirana ovako: ako je $B \in \mathscr{D}$ tada postoji funkcija $f \in L$ takva da je $B \in Dom(f)$, tada neka je $F(B) = f(B)$.

Pokažimo da je F dobro definirana. Neka je $B \in \mathscr{D}$ proizvoljan skup za koji vrijedi $B \in Dom(f)$ i $B \in Dom(g)$ za neke $f, g \in L$. Budući da je L lanac, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da vrijedi $f \subseteq g$. Tada posebno vrijedi $Dom(f) \subseteq Dom(g)$ pa slijedi $(B, f(B)), (B, g(B)) \in g$. Budući da je g funkcijska relacija, vrijedi $f(B) = g(B)$, odakle slijedi dobra definiranost funkcije F.

Primijetimo da iz definicije funkcije F odmah slijedi $F(B) \in B$, no to znači da je $F \in \mathfrak{F}$.

Pokažimo još da je B gornja međa lanca L. Neka je $h \in L$ proizvoljna. Tvrdimo da vrijedi $h \subseteq F$. Neka je $(B, h(B)) \in h$ proizvoljan. Tada je posebno $B \in Dom(h) \subseteq \mathscr{D}$. No, tada iz definicije funkcije F slijedi $F(B) = h(B)$ pa je posebno $(B, h(B)) \in F$. Budući da je $(B, h(B))$ bio proizvoljan element iz h, slijedi $h \subseteq F$.

Iz Zornove leme slijedi da skup $\mathfrak{F}$ sadrži barem jedan maksimalan element. Neka je $g : \mathscr{B} \to A$ jedan maksimalni element skupa $\mathfrak{F}$. Pretpostavimo da je $\mathscr{A} \setminus \mathscr{B} \neq \emptyset$. Neka je $A_j \in \mathscr{A} \setminus \mathscr{B}$ proizvoljan. Napominjemo ponovno da je A_j element particije te je stoga neprazan pa postoji $a \in A_j$. Definiramo $g' = g \cup \{((A_j, a))\}$. Svakako je $g' \in \mathfrak{F}$ te je $g \subset g'$, pa slijedi da g nije maksimalni element od $\mathfrak{F}$ što je kontradikcija. Zaključujemo da je $\mathscr{B} = \mathscr{A}$ pa je naš maksimalni element g po konstrukciji točno funkcija koju smo željeli pronaći.

220. Neka je E skup i $\mathscr{J} \subseteq \mathscr{P}(E)$. Kažemo da je familija $\mathscr{J}$ konačnog karaktera ako za sve $A \subseteq E$ vrijedi sljedeća ekvivalencija: $A \in \mathscr{J}$ ako i samo ako svaki konačni podskup od A je element od $\mathscr{J}$. Za proizvoljni skup F označimo

$$\mathscr{F}(F) = \{A \subseteq \mathscr{P}(F) : (\forall x, y \in A)(x \cap y = \emptyset \text{ ili } x = y)\}.$$

Dokažite da je za svaki skup F familija $\mathscr{F}(F)$ konačnog karaktera.

R220. Neka je $A \subseteq \mathscr{P}(E)$ proizvoljan. Pokazat ćemo da vrijedi: $A \in \mathscr{F}(F)$ ako i samo ako za svaki konačni $B \subseteq A$ vrijedi $B \in \mathscr{F}(F)$. Napominjemo da u našem slučaju u definiciji konačnog karaktera uzimamo da je $E = \mathscr{P}(F)$, a ne $E = F$!

Pretpostavimo najprije da vrijedi $A \in \mathscr{F}(F)$. Neka je $B \subseteq A$ konačan te neka su $x, y \in B$ proizvoljni. Posebno vrijedi $x, y \in A$, no onda iz pretpostavke odmah slijedi $x \cap y = \emptyset$ ili $x = y$. Budući da su x i y bili proizvoljni elementi iz B, slijedi da je $B \in \mathscr{F}(F)$.

Pretpostavimo da za proizvoljan konačni podskup B od A vrijedi da je $B \in \mathscr{F}(F)$. Pokazat ćemo da je $A \in \mathscr{F}(F)$. Neka su $x, y \in A$ proizvoljni. Vrijedi da je $C = x, y$ konačan podskup od A pa po pretpostavci slijedi da su njegovi elementi ili disjunktni ili jednaki, no to točno znači da vrijedi $x \cap y = \emptyset$ ili $x = y$. Budući da su x i y bili proizvoljni, slijedi da je $A \in \mathscr{F}(F)$.

221. Teichmüller–Tukeyeva lema glasi: Ako je $\mathscr{J} \subseteq \mathscr{P}(E)$ neprazna familija konačnog karaktera tada familija $\mathscr{J}$ sadrži barem jedan maksimalni element (obzirom na inkluziju).

Dokažite da Hausdorffov princip maksimalnosti povlači Teichmüller–Tukeyevu lemu.

R221. Neka je E neki skup i $\mathscr{J} \subseteq \mathscr{P}(E)$ neka familija konačnog karaktera.

Neka je $e \in E$ proizvoljan. Očito je $\{e\} \in \mathscr{J}$ (jer familija $\mathscr{J}$ sadrži svaki konačan podskup od E.) Skup $\{e\}$ je očito jedan lanac parcijalno uređenog skupa $(\mathscr{J}, \subset)$. Iz Hausdorffova principa maksimalnosti slijedi da postoji maksimalni lanac L u $\mathscr{J}$ koji sadrži $\{e\}$.

Sada promatramo dva slučaja:

(i) Postoji $m \in L$ koji je najveći element.

Tada za svaki $l \in L$ vrijedi $l \subseteq m$. Ako je $n \in \mathscr{J}$ takav da vrijedi $\{e\} \subseteq m \subset n$, tada je $L \cup \{n\}$ lanac koji sadrži $\{e\}$ te vrijedi $L \subset L \cup \{n\}$ što je kontradikcija s makismalnošću od L. Slijedi da je m jedan maksimalni element u $\mathscr{J}$.

(ii) Lanac L nema najveći element.

Tada $\bigcup L \notin L$ (jer je $\bigcup L$ jedna gornja međa za L), a onda zbog maksimalnosti od L slijedi $\bigcup L \notin \mathscr{J}$ (inače bi, analogno kao ranije, slijedilo da je $L \cup \{\cup L\}$ lanac koji sadrži $\{e\}$). Iz pretpostavke da je $\mathscr{J}$ familija konačnog karaktera slijedi da postoji konačan $X \subseteq \bigcup L$ takav da $X \notin \mathscr{J}$.

No, iz $X \subseteq L$ i činjenice da je L lanac koji ne posjeduje najveći element, slijedi da postoji $Y \in L$ takav da je $X \subseteq Y$. Iz $Y \in L$ i $L \subseteq \mathscr{J}$ slijedi $Y \in \mathscr{J}$. Budući da je $\mathscr{J}$ konačnog karaktera te je X konačan podskup od Y, tada je $X \in \mathscr{J}$, što je kontradikcija s gornjim odlomkom. To znači da je ovaj slučaj nemoguć.

222. Dokažite da Teichmüller–Tukeyeva lema povlači Zornovu lemu.

R222. Neka je $(A,<)$ parcijalno uređen skup čiji svaki lanac ima gornju među. Označimo sa $\mathscr{L}$ skup svih lanaca od A. Primijetimo da za svaki $L \subseteq A$ vrijedi:

L je lanac ako i samo ako svaki konačan podskup od L je lanac.

Naime, ukoliko je L lanac te je S proizvoljan konačni podskup od L, onda za proizvoljne $x, y \in S$ vrijedi da su posebno i elementi iz L pa onda vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$. Dakle, S je lanac. Ukoliko pak vrijedi da je svaki konačni podskup od L lanac, onda za $x, y \in L$ proizvoljne, po pretpostavci vrijedi da je $\{x, y\}$ lanac pa vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$. Dakle, L je lanac

Po definiciji slijedi da je $\mathscr{L}$ familija konačnog karaktera. Iz Teichmüller–Tukeyeve leme slijedi da postoji lanac L u A koji je maksimalni element od $\mathscr{L}$. Po pretpostavci parcijalno uređen skup A zadovoljava uvjet Zornove leme, tj. za svaki lanac od A postoji gornja međa u A. Neka je $a \in A$ gornja međa za L. Primijetimo da je nužno $a \in L$, jer je inače $L \cup \{a\}$ lanac koji je pravi nadskup od L, što je u suprotnosti s pretpostavkom da je L maksimalni element u A. Ako bi postojao $b \in A$ takav da je $b > a$, tada bi $L \cup \{b\}$ bio lanac koji je pravi nadskup od L, što je opet u suprotnosti s maksimalnočću od L. To znači da je a jedan maksimalni element od A.

223. Za podskup A parcijalno uređenog skupa $(S,<)$ kažemo da je konfinalan ako vrijedi $(\forall x \in S)(\exists a \in A)(x \leq a)$. Dokažite da svaki totalno uređen skup sadrži konfinalan dobro uređen podskup.

R223. Neka je $(S,<)$ proizvoljan neprazan totalno uređen skup. Neka je $\mathfrak{F} = \{B \subseteq S : B$ je dobro uređen u odnosu na restrikciju relacije $<\}$. Budući da je npr. $\emptyset \in \mathfrak{F}$ tada je $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Na skupu $\mathfrak{F}$ definiramo relaciju $\prec$ sa:

$$X \prec Y \text{ ako i samo ako } X \text{ je početni komad od } Y.$$

Očito je $(\mathfrak{F}, \prec)$ neprazan parcijalno uređen skup. Želimo dokazati da $(\mathfrak{F}, \prec)$ ispunjava uvjet Zornove leme. U tu svrhu izaberimo proizvoljan neprazan lanac L od $\mathfrak{F}$. Tvrdimo da je $\cup L$ element od $\mathfrak{F}$. Najprije pokažimo da je $\cup L$ totalno uređen. Neka su $x, y \in \cup L$ proizvoljni. Tada postoje $L_1, L_2 \in L$ takvi da je $x \in L_1$ te $y \in L_2$. Budući da je L lanac, bez smenjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da vrijedi $L_1 \subseteq L_2$. Dakle, $x, y \in L_2 \subseteq S$, a kako je S totalno uređen skup, vrijedi da je $x \leq y$ ili $y \leq x$. Budući da su x i y bli proizvoljni, slijedi da je $\cup L$ totalno uređen.

Dokažimo da je $\cup L$ dobro uređen skup. Neka je Y proizvoljan neprazan podskup od $\cup L$. Tada očito postoji $X \in L$ takav da je $Y \cap X \neq \emptyset$ (jer je Y neprazan, postoji $y \in Y$, a jer je $Y \subseteq \cup L$ postoji $X \in L$ takav da je $y \in X$. Dakle $X \cap Y = \{y\} \neq \emptyset$). Budući da je X dobro uređen skup tada njegov neprazni podskup $Y \cap X$ ima najmanji element; označimo ga s y_0.

Tvrdimo da je y_0 najmanji element skupa Y,. Ukoliko je $Y = \{y_0\}$, gotovi smo. Inače, pokazat ćemo da za sve $z \in Y \setminus \{y_0\}$ vrijedi $y_0 < z$. Neka je $z \in Y \setminus \{y_0\}$ proizvoljan. Pošto je $Y \subseteq \cup L$ tada postoji $X' \in L$ takav da je $z \in X'$. Iz pretpostavke da je L lanac u $\mathfrak{F}$ slijedi da vrijedi jedno od: $X \prec X'$ ili $X = X'$ ili $X' \prec X$.

Pretpostavimo prvo da je $X' \prec X$. Ako bi vrijedilo $z < y_0$ tada iz $z, y_0 \in Y \cap X$ slijedi da je z manji od najmanjeg elementa iz $Y \cap X$, što je nemoguće. To znači da u ovom slučaju mora vrijediti $y_0 \leq z$, a jer $z \in Y \setminus \{y_0\}$, zaključujemo da vrijedi $y_0 < z$.

Ako je $X = X'$ tada iz $z \in Y \cap X$, te činjenice da je y_0 najmanji element od $Y \cap X$, slijedi da je y_0 manji od z.

Ako je $X \prec X'$ tada je po definiciji X početni komad od X', pa je nužno $y_0 < z$.

Iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $(\mathfrak{F}, \prec)$ sadrži barem jedan maksimalni element. Neka je A neki maksimalni element od $\mathfrak{F}$. Dokažimo da je A kofinalan podskup od S. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $x \in S$ tako da za svaki $a \in S$ vrijedi $a < x$ (skup S je po pretpostavci totalno uređen!). No, tada je $A \cup \{x\}$ dobro uređen skup, i pravi je nadskup skupa A, što je kontradikcija s činjenicom da je A maksimalni element skupa $\mathfrak{F}$.

224. Neka je A neki neprazan skup, te R proizvoljna relacija na A. Dokažite da postoji minimalna relacija ekvivalencije na skupu A koja proširuje relaciju R.

R224. Neka je $\mathfrak{F} = \{R' \subseteq A \times A : R'$ je relacija ekvivalencije, te $R \subseteq R'\}$. Budući da je $A \times A$ relacija ekvivalencije tada je $A \times A \in \mathfrak{F}$. To znači da je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ neki neprazan lanac. Lako je provjeriti da je $\cap L$ relacija ekvivalencije koja proširuje relaciju R. To znači da je $\cap L$ jedna donja međa lanca L. Iz varijante Zornove leme iz zadatka 217, slijedi da $\mathfrak{F}$ sadrži barem jedan minimalni element.

(Čitatelja pozivamo da razmisli je li za rješenje ovog zadatka zaista bilo nužno koristi Zornovu lemu.)

225. Neka je A proizvoljan neprazan skup. Definiramo

$$\mathfrak{F} = \{X \subseteq \mathscr{P}(A) : \text{elementi skupa } X \text{ su međusobno disjunktni}\}.$$

Dokažite da familija $\mathfrak{F}$ sadrži maksimalni element obzirom na relaciju inkluzije.

R225. Budući da je A neprazan, postoji $a \in A$ pa slijedi da je $\{\{a\}\} \in \mathfrak{F}$. Dakle, $(\mathfrak{F}, \subset)$ je neprazan parcijano uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ neki neprazan lanac. Ako $x, y \in \cup L$ tada postoje $X, Y \in L$ tako da je $x \in X$ i $y \in Y$. Budući da je L lanac, tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $X \subseteq Y$. Tada imamo $x, y \in Y$. Budući da je $L \subseteq \mathfrak{F}$ i $Y \in L$ tada $Y \in \mathfrak{F}$, pa je $x \cap y = \emptyset$. Dakle, $\cup L \in \mathfrak{F}$, a očito je $\cup L$ jedna gornja međa za lanac L. Iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $(\mathfrak{F}, \subset)$ sadrži barem jedan maksimalni element.

226. Dokažite da postoji maksimalna familija $\mathscr{F}$ podskupova danog nepraznog skupa S u kojoj su elementi u parovima disjunktni, a unija svaka dva elementa je sadržana u toj istoj familiji (tj. vrijedi $(\forall a, b \in \mathscr{F})\ \ (a \cap b = \emptyset \ \text{ i } \ a \cup b \in \mathscr{F})$).

R226. Definiramo

$$\mathfrak{F} = \{\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(A) : (\forall a, b \in \mathscr{F})\ (a \cap b = \emptyset\ ,\ a \cup b \in \mathscr{F})\}.$$

Budući da je S neprazan, postoji $s \in S$ pa slijedi da je $\{\{s\}\} \in \mathfrak{F}$. Dakle, $(\mathfrak{F}, \subset)$ je neprazan parcijano uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ neki neprazan lanac. Ako $a, b \in \cup L$ tada postoje $A, B \in L$ tako da je $a \in A$ i $b \in B$. Budući da je L lanac, tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $A \subseteq B$. Tada imamo $a, b \in B$. Budući da je $L \subseteq \mathfrak{F}$ i $B \in L$ tada $B \in \mathfrak{F}$, pa je $a \cap b = \emptyset$ te $a \cup b \in B \subseteq \cup L$. Dakle, $\cup L \in \mathfrak{F}$, a očito je $\cup L$ jedna gornja međa za lanac L. Iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $(\mathfrak{F}, \subset)$ sadrži barem jedan maksimalni element $\mathscr{F}$, a to je upravo maksimalna familija koju smo tražili.

227. Neka je $(A, \prec)$ parcijalno uređen skup koji nije totalno uređen. Dokažite da postoje barem dva maksimalna lanca u A.

R227. Budući da A nije totalno uređen tada postoje a i b u skupu A koji nisu usporedivi. Neka je L_a skup svih lanaca u A koji sadrže a, te neka je L_b skup svih lanaca u A koji sadrže b. Očito su skupovi $(L_a, \subset)$ i $(L_b, \subset)$ neprani parcijalno uređeni skupovi.

Neka su $L_1 \subseteq L_a$ i $L_2 \subseteq L_b$ proizvoljni neprazni lanci. Očito je $\cup L_1 \in L_a$ gornja međa lanca L_1, te $\cup L_2 \in L_b$ gornja međa lanca L_2. Pokažimo još da je $\cup L_1 \in L_a$. Kako je a element svakog skupa iz L_a te kako je $L_1 \subseteq L_a$, slijedi da je $a \in \cup L_1$. Neka su $x, y \in \cup L_1$ proizvoljni. Tada postoje $X, Y \in L_1$ takvi da je $x \in X$ i $y \in Y$. Budući da je L_1 lanac (obzirom na relaciju $\subseteq$), bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $X \subseteq Y$. Dakle, $x, y \in Y$, no kako je Y lanac (obzirom na relaciju $\prec$), slijedi da je $x \prec y$ ili $y \prec x$. Kako su x i y bili proizvoljni, slijedi da je $\cup L_1$ lanac. Potpuno analogno se pokazuje da je i $\cup L_2$ lanac.

Primjenom Zornove leme slijedi da parcijalno uređeni skupovi $(L_a, \subset)$ i $(L_b, \subset)$ sadrže maksimalne elemente L', odnosno L''. Budući da a i b nisu usporedivi. vrijedi $a \in L'$, te $b \notin L'$. Zatim, $a \notin L''$ i $b \in L''$. Iz toga slijedi da su L' i L'' dva različita maksimalna lanca u skupu A.

228. Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup. Za $S \subseteq A$ kažemo da je potpuno neuređen ako za sve $x, y \in S$, $x \neq y$, vrijedi da nisu usporedivi, tj. ne vrijedi $x < y$, a ni $y < x$. Dokažite da za svaki parcijalno uređen skup postoji maksimalan (u smislu relacije inkluzije) potpuno neuređen podskup.

R228. Neka je $(A, <)$ proizvoljan neprazan parcijalno uređen skup. Označimo: $\mathfrak{F} = \{S \subseteq A :$ skup S je potpuno neuređen$\}$. Primijetimo prvo da je $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, jer $\mathfrak{F}$ npr. sadrži sve jednočlane podskupove skupa A. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ proizvoljan neprazan lanac. Vrijedi da je $\cup L$ jedna gornja međa skupa L obzirom na relaciju inkluzije. Pokažimo štoviše da je ta gornja međa element iz $\mathfrak{F}$. Neka su $x, y \in \cup L$ proizvoljni. Tada postoje $X, Y \in L$ takvi da je $x \in X$ i $y \in Y$. Budući da je L lanac, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $X \subseteq Y$. Dakle, $x, y \in Y$, no kako je Y potpuno neuređen, slijedi da ne vrijedi $x < y$ ni $y < x$. Zbog proizvoljnosti od x i y slijedi $\cup L \in \mathfrak{F}$. Primjenom Zornove leme zaključujemo da $(\mathfrak{F}, \subset)$ sadrži barem jedan maksimalan element.

229. Neka je $(A, <)$ neprazan totalno uređen skup. Za $B \subseteq A$ kažemo da je u sebi gust ako za sve $x, y \in B$ takve da je $x < y$, postoji $z \in B$ takav da je $x < z < y$. Dokažite da u svakom totalno uređenom skupu postoji bar jedan maksimalan u sebi gust podskup.

R229. Neka je $(A,<)$ proizvoljan totalno uređen skup. Označimo $\mathfrak{F} = \{B \subseteq A : B$ je u sebi gust$\}$. Budući da je $\emptyset \in \mathfrak{F}$ tada je $(\mathfrak{F},\subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ neki neprazan lanac. Dokažimo da je skup $\cup L$ u sebi gust. Neka su $x, y \in \cup L$ takvi da je $x < y$. Tada postoje $X, Y \in L$ takvi da je $x \in X$ i $y \in Y$. Budući da je L lanac tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $X \subseteq Y$. Tada imamo $x, y \in Y$. No, kako je Y u sebi gust, tada postoji $z \in Y \subseteq \cup L$ takav da je $x < z < y$. Budući da su x i y bili proizvoljni, dokazali smo da je $\cup L \in \mathfrak{F}$, a svakako vrijedi da je $\cup L$ gornja međda skupa L. Iz Zornove leme slijedi da $\mathfrak{F}$ sadrži barem jedan maksimalni element, odnosno A ima barem jedan maksimalni u sebi gust podskup.

230. Neka je R relacija na nekom skupu X. Dokažite da postoji maksimalna antisimetrična relacija na X koja je disjunktna s R.

R230. Neka je $\mathfrak{F} = \{S : S$ je antisimetrična relacija na skupu X, $R \cap S = \emptyset\}$. Pošto je $\emptyset \in \mathfrak{F}$ tada je $(\mathfrak{F},\subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ neki neprazan lanac. Dokažimo prvo da je $\cup L$ antisimetrična relacija na skupu X. Neka je $(x, y) \in \cup L$. Tada postoji $Y \in L$ takav da je $(x, y) \in Y$. Pošto je $Y \in L \subseteq \mathfrak{F}$, tada je Y antisimetrična relacija. To znači da iz $(x, y) \in Y$ slijedi $x = y$. Očito je $\cup L \cap R = \emptyset$. To znači da je $\cup L$ jedna gornja međa lanca L. Iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $\mathfrak{F}$ ima barem jedan maksimalni element. Neka je S jedan maksimalni element od $\mathfrak{F}$. Iz definicije skupa $\mathfrak{F}$ slijedi da je S antisimetrična relacija, te da je $R \cap S = \emptyset$.

231. Neka je A neki neprazan skup, te $F_1 \subseteq \mathscr{P}(A)$ i $F_2 \subseteq \mathscr{P}(A)$ dvije particije skupa A. Ako za svaki $y \in F_2$ postoji $x \in F_1$ tako da vrijedi $y \subseteq x$, te vrijedi $F_1 \neq F_2$, tada kažemo da je particija F_2 finija od particije F_1, i pišemo $F_1 \prec F_2$. Lako je vidjeti da je relacija $\prec$ jedna relacija parcijalnog uređaja (vidi i zadatak 140). Dokažite da za svaki neprazan skup postoji minimalna i maksimalna particija u odnosu na relaciju $\prec$.

R231. Lako je provjeriti da je, za svaki neprazan skup A, familija svih jednočlanih podskupova najveća, tj. najfinija particija, a $\{A\}$ najmanja particija.

232. Dokažite da za svaki neprazan skup A postoji maksimalna particija skupa koja ne sadrži zadani neprazni pravi podskup $X \subset A$ (uređaj među particijama je definiran u prethodnom zadatku).

R232. Ako skup X nije jednočlan tada je familija svih jednočlanih podskupova skupa A maksimalna particija koja ne sadrži X. Ako je X jednočlan, tada prvo odaberemo neki $y \in A \setminus X$. Tada je lako provjeriti da je $\{X \cup \{y\}\} \cup \{\{z\} : z \in A \setminus (X \cup \{y\})\}$ jedna maksimalna particija koja ne sadrži skup X.

233. Dokažite da za svaki beskonačan skup A postoji particija $\{A_i : i \in I\}$ takva da je $A_i \sim \mathbb{N}$, za sve $i \in I$.

R233. Neka je $\mathfrak{F} = \{(B,\mathfrak{B}) \ : \ B \subseteq A,\ \mathfrak{B}$ je particija od B čiji je svaki član prebrojiv$\}$. Iz aksioma izbora slijedi da svaki beskonačan skup sadrži prebrojiv podskup. Tada postoji $B \subseteq A$

koji je prebrojiv. Tada očito $(B, \{B\}) \in \mathfrak{F}$, pa imamo $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Na skupu $\mathfrak{F}$ definiramo relaciju $\prec$ ovako:

$$(B, \mathfrak{B}) \prec (B', \mathfrak{B}') \qquad \text{ako i samo ako} \qquad B \subset B' \ \text{ i } \ (\forall y \in \mathfrak{B}')(\exists x \in \mathfrak{B})(y \subseteq x).$$

Lako je provjeriti da je $(\mathfrak{F}, \prec)$ parcijalno uređen skup. Neka je $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$ proizvoljni neprazni lanac, pri čemu $\mathfrak{L} = \{(L_j, \mathfrak{L}_j) : j \in J\}$, gdje je J neki skup indeksa. Definiramo $G = \bigcup_{j \in J} L_j$. Zatim, neka je $\mathfrak{G} = \{\bigcap_{j \in J} A_j : A_j \in \mathfrak{L}_j, \text{ i } \bigcap_{j \in J} A_j \text{ je prebrojiv}\}$.

Očito je $G \subseteq A$. Dokažimo da je $\mathfrak{G}$ jedna particija skupa G. Po definiciji familije $\mathfrak{G}$ imamo da je svaki član familije neprazan (jer je prebrojiv). Neka su $\bigcap A_j, \ \bigcap B_j \in \mathfrak{G}$ različiti. Tada postoji $i \in J$ tako da je $A_i \neq B_i$. No, vrijedi i $A_i \cap B_i = \emptyset$, jer su A_i i B_i elementi particije $\mathfrak{L}_i$, pa su dijsunktni. Iz toga odmah slijedi $(\bigcap A_j) \cap (\bigcap B_j) = \emptyset$. Preostalo je dokazati da je $\cup \mathfrak{G} = G$. Očito vrijedi $\cup \mathfrak{G} \subseteq G$. Neka je $x \in G$ proizvoljan. Treba dokazati da za svaki $j \in J$ postoji skup $A_j \in \mathfrak{L}_j$ tako da vrijedi $x \in A_j$, te je skup $\cap A_j$ prebrojiv. Pošto je po definiciji $G = \cup L_j$ tada postoji $i \in J$ takav da je $x \in L_i$. Pošto je $\mathfrak{L}_i$ particija skupa L_i tada postoji $A_i \in \mathfrak{L}_i$ takav da je $x \in A_i$.

Neka je $(L_j, \mathfrak{L}_j) \in \mathfrak{L}$ proizvoljan. Pošto je $\mathfrak{L}$ lanac tada vrijedi

$$(L_j, \mathfrak{L}_j) \preceq (L_i, \mathfrak{L}_i) \ \text{ ili } \ (L_i, \mathfrak{L}_i) \preceq (L_j, \mathfrak{L}_j).$$

Ako je $(L_j, \mathfrak{L}_j) \preceq (L_i, \mathfrak{L}_i)$ tada po definiciji relacije $\prec$ posebno za skup $A_i \in \mathfrak{L}_i$ postoji $A_j \in \mathfrak{L}_j$ tako da vrijedi $A_i \subseteq A_j$.

Ako je $(L_i, \mathfrak{L}_i) \prec (L_j, \mathfrak{L}_j)$ tada zbog $L_i \subset L_j$ i $x \in L_i$ slijedi $x \in L_j$. Pošto je $\mathfrak{L}_j$ particija tada postoji $A_j \in \mathfrak{L}_j$ takav da je $x \in A_j$. Iz definicije relacije $\prec$ i $(L_i, \mathfrak{L}_i) \prec (L_j, \mathfrak{L}_j)$ tada slijedi da je nužno $A_j \subseteq A_i$.

Za ovako izabrane $j \in J$ očito vrijedi $x \in \cap A_j$. Lako je vidjeti da je skup $\cap A_j$ prebrojiv.

Očito za sve $(L_j, \mathfrak{L}_j) \in \mathfrak{L}$ vrijedi $(L_j, \mathfrak{L}_j) \preceq (G, \mathfrak{G})$. Time smo dokazali da za proizvoljni lanac od $\mathfrak{F}$ postoji gornja međa. Sada iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređeni skup $(\mathfrak{F}, \prec)$ sadrži maksimalni element. Lako je vidjeti da je svaki maksimalni element parcijalno uređenog skupa $(\mathfrak{F}, \prec)$ jedna tražena particija skupa A.

234. Neka je $R \subseteq A \times B$ neka relacija, koja ima svojstvo da joj je domena jednaka skupu A (tj. za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ tako da vrijedi $a \, R \, b$). Dokažite da postoji funkcija $f : A \to B$ takva da je $f \subseteq R$.

R234. Za svaki $a \in A$ označimo $B_a = \{b : a \, R \, b\}$. Neka je $\mathscr{A} = \{B_a : a \in A\}$. Očito je $\mathscr{A}$ familija nepraznih skupova (koji nisu nužno u parovima disjunktni). Iz aksioma izbora (točnije iz zadatka 216) slijedi da postoji funkcija $f : A \to B$ takva da za svaki $a \in A$ vrijedi $f(a) \in B_a$. Tada je očito $f \subseteq R$.

235. Dokažite da je funkcija $f : A \to B$ surjekcija ako i samo postoji funkcija $g : B \to A$ tako da vrijedi $f \circ g = id_B$.

R235. Neka je $f : A \to B$ surjekcija. To znači da je za svaki $y \in B$ skup $f^{-1}[\{y\}] \neq \emptyset$. Tada je $\{f^{-1}[\{y\}] : y \in B\}$ jedna particija skupa A. Iz aksioma izbora (točnije iz zadatka 216 b). slijedi da postoji funkcija $g : B \to \cup_{y \in B} f^{-1}[\{y\}]$ $(= A)$, tako da za svaki $y \in B$ vrijedi $g(y) \in f^{-1}[\{y\}]$. Lako je provjeriti da je $f \circ g = id_B$. Obratna tvrdnja direktno slijedi.

236. Dokažite da za svaku funkciju $f : A \to B$ postoji skup C, te postoji injekcija $g : A \to C$ i surjekcija $h : C \to B$ tako da vrijedi $f = h \circ g$.

237. Za proizvoljnu funkciju $h : A \to B$, relaciju $\{(x, y) : h(x) = h(y)\}$ nazivamo jezgrom funkcije h i označavamo je s $\ker h$. Dokažite da je funkcija $f : A \to B$ je surjekcija ako i samo ako za svaku funkciju $g : A \to C$, za koju je $\ker f \subseteq \ker g$, postoji funkcija $h : B \to C$ tako da vrijedi $h \circ f = g$.

238. Za zadanu injekciju $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, i proizvoljnu funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dokažite da postoji maksimalno proširenje $F : S \to \mathbb{R}$ od f koje je injektivno i takvo da je $F(x) = g(x)$ za sve $x \in S \setminus I$.

5.2 Primjeri iz Algebre

239. Neka je G grupa i $x \in G$ različit od neutralnog elementa. Dokažite da tada postoji podgrupa H od G koja ne sadrži x, te ne postoji podgrupa K od G tako da bi vrijedilo $x \notin K$ i $H \subset K$.

R239. Neka je s e označen neutralni element grupe G. Označimo s $\mathscr{A}$ skup

$$\{A : A \text{ je podgrupa od } G \text{ i vrijedi } e \notin A\}.$$

Pošto je $\{e\} \in \mathscr{A}$ tada $\mathscr{A} \neq \emptyset$. Očito je $(\mathscr{A}, \subset)$ parcijalno uređen skup. Neka je L lanac u $\mathscr{A}$. Definirajmo $A_0 = \cup_{A \in L} A$. Očito $x \notin A_0$. Pokažimo da je A_0 podgrupa od G. Neka su $a, b \in A_0$ proizvoljni. Tada postoje $A_1, A_2 \in L$ takvi da je $a \in A_1$ i $b \in A_2$. No, L je lanac, pa vrijedi $A_1 \subset A_2$ ili $A_2 \subset A_1$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $A_1 \subset A_2$. Tada vrijedi $a, b \in A_2$. No, onda je $ab^{-1} \in A_2$, a tada i $ab^{-1} \in A_0$. Time je pokazano da za svaki lanac L u $\mathscr{A}$ postoji gornja međa. Iz Zornove leme slijedi da u parcijalno uređenom skupu $(\mathscr{A}, \subset)$ postoji maksimalni element.

240. Neka je G monoid i $x \in G$ njegov element koji nije neutralni. Dokažite da postoji maksimalni (u smislu inkluzije) podmonoid H od G takav da $x \notin H$.

241. Neka je $n \geq 4$ proizvoljan prirodan broj, te neka je A_n neki pravilni n-terokut u ravnini. Označimo sa Rot_n grupu svih rotacija ravnine koje preslikavaju n-terokut A_n u samog sebe. Dokažite da postoji maksimalna podgrupa od Rot_n koja ne sadrži rotaciju za $6\pi/n$.

R241. Neka je $\mathfrak{F} = \{S : S$ je podgrupa grupe Rot_n koja ne sadrži rotaciju za $6\pi/n\}$. Ako je s e označen neutralni element grupe Rot_n (to je identiteta na A_n) tada očito $\{e\} \in \mathfrak{F}$. To znači da je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ proizvoljan neprazan lanac.

Dokažimo prvo da je $\cup L$ grupa, tj. podgrupa od Rot_n. Neka su $x, y \in \cup L$ proizvoljni. Tada postoje $X, Y \in L$ tako da je $x \in X$ i $y \in Y$. Pošto je L lanac tada bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je $X \subseteq Y$. Tada imamo $x, y \in Y$. No, pošto je Y grupa tada je $x \cdot y^{-1} \in Y$, a onda je i $x \cdot y^{-1} \in \cup L$.

Očito grupa $\cup L$ ne sadrži rotaciju za $6\pi/n$. Iz svega do sada dokazano slijedi da je $\cup L$ jedna gornja međa za lanac L u parcijalno uređenom skupu $(\mathfrak{F}, \subset)$. Iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $(\mathfrak{F}, \subset)$ sadrži barem jedan maksimalan element.

242. Neka je V vektorski prostor i $v \in V$ različit od nulvektora. Dokažite da tada postoji vektorski potprostor W od V koji ne sadrži v, te za W ne postoji vektorski potprostor U od V tako da bi vrijedilo $v \not\in U$ i $W \subset U$.

R242. Neka je $\mathfrak{F} = \{W : W$ je potprostor od V tako da $v \not\in W\}$. Označimo s 0 nulvektor prostora V. Pošto je $\{0\} \in \mathfrak{F}$ tada $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Neka je L neki neprazan lanac u parcijalno uređenom skupu $(\mathfrak{F}, \subset)$. Dokažimo prvo da je $\cup L$ vektorski potprostor od V. Neka su $x, y \in \cup L$, te α i β iz pripadnog polja. Tada postoje $X, Y \in L$ tako da vrijedi $x \in X$ i $y \in Y$. Pošto je L lanac tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $X \subseteq Y$. Tada imamo $x, y \in Y$, a pošto je Y vektorski potprostor tada je $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in Y$. Sada iz $Y \in L$ slijedi $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \cup L$. Očito $v \not\in \cup L$. Time imamo $\cup L \in \mathfrak{F}$. Lako je vidjeti da je $\cup L$ jedna gornja međa lanca L. Iz Zornove leme slijedi da postoji maksimalan element W u parcijalno uređenom skupu $(\mathfrak{F}, \subset)$.

243. Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Dokažite da se svaki linearno nezavisan podskup S od V može proširiti do baze vektorskog prostora V.

R243. Neka je $\mathfrak{F} = \{S' : S'$ je linearno nezavisan, $S \subseteq S'\}$. Pošto je $S \in \mathfrak{F}$ tada je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan totalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ neki neprazan lanac. Očito je $S \subseteq \cup L$. Dokažimo sada da je $\cup L$ linearno nezavisan skup. Neka je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ proizvoljan konačan podskup od $\cup L$. Tada postoje $B_{i_1}, \ldots, B_{i_n} \in L$ takvi da je $v_j \in B_{i_j}$. Pošto je L lanac u $\mathfrak{F}$ tada postoji $i_0 \in \{i_1, \ldots, i_n\}$ tako da za svaki $j \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi $B_{i_j} \subseteq B_{i_0}$. Tada imamo $v_1, \ldots, v_n \in B_{i_0}$. Pošto $B \in \mathfrak{F}$, tada je B linearno nezavisan, pa je i skup $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linearno nezavisan. To znači da je $\cup L$ jedna gornja međa skupa L. Iz ornove leme slijedi da paricjalno uređeni skup $\mathfrak{F}$ sadrži barem jedan maksimalni element.

244. Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Neka je $X \subseteq V$ neki skup izvodnica za V. Dokažite da postoji baza vektorskog prostora V koja je sadržana u X.

R244. Neka je $\mathfrak{F} = \{B \subseteq X : B$ je linearno nezavisan $\}$. Očito je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je L neki neprazan lanac od $\mathfrak{F}$. Sasvim na isti način kao u rješenju prethodnog zadatka dokazali bi da je skup $\cup L$ linearno nezavisan. To znači da je $\cup L$ jedna gornja međa za lanac L. Primjenom Zornove leme slijedi da skup A sadrži barem jedan maksimalni element C. Lako je vidjeti da je C baza vektorskog prostora V.

5.3 Primjeri iz Topologije, Funkcionalne i Realne Analize

245. Neka je H proizvoljan Hilbertov prostor (tj. potpun unitarni prostor) nad poljem F. Linearno nezavisan podskup B od H nazivamo baza Hilbertova prostora ako za svaki $x \in H$ postoji niz (x_n) vektora iz B, te postoji niz (α_n) elemenata polja F, tako da vrijedi $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \cdot x_n$. Za bazu B kažemo da je ortogonalna ako za sve $x, y \in B,\ x \neq y$, vrijedi $x \cdot y = 0$. Dokažite da za svaki Hilbertov prostor postoji ortogonalna baza.

246. Neka je V vektorski prostor nad poljem F, W njegov pravi potprostor, te $f : W \to V$ linearan operator. Dokažite da postoji proširenje g operatora f tako da vrijedi:

a) postoji W' potprostor od V tako da je $\mathrm{Dom}(g) = W'$

b) proširenje $g : W' \to V$ je linearni operator

c) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$

d) funkcija g je maksimalna od svih proširenja od f koja ima svojstva a), b) i c).

R246. Označimo $\mathfrak{F} = \{h :$ postoji potprostor W' od V tako da je $h : W' \to V$ linearan operator za koji vrijedi $f \subseteq h$ i $Ker(f) = Ker(h)\}$. Pošto je $f \in \mathfrak{F}$ tada je $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Očito je $(\mathfrak{F}, \subset)$ parcijalno uređen skup. Neka je $L = \{g_i : W_i \to V | i \in I\} \subseteq \mathfrak{F}$ proizvoljan neprazan lanac. Označimo s h funkciju $\cup_{i \in I} g_i$, tj. funkciju čija je domena $\cup_{i \in I} W_i$, a kodomena V, te koja je za $x \in W_i$ definirana sa $h(x) = g_i(x)$. Primijetite da je definicija funkcije h dobra, jer je L lanac.

Dokažimo prvo da je $\cup_{i \in I} W_i$ potprostor od V. Neka su $x, y \in \cup_{i \in I} W_i$, te $\alpha, \beta \in F$ proizvoljni. Tada postoje $i, j \in I$ tako da vrijedi $x \in W_i$, te $y \in W_j$. Pošto je po pretpostavci L lanac tada vrijedi $W_i \subseteq W_j$ ili $W_j \subseteq W_i$. Radi odreenosti neka je $W_i \subseteq W_j$. Tada imamo $x, y \in W_j$. Pošto je po pretpostavci W_j potprostor tada vrijedi $\alpha x + \beta y \in W_j$, a onda i $\alpha x + \beta y \in \cup_{i \in I} W_i$.

Dokažimo sada da je funkcija h linearni operator. Neka su $x, y \in \cup_{i \in I} W_i$, te $\alpha, \beta \in F$ proizvoljni. Tada postoje $i, j \in I$ tako da vrijedi $x \in W_i$, te $y \in W_j$. Pošto je po pretpostavci L lanac tada vrijedi $W_i \subseteq W_j$ ili $W_j \subseteq W_i$. Radi odreenosti neka je $W_i \subseteq W_j$. Tada imamo $x, y \in W_j$. No, funkcija $g_j : W_j \to V$ je po pretpostavci linearni operator. Tada imamo:

$$h(\alpha x + \beta y) \ = \ g_j(\alpha x + \beta y) \ = \ \alpha g_j(x) + \beta g_j(y) \ = \ \alpha h(x) + \beta h(y)$$

Očito je h proširenje funkcije f, te je $Ker(h) = Ker(f)$. Time imamo da je h jedna gornja međa skupa $\mathfrak{F}$.

Primjenom Zornove leme slijedi da za parcijalno uređen skup $(\mathfrak{F}, \subset)$ postoji barem jedan maksimalni element.

247. Neka je $V \neq \{0\}$ vektorski prostor i $f : V \to V$ neinjektivan linearan operator. Dokažite da postoji maksimalan potprostor W od V sa svojstvom da je $W \cap Ker f$ jednodimenzionalan potprostor od V.

R247. Označimo $\mathfrak{F} = \{W : W$ je potprostor od V takav da je $W \cap Ker(f)$ jednodimenzionalan potprostor od $V\}$. Pošto je po pretpostavci zadatka linerani operator f neinjektivan tada je $Ker(F)$ netrivijalan potprostor od V. Za proizvoljan $v \in Ker(F)$, koji nije nulvektor, potprostor razapet s v pripada $\mathfrak{F}$. To znači da je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{f}$ proizvoljan neprazan lanac. Lako je provjeriti da je $\cup L$ vektorski potprostor od V (na isti način kao u rješenju prethodnog zadatka). Iz toga slijedi da svaki neprazni lanac u $\mathfrak{F}$ ima gornju među. Iz Zornove leme slijedi da da $\mathfrak{F}$ sadrži barem jedan maksimalni element.

248. Neka je $V \neq 0$ vektorski prostor i W njegov netrivijalan potprostor. Dokažite da postoji maksimalan potprostor U od V sa svojstvom da je $W \cap U$ jednodimenzionalan.

R248. Neka je $\mathfrak{F} = \{U : U$ je potprostor od V, $dim(U \cap W) = 1.\}$ Pošto po pretpostavci zadatka potprostor W netrivijalni, tada postoji $x \in W$ koji nije nulvektor. Očito je potprostor od V generiran s x jedan element od $\mathfrak{F}$. Dakle, $(\mathfrak{F}, \subset)$ je neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ neki neprazan lanac. Dokažimo prvo da je $\cup L$ vektorski potprostor od V. Neka su $x, y \in \cup L$, te α i β proizvoljni skalari. Tada postoje $X, Y \in L$ takvi da je $x \in X$ i $y \in Y$. Pošto je L lanac tada možemo pretpostaviti da vrijedi $X \subseteq Y$. Tada imamo $x, y \in Y$. Pošto je Y potprostor tada $\alpha x + \beta y \in Y$, a onda i $\alpha x + \beta y \in \cup L$. Kako bi mogli zaključiti da je $\cup L \in \mathfrak{F}$ moramo još provjeriti da je $dim(W \cap (\cup L)) = 1$. Pošto za svaki $X \in L$ vrijedi $dim(W \cap X) = 1$ tada je očito $dim(W \cap (\cup L)) \geq 1$. Kako bi dokazali da vrijedi i obratna nejednakost, dokažimo da su svaka dva vektora $x, y \in W \cap (\cup L)$ linearno zavisna. Analogno kao prije zajključili bi da postoji $Y \in L$ takav da je $x, y \in Y$. Pošto je $Y \in \mathfrak{F}$ tada je $dim(W \cap Y) = 1$. Sada iz $x, y \in W \cap Y$ slijedi da su vektori x i y linearno zavisni. Primjenom Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $(\mathfrak{F}, \subset)$ sadrži barem jedan maksimalni element.

249. Promatrajmo skup ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{C}$ kao vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ (uz standardno zbrajanje funkcija i množenje skalarom). Dokažite da postoji maksimalni potprostor vektorskog prostora ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{C}$ koji ne sadrži funkciju $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiranu sa $f(z) = 17z^2 + 19z + 23$.

R249. Neka je $\mathfrak{F} = \{W : W$ je potprostor od ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{C}$ takav da $f \notin W\}$. Neka je $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funkicja definirana s $g(x) = 0$. Pošto je $\{g\}$ vektorski potprostor od ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{C}$, te $f \notin \{g\}$, tada $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Neka je L neprazan lanac u parcijalno uređenom skupu $(\mathfrak{F}, \subset)$. Lako je vidjeti da je $\cup L$ vektorski potprostor od ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{C}$ koji ne sadrži funkciju f. To znači da je $\cup L \in \mathfrak{F}$. Zatim, očito je $\cup L$ gornja međa lanca L. Iz Zornove leme slijedi da postoji barem jedan maksimalni element od $\mathfrak{F}$.

250. Neka je X proizvoljan skup. Za familiju skupova $\mathfrak{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ kažemo da je algebra skupova na X ako vrijedi

(i) $\emptyset \in \mathfrak{A}$

(ii) ako $A \in \mathfrak{A}$ tada $X \setminus A \in \mathfrak{A}$

(iii) ako $A, B \in \mathfrak{A}$ tada $A \cup B \in \mathfrak{A}$

Dokažite da postoji maksimalna algebra skupova na $\mathbb{R}$ koja ne sadrži skup $\mathbb{Q}$.

R250. Neka je $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{A} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$ je algebra skupova, $\mathbb{Q} \notin \mathfrak{A}\}$. Lako je provjeriti da je $\{\emptyset, \mathbb{R}\}$ algebra skupova nad $\mathbb{R}$ koja ne sadrži $\mathbb{Q}$. To znači da je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ neki neprazan lanac. Provjerimo prvo da je $\cup L$ algebra skupova nad skupom $\mathbb{R}$. Pošto je $\emptyset \in X$, za svaki $Y \in L$, tada je očito $\emptyset \in \cup L$. Neka je $A \in \cup L$ proizvoljan. Tada postoji algebra skupova $Y \in L$ takva da je $A \in Y$. Tada je $\mathbb{R} \setminus A \in Y$, a onda je i $\mathbb{R} \setminus A \in \cup L$. Neka su $A, B \in \cup L$ proizvoljni. Tada postoje $Y, Z \in L$ takvi da je $A \in Y$ i $B \in Z$. Pošto je L lanac tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $Y \subseteq Z$. Tada $A, B \in Z$. No, Z je algebra skupova, pa je $A \cup B \in Z$, a onda i $A \cup B \in \cup L$. Očito $\mathbb{Q} \notin \cup L$. Time smo dokazali da je $\cup L$ jedna gornja međa lanca L. Iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup sadrži barem jedan maksimalni element.

251. Neka je X neprazan skup. Kažemo da je neprazna familija $\mathfrak{I} \subseteq \mathscr{P}(X)$, $\mathfrak{I} \neq \mathscr{P}(X)$, ideal na skupu X ako vrijedi:

(i) $(\forall A, B \in \mathfrak{F})(A \cup B \in \mathfrak{I})$

(ii) $(\forall A \in \mathfrak{I})(\forall B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathfrak{I})$

Neka je X neki skup i A neki podskup od X. Dokažite da postoji maksimalni ideal na skupu X koji sadrži A kao element.

R251. Neka je $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I}$ je ideal na X, $A \in \mathfrak{I}\}$. Primijetimo prvo da je $\mathscr{P}(A)$ ideal na skupu X koji sadrži A, pa je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ neki neprazan lanac. Dokažimo prvo da je $\cup L$ ideal na skupu X. Neka su $x, y \in \cup L$ proizvoljni. Tada postoje $X, Y \in L$ takvi da je $x \in X$ i $y \in Y$. Pošto je L lanac tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $X \subseteq Y$. Tada $x, y \in Y$, a pošto je X ideal tada $x \cup y \in Y$, pa onda i $x \cup y \in \cup L$. Na sličan način bi dokazali da je skup $\cup L$ zatvoren za podskupove. Očito je $A \in \cup L$. Iz svega dokazanog slijedi $\cup L \in \mathfrak{F}$, pa je $\cup L$ jedna gornja međa za lanac L u parcijalno uređenom skupu $(\mathfrak{F}, \subset)$. Iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $(\mathfrak{F}, \subset)$ sadrži barem jedan maksimalni element.

252. Neka je X neprazan skup. Kažemo da je familija $\mathfrak{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ filtar na skupu X ako vrijedi:

(i) $\mathfrak{F} \neq \emptyset$

(ii) $(\forall A, B \in \mathfrak{F})(A \cap B \in \mathfrak{F})$

(iii) $(\forall A \in \mathfrak{F})(\forall B \subseteq X)(A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathfrak{F})$

Kažemo da je filtar $\mathfrak{F}$ pravi filtar ako vrijedi $\mathfrak{F} \neq \mathscr{P}(X)$. Dokažite da za svaki neprazan skup X postoji maksimalan pravi filtar na skupu X (obzirom na relaciju inkluzije).

253. Neka je R prsten s jedinicom. Za potprsten $I \subseteq R$ kažemo da je ideal ako vrijedi $I \cdot R \subseteq I$ i $R \cdot I \subseteq I$. Za ideal I kažemo da je pravi ako je $I \neq R$. Za ideal I kažemo da je maksimalan ako ne postoji pravi ideal J tako da vrijedi $I \subset J$. Dokažite da je svaki pravi ideal I od R sadržan u nekom maksimalnom idealu.

254. Dokažite da postoji funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja ima svojstvo

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \text{ za sve } x, y \in \mathbb{R},$$

a nije oblika $f(x) = kx$ za neki $k \in \mathbb{R}$.

R254. Promatramo $\mathbb{R}$ kao vektorski prostor nad poljem $\mathbb{Q}$. Neka je B neka baza za $\mathbb{R}$. (Takva baza B postoji zbog prethodnog zadatka. Navedite jedan skup izvodnica za $\mathbb{R}$ nad poljem $\mathbb{Q}$). Neka je $\alpha \in B$ proizvoljan. Definiramo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tako da je $f(x)$ jednako koordinati koja piše uz α prilikom prikaza realnog broja x pomoću elemenata baze B. Očito je funkcija f linearni operator, pa posebno vrijedi $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Funkcija f nije nul-funkcija, jer je npr. $f(\alpha) = 1$. Pošto je $Rng(f) \subseteq \mathbb{Q}$ tada je za svaki $k \in \mathbb{R}$ funkcija f različita od funkcije $x \mapsto kx$.

255. Dokažite da za svako polje postoji algebarski zatvoreno proširenje.

R255. v. Komjath, Totik str. 312

256. Neka je $O \subseteq \mathbb{R}$ neki otvoren skup. Dokažite da postoji $U \subseteq O$ otvoren skup tako da vrijedi:

a) ako $x, y \in U$ tada $x + y \in U$

b) ako $V \subseteq O$ otvoren skup koji ima svojstvo a) tada ne vrijedi $U \subset V$ (tj. U je maskimalan otvoreni podskup skupa O koji ima svojstvo a).

R256. Neka je A skup svih otvorenih podskupova skupa O koji imaju svojstvo a). Očito je $(A, \subset)$ parcijalno uređen skup. Neka je L proizvoljan neprazan lanac u A. Pokažimo da je $\cup L$ gornja međa za L. Skup $\cup L$ je otvoren, jer je unija otvorenih skupova. Zatim, očito vrijedi $\cup L \subseteq O$. Preostalo je još samo provjeriti da je skup $\cup L$ ima svojstvo a), tj. da vrijedi $\cup L \in A$. Neka $x, y \in \cup L$ proizvoljni. Tada postoje $L_1, L_2 \in L$ takvi da je $x \in L_1$ i $y \in L_2$. Pošto je L lanac tada možemo uzeti da vrijedi $L_1 \subseteq L_2$. Tada imamo $x, y \in L_2$. Pošto je $L_2 \in A$ tada $x + y \in L_2$, a onda imamo i $x + y \in \cup L$. Primjenom Zornove leme slijedi da skup A sadrži barem jedan maksimalni element.

257. Dokažite da postoji maksimalni (u smislu inkluzije) neprazni podskup skupa $\mathbb{R}$ koji je zatvoren na množenje, i ne sadrži niti jedan prirodan broj.

R257. Zadatak se može standardno riješiti primjenom Zornove leme. No, nije teško vidjeti da skup $\langle -1, 1\rangle \setminus \{0\}$ ima tražena svojstva.

258. Za neprazan skup $B \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je balansiran ako za sve $x, y \in B$ vrijedi $\frac{x+y}{2} \in B$. Dokažite da postoji maksimalni balansirani podskup od $\mathbb{R}$ koji je disjunktan sa $\mathbb{Q}$.

259. Za $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ kažemo da je aritmetički poluzatvoren ako za sve $x, y \in A$ vrijedi $x + y \in A$ ili $x \cdot y \in A$ (može i oboje). Dokažite da postoji maksimalni (u smislu relacije inkluzije) aritmetički poluzatvoreni skup koji je disjunktan sa skupom $\mathbb{P}$ svih prostih brojeva.

R259. Neka je $\mathfrak{F} = \{A \subseteq \mathbb{N}$ aritmetički poluzatvoren, te $A \cap \mathbb{P} = \emptyset\}$. Pošto je npr. $\{0\} \in \mathfrak{F}$ tada je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ proizvoljan neprazan lanac.

Dokažimo prvo da je $\cup L$ aritmetički poluzatvoren skup. Neka su $x, y \in \cup L$ proizvoljni. Tada postoje $X, Y \in L$ tako da je $x \in X$ i $y \in Y$. Pošto je L lanac tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $X \subseteq Y$. Tada su $x, y \in Y$. Pošto je po pretpostavci skup Y aritmetički poluzatvoren tada je $x + y \in Y$ ili $x \cdot y \in Y$. No, onda je očito $x + y \in \cup L$ ili $x \cdot y \in \cup L$.

Dokažimo sada da vrijedi $\cup L \cap \mathbb{P} = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno. Neka je $x \in \cup L \cap \mathbb{P}$ proizvoljan. Tada postoji $X \in L$ takav da je $x \in X$. Time imamo $x \in X \cap \mathbb{P}$. No, to je nemoguće zbog $X \in L \subseteq \mathfrak{F}$, i definicije skupa $\mathfrak{F}$.

Iz svega sada dokazanog slijedi da je $\cup L$ jedna gornja međa lanca L u parcijalno uređenom skupu $(\mathfrak{F}, \subset)$. Iz Zornove leme slijedi da postoji maksimalni element u parcijalno uređenom skupu $(\mathfrak{F}, \subset)$.

260. Za skup $K \subseteq \mathbb{R}^3$ kažemo da je konveksan ako za svake dvije točke $P = (x_1, y_1, z_1)$ i $Q = (x_2, y_2, z_2)$ iz skupa K, i svaki $t \in [0, 1]$, vrijedi

$$(tx_1 + (1-t)x_2,\ ty_1 + (1-t)y_2,\ tz_1 + (1-t)z_2) \in K.$$

Za konveksan skup $K \subseteq \mathbb{R}^3$ kažemo da je konvkesna ljuska nekog skupa S ako je K minimalan konveksan skup koji sadrži S. Dokažite da za svaki podskup S od $\mathbb{R}^3$ postoji njegova konveksna ljuska.

R260. Neka je $\mathfrak{F} = \{K$ je konveksan skup koji sadrži skup $S\}$. Pošto $\mathbb{R}^3 \in \mathfrak{F}$ tada je $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Očito je $(\mathfrak{F}, \subset)$ parcijalno uređen. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ neki neprazan lanac. Lako je provjeriti da je $\cap L$ jedna donja međa lanca L. Iz Zornove leme (točnije iz zadatka 217) slijedi da za $\mathfrak{F}$ postoji minimalni element. Očito je svaki minimalni element od $\mathfrak{F}$ jedna konveksna ljuska skupa S.

261. Neka je S proizvoljan podskup od $\mathbb{R}^2$. Dokažite da postoji bar jedna konveksna skela od S, tj. maksimalni konveksni podskup od S. Navedite primjer nekog podskupa od $\mathbb{R}^2$ za koji konveksna skela nije jedinstvena.

R261. Postojanje slijedi iz Zornove leme.

Neka je $S = \{(0,0), (1,1)\}$. Svaki jednočlani podskup od S je konveksna skela od S.

262. Za skup $A \subseteq \mathbb{R}^2$ kažemo da je putovima povezan ako za svake dvije njegove točke x i y postoji neprekidna funkcija $f : [0,1] \to A$ takva da je $f(0) = x$ i $f(1) = 1$. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^2$ proizvoljan. Dokažite da postoji maksimalan putovima povezan podskup od X.

R262. Neka je $\mathfrak{F} = \{A \subseteq X : A$ je putovima povezan$\}$. Pošto je očito $\emptyset \in \mathfrak{F}$ tada je $(\mathfrak{F}, \subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ proizvoljan neprazan lanac.

Dokažimo prvo da je $\cup L$ putovima povezan skup. Neka su $a, b \in \cup L$ proizvoljni. Tada postoje $A, B \in L$ takvi da je $a \in A$ i $b \in B$. Pošto je L lanac obzirom na relaciju inkluzije, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $A \subseteq B$. Tada je $a, b \in B$. No, pošto je skup

B putovima povezan tada postoji neprekidna funkcija $f:[0,1]\to B$ takva da je $f(0)=a$ i $f(1)=b$. Očito je funkcija $g:[0,1]\to\cup L$ definirana sa $g(x)=f(x)$ neprekidna, te vrijedi $g(0)=a$ i $g(1)=b$. To upravo znači da je skup $\cup L$ povezan putovima.

Pošto je očito $\cup L\subseteq X$ tada imamo da je $\cup L\in\mathfrak{F}$ jedna gornja međa lanca L. Iz Zornove leme slijedi da postoji maksimalni element u parcijalno uređenom skupu $(\mathfrak{F},\subset)$.

263. Neka je $O\subseteq\mathbb{R}$ proizvoljan otvoren skup. Dokažite da postoji minimalan (obzirom na inkluziju) zatvoren podskup od $\mathbb{R}$ koji sadrži O.

R263. Neka je $\mathfrak{F}=\{Z\subseteq\mathbb{R}: Z$ je zatvoren i $O\subseteq Z\}$. Pošto je $\mathbb{R}\in\mathfrak{F}$ tada je $(\mathfrak{F},\subset)$ neprazan parcijalno uređen skup. Neka je $L\subseteq\mathfrak{F}$ proizvoljan neprazan lanac. Znamo da je općenito proizvoljan presjek zatvorenih skupova takoer zatvoren skup. Iz toga posebno slijedi da je $\cap Z$ zatvoren skup. Očito vrijedi $O\subseteq\cap Z$. Time imamo $\cap Z\in\mathfrak{F}$. Očito je $\cap Z$ jedna donja međa lanca L. Iz zadatka 217 slijedi da parcijalno uređen skup $\mathfrak{F}$ sadrži barem jedan minimalni element.

264. Dokažite da postoje $A,B\subseteq\mathbb{R}_+$ tako da vrijedi $A,B\neq\emptyset$, $A\cup B=\mathbb{R}_+$, $A\cap B=\emptyset$, te su skupovi A i B zatvoreni za zbrajanje.

R264. Neka je $\mathfrak{F}=\{(C,D): C,D\subseteq\mathbb{R}_+,\ C,D\neq\emptyset,\ C\cap D=\emptyset$, oba skupa C i D su zatvorena za zbrajanje, te su zatvorena za množenje s pozitivnim racionalnim brojevima $\}$. Uzmemo li $C=\mathbb{Q}\cap\mathbb{R}_+$ i $D=\mathbb{Q}\sqrt{2}\cap\mathbb{R}_+$, tada je lako provjeriti da je $(C,D)\in\mathfrak{F}$. Na skupu $\mathfrak{F}$ definiramo relaciju $\prec$ ovako:

$$(C,D)\prec(C',D')\ \text{ ako i samo ako }\ C\subset C'\ \text{ i }\ D\subset D'$$

Lako je provjeriti da je $(\mathfrak{F},\prec)$ parcijalno uređen skup koji zadovoljava uvjete Zornove leme. Neka je $(A,B)\in\mathfrak{F}$ maksimalni element. Pretpostavimo da $A\cup B\subset\mathbb{R}_+$. Neka je $a\in\mathbb{R}_+\setminus(A\cup B)$. Zbog maksimalnosti para (A,B) slijedi da postoji pozitivan $q\in\mathbb{Q}$ i $x\in A$ tako da je $qa+x\in B$. Analogno, postoji $q'\in\mathbb{Q}$ i $y\in B$ tako da je $q'a+y\in A$. Tada zbog zatvorenosti skupova A i B na množenje s pozitivnim racionalnim brojevima slijedi $qq'a+q'x\in B$ i $qq'a+qy\in A$. No, tada je očito zbog zatvorenosti skupova A i B na zbrajanje ispunjeno $qq'a+q'x+qy\in A\cap B$. Pošto je $(A,B)\in\mathfrak{F}$ tada je posebno $A\cap B=\emptyset$, pa je dobivena kontradikcija.

265.* Dokažite **Teorem Tihonova**: Kartezijev produkt kompaktnih topoloških prostora je kompaktan.

5.4 Zadaci s grafovima

Sada navodimo nekoliko zadataka s grafovima. U tu svrhu ćemo ponoviti neke pojmove vezane uz grafove.

- graf je uređeni par (G,R), gdje je G neprazan skup, a $R\subseteq G\times G$. Elemente skupa G nazivamo vrhovi, a elemente skupa R bridovi.

- za graf kažemo da je povezan ako za svaka dva vrha $v \neq w$ postoji konačan niz vrhova $b_0, \dots, b_n$ tako da vrijedi $vRb_0Rb_1 \dots b_nRw$. Tada konačan niz bridova v, $b_0, \dots$, b_n, w nazivamo put od vrha v do vrha w.
- Ciklus u grafu je put koji ima isti početak i kraj.
- Stablo je povezan graf bez ciklusa.
- Podgraf grafa (G,R) je graf (G',R') tako da vrijedi $G' \subseteq G$ i $R|_{G'\times G'} = R'$

266. Neka je (G,R) graf čija je relacija R simetrična. Bojenje podskupa S od G s dvije boje se definira kao funkcija $f : S \to \{0,1\}$ koja ima svojstvo da xRy povlači $f(x) \neq f(y)$. Dokažite da u svakom nepraznom grafu postoji maksimalni podskup za koji postoji bojenje s dvije boje.

R266. Primijenimo Zornovu lemu na familiju svih podskupova od A za koje postoji bojenje s dvije boje. Pri dokazu da je uniju lanca takvih skupova takoer moguće obojiti s dvije boje potrebno je pripaziti: to da možemo pretpostaviti da su dva elementa unije u istom članu lanca pa se mogu različito obojiti pripadnom funkcijom, ne znači da se točno ta funkcija može proširiti na čitavu uniju.

267. Dokažite da u svakom povezanom grafu postoji razapinjajuće stablo (podgraf koji je stablo i čiji skup vrhova je jednak skupu vrhova polaznog grafa).

R267. Neka je (G,R) povezani graf. Neka je $\mathfrak{F} = \{(S,R') : (S,R')$ je podgraf od (G,R) koji je stablo$\}$. Pošto je svaki jednočlani podgraf očito stablo tada je $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Očito je $(\mathfrak{F},\subset)$ parcijalno uređen skup. Neka je $L \subseteq \mathfrak{F}$ proizvoljan lanac. Očito je $\cup L$ podgraf od (G,R). Dokažimo da je $\cup L$ stablo, tj. povezan graf bez ciklusa. Neka su $v,w \in \cup L$ takvi da je $v \neq w$. Tada postoje $G_1,G_2 \in L$ takvi da je $v \in G_1$ i $w \in G_2$. Pošto je L lanac tada mora vrijediti $G_1 \subseteq G_2$ ili $G_2 \subseteq G_1$. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da vrijedi $G_1 \subseteq G_2$. Tada imamo $v,w \in G_2$. Sada, pošto je $G_2 \in \mathfrak{F}$ tada je G_2 stablo. To znači da u G_2 postoji konačan put od v do w. Očito je to konačan put i u $\cup L$. Time smo dokazali da je $\cup L$ povezan graf. Na sličan način bi dokazali da graf $\cup L$ ne sadrži cikluse. To znači da je $\cup L$ jedna gornja međa lanca L u $\mathfrak{F}$. Iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $\mathfrak{F}$ sadrži barem jedan maksimalni element. Označimo jedan maksimalni element sa S_0. Zatim, označimo sa R' pripadnu relaciju među vrhovima iz S_0.

Preostalo je dokazati da je S_0 razapinjajuće stablo za povezan graf (G,R), tj. da vrijedi $G = S_0$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji vrh $w \in G \setminus S_0$. Neka je $v \in S_0$ proizvoljan vrh. Pošto je po pretpostavci graf G povezan tada postoje vrhovi $v_0, \dots, v_n$ tako da vrijedi $v = v_0\ R\ v_1\ R\ \dots\ R\ v_n = w$. Neka je $k = \min\{i : v_i \not\in S_0\}$. Promotrimo sljedeći graf: $(S_0 \cup \{v_k\},\ R' \cup \{\{v_{k-1}, v_k\}\})$. To je očito podgraf od (G,R) koji je pravi nadgraf od (S_0,R'). Zatim, lako je vidjeti da je to povezan graf bez ciklusa, tj. stablo. Time smo dobili kondradikciju s pretpostavkom da je (S_0,R') maksimalno stablo u (G,R).

268. Neka je (G,R) graf čija je relacija R simetrična. Klika u grafu (G,R) je njegov podgraf s bar dva vrha, koji je potpun (tj. postoji brid između svaka dva vrha podgrafa). Dokažite da svaki graf s bar jednim bridom ima maksimalnu kliku.

269. Königova lema glasi:

> Neka je S stablo koje ima svojstvo da svaki $a \in S$ ima najviše konačno mnogo neposrednih sljedbenika. Tada u S postoji beskonačni lanac.

Dokažite da Zermelov teorem o dobrom uređaju povlači Königovu lemu.

R269. Neka je $(S,<)$ stablo. Po Zermelovu teoremu postoji relacija $\prec$ tako da je $(S,\prec)$ dobro uređen skup. Za $a \in S$ označimo $a' = \{b \in S : b > a\}$. Sada definiramo niz (a_n) u S. Neka je a_1 minimalan element skupa $\{a \in S : a'$ je beskonačan.$\}$ Ako je a_n definiran neka je a_{n+1} najmanji $a \in S$ (u odnosu na uređaj $\prec$) tako da je a neposredni sljedbenik od a_n (u odnosu na uređaj $<$) i skup a' je beskonačan. Lako je vidjeti da je $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beskonačan lanac (u odnosu na uređaj $<$).

6 Kardinalni brojevi

Definiramo sumu i produkt familije kardinalnih brojeva $(\kappa_i : i \in I)$ na sljedeći način:

$$\sum_{i\in I} \kappa_i := \operatorname{card}\left(\bigcup\{\kappa_i \times \{i\} \mid i \in I\}\right),$$

$$\prod_{i\in I} \kappa_i := \operatorname{card}\left(\left\{f \mid f\colon I \to \bigcup\{\kappa_i \mid i \in I\} \wedge (\forall i \in I)(f(i) \in \kappa_i)\right\}\right).$$

270. Neka su λ, μ i ν proizvoljni kardinalni brojevi. Dokažite da vrijedi:

(a) ako $\lambda < \mu$ tada je $\nu^\lambda \leq \nu^\mu$

(b) ako je $\nu^\lambda < \nu^\mu$ tada je $\lambda < \mu$

Odredite kardinalne brojeve λ, μ i κ takve da je $\lambda < \mu$ i $\nu^\lambda \geq \nu^\mu$.

R270.

(a) Neka je $\lambda < \mu$. Promotrimo funkciju $\Phi\colon {}^\lambda\nu \to {}^\mu\nu$ zadanu s

$$\Phi(f)(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ako je } x \in \lambda \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

Φ je očito injekcija, pa zaključujemo $\nu^\lambda \leq \nu^\mu$.

(b) Neka je $\nu^\lambda < \nu^\mu$. Očito ne može biti $\lambda = \mu$.
Kada bi bilo $\mu < \lambda$, onda bi po (a) bilo $\nu^\mu \leq \nu^\lambda$.

271. Neka su λ i μ proizvoljni kardinalni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\mu + \lambda = \lambda \text{ ako i samo ako } \aleph_0 \cdot \mu \leq \lambda$$

R271. Promatramo dva slučaja:

1° λ i μ su konačni. Tada imamo:

$$\mu + \lambda = \lambda \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \aleph_0 \cdot \mu = 0 \leq \lambda.$$

Obratno:

$$\aleph_0 \cdot \mu \leq \lambda \Rightarrow \aleph_0 \cdot \mu \text{ je konačan kardinalni broj } \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \mu + \lambda = \lambda.$$

2° Barem jedan od λ i μ je beskonačan.
Ako je $\mu + \lambda = \lambda$, onda je $\lambda = \max\{\mu, \lambda\}$ i $\aleph_0 \leq \lambda$, pa imamo:

$$\aleph_0 \cdot \mu \leq \max\{\aleph_0, \mu\} \leq \max\{\mu, \lambda\} = \lambda.$$

Obratno, ako je $\aleph_0 \cdot \mu \leq \lambda$, onda je i $\max\{\aleph_0, \mu\} \leq \lambda$, odakle slijedi

$$\mu + \lambda = \max\{\lambda, \mu\} = \lambda.$$

272. Neka su λ i μ proizvoljni kardinalni brojevi, i n neki konačan kardinalni broj. Dokažite:

a) jednakost $\mu + n = \lambda + n$ povlači da je $\mu = \lambda$.

b) jednakost $\mu \cdot n = \lambda \cdot n$ povlači da je $\mu = \lambda$.

R272.

a) Neka je $\mu + n = \lambda + n$.
Ako je $\mu < \aleph_0$ onda je očito i $\lambda < \aleph_0$, pa iz svojstava aritmetike konačnih kardinalnih brojeva lagano slijedi $\mu = \lambda$.

Ako je $\mu \geq \aleph_0$, onda je $\mu + n = \mu$, pa je $\lambda + n = \mu \geq \aleph_0$, odakle je očito da je i $\lambda \geq \aleph_0$, pa je i $\lambda + n = \lambda$. Sada imamo

$$\mu = \mu + \mu = \lambda + \mu = \lambda, \text{ tj. } \mu = \lambda.$$

b) Analogno kao i prethodna tvrdnja.

273. Neka je μ proizvoljan beskonačan kardinalni broj. Dokažite da vrijedi $\aleph_0 + \mu = \mu$.

R273. Neka je $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$ proizvoljan prebrojiv podskup od μ (Uočite da tu upotrebljavamo aksiom izbora). Definirajmo funkciju $f : \mu \cup \omega \to \mu$ kao

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in \mu \setminus C \\ c_{2n-1}, & x = c_n \\ c_{2n}, & x = n \end{cases}.$$

Lako je dokazati da je funkcija f bijekcija. Iz toga slijedi da su skupovi $\mu \cup \omega$ i μ ekvipotentni, tj. da vrijedi $\aleph_0 + \mu = \mu$.

274. Neka su λ i μ proizvoljni kardinalni brojevi. Dokažite da vrijedi $\lambda + \mu = \lambda$ ako i samo ako $\lambda + n \cdot \mu = \lambda$, za sve $n \in \omega$.

R274. Jedan smjer je trivijalan. Točnije ako za sve $n \in \omega$ vrijedi $\lambda + n \cdot \mu = \lambda$, onda je specijalno i $\lambda = \lambda + 1 \cdot \mu = \lambda + \mu$.

Za obrat promatramo dva slučaja.

1° λ i μ su konačni. Tada je tvrdnja trivijalno slijedi iz činjenice da mora biti $\mu = 0$.

2° Barem jedan od λ i μ je beskonačan.
Ako je $\lambda + \mu = \lambda$, onda je $\lambda \geq \mu$. Dakle, λ je beskonačan. Uočimo da za svaki $n \in \omega$ vrijedi $n \cdot \mu \leq \max\{\aleph_0, \mu\}$. Sada vidimo da za proizvoljni $n \in \omega$ vrijedi

$$\lambda \leq \lambda + n \cdot \mu \leq \lambda + \max\{\aleph_0, \mu\} = \lambda.$$

275. Neka su λ i μ kardinalni brojevi takvi da vrijedi $\mu^{\lambda} = \aleph_0$. Dokažite da je tada nužno $\mu = \aleph_0$ i $\lambda \in \omega$.

R275. Pretpostavimo da je $\mu \neq \aleph_0$ ili $\alpha \geq \aleph_0$. Imamo sljedeća tri slučaja.

1° $\mu < \aleph_0$. Tada mora biti $\lambda \geq \aleph_0$ (jer je u suprotnom $\mu^{\lambda} < \aleph_0$). Također je očito $\mu > 1$ (inače je $\mu^{\lambda} = \mu$). No, sada vidimo da je

$$\mu^{\lambda} \geq 2^{\lambda} \geq 2^{\aleph_0} > \aleph_0.$$

2° $\mu = \aleph_0$. Tada je nužno $\lambda \geq \aleph_0$, no onda je kao i gore:

$$\mu^{\lambda} \geq 2^{\lambda} \geq 2^{\aleph_0} > \aleph_0.$$

3° $\mu > \aleph_0$. Tada je $\mu^{\lambda} \geq \mu > \aleph_0$, osim ako je $\lambda = 0$, no tada je $\mu^{\lambda} = 1$.

276. Dokažite da za sve beskonačne kardinalne brojeve μ vrijedi $2^{\mu} = \mu^{\mu}$.

R276. Budući da je $2 \leq \mu$, vrijedi $2^{\mu} \leq \mu^{\mu}$. Iz osnovnog Cantorova teorema znamo $\mu < 2^{\mu}$. Tada je $\mu^{\mu} \leq (2^{\mu})^{\mu}$. Time imamo:

$$\mu^{\mu} \leq (2^{\mu})^{\mu} = 2^{\mu \cdot \mu} = 2^{\mu}$$

Sada tvrdnja zadatka slijedi primjenom Cantor, Schröder, Bernsteinova teorema.

277. Neka su λ i μ proizvoljni kardinalni brojevi. Dokažite da vrijedi $\mu + \lambda = \lambda$ ako i samo ako $\lambda + \aleph_0 \cdot \mu = \lambda$.

R277. Promatrajte dva slučaja – kada su oba kardinalna broja konačna i kada je barem jedan beskonačan.

278. Neka su λ i μ kardinalni brojevi za koje vrijedi $1 < \mu \leq \lambda$ i $\lambda \geq \aleph_0$. Dokažite da je tada $\mu^{\lambda} = \lambda^{\lambda}$.

R278. Očito je $\mu^{\lambda} \leq \lambda^{\lambda}$. S druge strane imamo $\lambda < 2^{\lambda} \leq \mu^{\lambda}$. Time dobivamo:

$$\lambda^{\lambda} \leq \left(\mu^{\lambda}\right)^{\lambda} = \mu^{\lambda \cdot \lambda} = \mu^{\lambda}.$$

279. Dokažite da za svaki kardinalni broj μ takav da je $2^\mu \geq \aleph_0$ vrijedi $2^\mu \geq 2^{\aleph_0}$.

R279. Neka je μ takav da je $2^\mu \geq \aleph_0$. Uočimo da je $\mu \geq \aleph_0$ jer bi u suprotnom 2^μ bio konačan kardinalni broj. Sada je očito $2^\mu \geq 2^{\aleph_0}$.

280. Dokažite da za sve kardinalne brojeve λ, μ i ν vrijedi

$$\mu \leq \lambda \text{ ako i samo ako } \mu \cdot \nu \leq \lambda \cdot \nu.$$

R280. Slično kao i zadatak 274.

281. Dokažite da za sve konačne kardinalne brojeve n, $n \geq 2$, vrijedi $2^c = (n!)^c$.

R281. Očito je $2^c \leq (n!)^c$. S druge strane, imamo:

$$(n!)^c \leq c^c = \left(2^{\aleph_0}\right)^c = 2^{\aleph_0 \cdot c} = 2^c.$$

282. Neka su $\{\kappa_i : i \in I\}$ i $\{\lambda_i : i \in I\}$ familije kardinalnih brojeva tako da za sve $i \in I$ vrijedi $\kappa_i < \lambda_i$. Dokažite da tada vrijedi

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$$

Navedena nejednakost se naziva Königova nejednakost.

R282. Uočimo da vrijedi:

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = \sum_{\{i \in I | \kappa_i > 0\}} \kappa_i \qquad \text{i} \qquad \prod_{\{i \in I | \kappa_i > 0\}} \lambda_i \leq \prod_{i \in I} \lambda_i.$$

Dakle, tvrdnju je dovoljno dokazati za slučaj kada je $\kappa_i > 0$ za svaki $i \in I$.

Pretpostavimo da je $\kappa_i > 0$ za svaki $i \in I$. Tada je i $\lambda_i \geq 2$ za svaki $i \in I$. Neka je $I_\infty := \{i \in I \mid \lambda_i \geq \aleph_0\}$ i $I_{fin} := \{i \in I \mid \lambda_i < \aleph_0\}$. Kako je (po definiciji) $\sum\limits_{i \in I} \kappa_i = \text{card}(\bigcup\{\kappa_i \times \{i\} \mid i \in I\})$, svakom paru (α, j), gdje je $j \in I$ i $\alpha \in \kappa_j$, pridružimo funkciju $f_{\alpha,j} \in \prod_{i \in I} \lambda_i$ (ovdje $\prod$ označava Kartezijev produkt familije skupova) definiranu s

$$f_{\alpha,j}(i) := \begin{cases} \kappa_i, & \text{za } i \neq j \\ \alpha, & \text{za } i = j. \end{cases}$$

Pridruživanje $(\alpha, j) \mapsto f_{\alpha,j}$ je injektivno, pa dobivamo

$$\sum_{i \in I_\infty} \kappa_i \leq \text{card} \underbrace{\left(\prod_{i \in I} \lambda_i\right)}_{\substack{\text{Kartezijev} \\ \text{produkt}}} = \underbrace{\prod_{i \in I} \lambda_i}_{\substack{\text{produkt} \\ \text{familije} \\ \text{kard. br.}}} .$$

U slučaju da je I_{fin} beskonačan, zbog $\kappa_i < \lambda_i < \aleph_0$ za sve $i \in I_{fin}$, imamo

$$\sum_{i\in I_{fin}} \kappa_i \leq \sum_{i\in I_{fin}} \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \mathrm{card}(I_{fin}) = \mathrm{card}(I_{fin}) < 2^{\mathrm{card}(I_{fin})} = \prod_{i\in I_{fin}} 2 \leq \prod_{i\in I_{fin}} \lambda_i.$$

Ako je I_{fin} konačan, onda iz $\lambda_i \geq 2$ za sve $i \in I$, slijedi da je $\sum_{i\in I_{fin}} \kappa_i \leq \prod_{i\in I_{fin}} \lambda_i$. (Dokaz npr. indukcijom.) Sada imamo

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \sum_{i\in I_\infty} \kappa_i + \sum_{i\in I_{fin}} \kappa_i \leq \prod_{i\in I_\infty} \lambda_i + \prod_{i\in I_{fin}} \lambda_i \leq \prod_{i\in I} \lambda_i.$$

Sada još treba dokazati $\sum_{i\in I} \kappa_i \neq \prod_{i\in I} \lambda_i$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji bijekcija $h\colon \bigcup_{i\in I} (\kappa_i \times \{i\}) \to \prod_{i\in I} \lambda_i$. Tada je Kartezijev produkt $\prod_{i\in I} \lambda_i$ unija u parovima disjunktnih skupova

$$A_i := h[\kappa_i \times \{i\}], \quad i \in I.$$

Neka je

$$B_i := \lambda_i \cap \{f(i) \mid f \in A_i\}.$$

Kako je $\mathrm{card}(B_i) \leq \mathrm{card}(A_i) = \kappa_i < \lambda_i$, slijedi da je B_i pravi podskup od λ_i za svaki $i \in I$ (tj. $\lambda_i \setminus B_i \neq \emptyset$). Stoga iz aksioma izbora slijedi da postoji funkcija $g \in \prod_{i\in I} \lambda_i$ takva da je $g(i) \in \lambda_i \setminus B_i$ za svaki $i \in I$. Uočimo da $g \notin \bigcup_{i\in I} A_i$, što je u kontradikciji s ranije uočenim $\prod_{i\in I} \lambda_i = \bigcup_{i\in I} A_i$. Dakle, mora biti

$$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i.$$

283. Neka su λ i μ proizvoljni kardinalni brojevi takvi da $\lambda > 1$ i $\mu > 1$. Zatim, neka je ν beskonačni kardinalni broj za kojeg vrijedi $\mu,\ \lambda \leq \nu$. Dokažite da je tada $\mu^\nu = \lambda^\nu$.

284. Dokažite: ako $\alpha \leq \beta$ tada $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

285. Bez primjene aksioma izbora dokažite $\beth_1^{\beth_2} = \beth_3$.

R285. Primijetimo da se tvrdnja koju trebamo dokazati može zapisati u obliku $\mathfrak{c}^{2^\mathfrak{c}} = 2^{2^\mathfrak{c}}$. Sada nejednakost ($\geq$) slijedi iz $\mathfrak{c} \geq 2$ po monotonosti potenciranja, dakle dovoljno je dokazati nejednakost ($\leq$).

Prvo pokažimo $\aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. Nejednakost ($\geq$) slijedi iz $\aleph_0 \geq 0$ po monotonosti zbrajanja, dok je nejednakost ($\leq$) posljedica Cantorova osnovnog teorema i zakona kardinalne aritmetike:

$$\aleph_0 + \mathfrak{c} \leq 2^{\aleph_0} + \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \cdot 1 + 2^{\aleph_0} \cdot 1 = 2^{\aleph_0} \cdot (1+1) = 2^{\aleph_0} \cdot 2^1 = 2^{\aleph_0 + 1} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Sada je napokon

$$2^{2^{\mathfrak{c}}} = 2^{2^{\aleph_0+\mathfrak{c}}} = 2^{2^{\aleph_0}\cdot 2^{\mathfrak{c}}} = 2^{\mathfrak{c}\cdot 2^{\mathfrak{c}}} = \left(2^{\mathfrak{c}}\right)^{2^{\mathfrak{c}}} \geq \mathfrak{c}^{2^{\mathfrak{c}}}.$$

286. Dokažite da postoji ordinalni broj β takav da je $\aleph_\beta = \beta$.

R286. Neka je λ neki kardinalni broj. Promotrimo niz $(\kappa_n)_n$ zadan rekurzivno

$$\begin{cases} \kappa_0 = \lambda \\ \kappa_{n+1} = \aleph_{\kappa_n} \end{cases}$$

Označimo $\kappa := \sup\{\kappa_n \mid n \in \omega\}$, te neka je β ordinalni broj takav da je $\kappa = \aleph_\beta$. Očito je $\beta \leq \aleph_\beta$.

Pretpostavimo da je $\beta < \aleph_\beta$. Kako je $\aleph_\beta = \sup\{\kappa_n \mid n \in \omega\}$, po definiciji supremuma postoji $n \in \omega$ takav da je $\beta < \kappa_n$, no tada je i $\kappa = \aleph_\beta < \aleph_{\kappa_n} = \kappa_{n+1}$, što je u kontradikciji s definicijom kardinalnog broja κ. Dakle, mora biti $\beta = \aleph_\beta$.

Napomena: Uočimo da ovo dokazuje ne samo postojanje fiksnih točaka funkcije $\aleph$,
nego i da takvi ordinalni brojevi čine pravu klasu.

287. Koliko ima neprebrojivih podskupova skupa koji ima kardinalni broj $\aleph_1$?

288. Dokažite da za svaki konačni kardinalni broj n vrijedi

$$(n!)^{\aleph_\omega} \leq 2^{2^{\aleph_\omega}}$$

R288.

$$(n!)^{\aleph_\omega} \overset{\text{(zad. 283.)}}{=} 2^{\aleph_\omega} \leq 2^{2^{\aleph_\omega}}$$

289. Neka su α i β ordinalni brojevi. Dokažite:

$$\text{ako je } \beta < \alpha \text{ tada je } {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} \leq {\aleph_\beta}^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}.$$

R289. Neka je po $\beta < \alpha$. Očito je $\aleph_\beta^{\aleph_\alpha} \geq 2^{\aleph_\alpha}$.

Osnovni Cantorov teorem kaže $\aleph_\beta < 2^{\aleph_\beta}$, primjenom zadatka 270. dobivamo

$$\aleph_\beta^{\aleph_\alpha} \leq 2^{\aleph_\beta\cdot\aleph_\alpha}.$$

Zbog $\beta < \alpha$ vrijedi $\aleph_\beta \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$, odakle slijedi

$$2^{\aleph_\beta\cdot\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}.$$

Treba nam još:

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} \overset{\text{(zad. 283.)}}{=} \aleph_\beta^{\aleph_\alpha}.$$

290. Dokažite: $\aleph_5 = 2^{\aleph_4}$ ako i samo ako $\aleph_5^{\aleph_4} = \aleph_5$.

R290. Neka je $\aleph_5 = 2^{\aleph_4}$. Tada je $\aleph_5^{\aleph_4} = \left(2^{\aleph_4}\right)^{\aleph_4} = 2^{\aleph_4 \cdot \aleph_4}$, a iz $\aleph_4 \cdot \aleph_4 = \aleph_4$ imamo $2^{\aleph_4 \cdot \aleph_4} = 2^{\aleph_4} = \aleph_5$.

Obratno, ako je $\aleph_5^{\aleph_4} = \aleph_5$, onda imamo $\aleph_5 \le 2^{\aleph_4} \le \aleph_5^{\aleph_4} = \aleph_5$.

291. Dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$\aleph_n \le \mathrm{card}(\underbrace{\mathscr{P}\mathscr{P}\ldots\mathscr{P}}_{n\text{-puta}}(\mathbb{N})).$$

R291. Uočimo: $\aleph_0 = \mathrm{card}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}(\mathscr{P}^0(\mathbb{N}))$.
Neka je $n \in \omega$ i neka za sve $m < n$ vrijedi $\aleph_m \le \mathrm{card}(\mathscr{P}^m(\mathbb{N}))$. Tada je

$$\mathrm{card}(\mathscr{P}^n(\mathbb{N})) = \mathrm{card}\left(\mathscr{P}\left(\mathscr{P}^{n-1}(\mathbb{N})\right)\right) = 2^{\mathrm{card}(\mathscr{P}^{n-1}(\mathbb{N}))} \overset{\substack{\text{pretp.}\\ \text{ind.}}}{\ge} 2^{\aleph_{n-1}} \ge \aleph_n.$$

Po principu matematičke indukcije slijedi tvrdnja.

292. Dokažite da za svaki ordinalni broj α vrijedi $\aleph_{\alpha+1} < 2^{2^{\aleph_\alpha}}$.

R292.

$$2^{2^{\aleph_\alpha}} > 2^{\aleph_\alpha} \ge \aleph_{\alpha+1}$$

293. Bez primjene aksioma izbora izračunajte $\aleph_0^c + (c \cdot \aleph_1)^{\aleph_0}$.

294. Koja od sljedeće dvije tvrdnje: $2^c = \aleph_2$ i $c = \aleph_1$, povlači onu drugu? Dokažite tu implikaciju (bez primjene aksioma izbora).

R294. Neka je $2^c = \aleph_2$ i pretpostavimo da je $c > \aleph_1$ (tada je $c \ge \aleph_2$). Tada imamo

$$2^c \ge 2^{\aleph_2} > \aleph_2,$$

što je kontradikcija s pretpostavkom $2^c = \aleph_2$, pa imamo $2^c = \aleph_2$, što povlači $c = \aleph_1$.

295. Dokažite da je hipoteza kontinuuma $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ekvivalentna s $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$.

R295. Neka vrijedi hipoteza kontinuuma. Tada je

$$\aleph_1^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Obratno, neka je $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$. Sada imamo

$$\aleph_1 \le 2^{\aleph_0} \le \aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

296. Dokažite da je hipoteza kontinuuma ekvivalentna s $\aleph_2^{\aleph_0} > \aleph_1^{\aleph_0}$.

R296. Neka vrijedi hipoteza kontinuuma. Tada je

$$\aleph_1^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1 < \aleph_2 \leq \aleph_2^{\aleph_0}.$$

Obratno, neka je $\aleph_2^{\aleph_0} > \aleph_1^{\aleph_0}$ i pretpostavimo da je $2^{\aleph_0} > \aleph_1$. Sada imamo

$$\aleph_1^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0} > \aleph_1 \Rightarrow \aleph_1^{\aleph_0} \geq \aleph_2 \Rightarrow \aleph_1^{\aleph_0} = \left(\aleph_1^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} \geq \aleph_2^{\aleph_0}.$$

297. Dokažite da je $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$. Uputa. Koristite Königovu nejednakost, tj. zadatak 282.

R297. Pretpostavimo da je $(*)$ $2^{\aleph_0} = \aleph_\omega$. Tada vrijedi

$$\aleph_\omega = \sup\{\aleph_n \mid n \in \omega\} \leq \sum_{n\in\omega} \aleph_n \overset{\substack{\text{Königova}\\ \text{nejednakost}}}{<} \prod_{n\in\omega} \aleph_\omega = \aleph_\omega^{\aleph_0} \overset{(*)}{=} 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0},$$

što je kontradikcija.

298. Rekurzivno definiramo niz kardinalnih brojeva $\beth_\alpha$ sa

$$\beth_0 = \aleph_0, \qquad \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}, \qquad \beth_\alpha = \bigcup\nolimits_{\beta<\alpha} \beth_\beta.$$

Dokažite da opća hipoteza kontinuma povlači da za sve $\alpha \in On$ vrijedi $\beth_\alpha = \aleph_\alpha$.

R298. Po definiciji je $\beth_0 = \aleph_0$.

Neka je $\gamma \geq 1$ ordinalni broj takav da za sve $\beta < \gamma$ vrijedi $\beth_\beta = \aleph_\beta$.

Ako je γ granični ordinalni broj, onda je

$$\beth_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} \beth_\beta \overset{\substack{\text{pretp.}\\ \text{ind.}}}{=} \bigcup_{\beta<\gamma} \aleph_\beta = \aleph_\gamma.$$

Ako je $\gamma = \delta + 1$ za neki ordinalni broj δ, onda je

$$\beth_\gamma = 2^{\beth_\delta} \overset{\substack{\text{pretp.}\\ \text{ind.}}}{=} 2^{\aleph_\delta} \overset{(GCH)}{=} \aleph_{\delta+1} = \aleph_\gamma.$$

Iz principa transfinitne indukcije slijedi tvrdnja.

299. Bez korištenja aksioma izbora poredajte po veličini sljedeće kardinalne brojeve: $\aleph_0^{\beth_1}$, $\aleph_1^{\beth_0}$, $\beth_2^{\aleph_1}$. Gdje vrijede stroge nejednakosti, a gdje jednakosti?

300. Bez primjene aksioma izbora dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi $\beth_n^2 = \beth_n$.

Bibliografija

[1] F. R. DRAKE, D. SINGH, *Intermediate Set Theory*, John Wiley & Sons, 1996.

[2] J. M. HENLE, *An outline of set theory*, Springer, 1986.

[3] M. HOLZ, K. STEFFENS, E. WEITZ, *Introduction to Cardinal Arithmetic*, Birkhäuser, 1999.

[4] W. JUST, M. WEESE, *Discovering Modern Set Theory 1,2*, AMS, 1996.

[5] P. KOMJÁTH, V. TOTIK, *Problems and Theorems in Classical Set Theory*, Springer, 2000.

[6] I. A. LAVROV, L. L. MAKSIMOVA, *Zbornik zadač po teorii množestv. mat. logik i teorii algoritmov* (rus.), Nauka, Moskva, 1986.

[7] I. A. LAVROV, L. L. MAKSIMOVA, *Problems in Set Theory, Mathematical Logic and the Theory of Algorithms*, Kluwer Academic/Plenum Publisher, 2003.

[8] S. LIPSCHUTZ, *Set Theory and Related Topics*, Schaumm's outline series, Second Edition, McGraw–Hill, 1998.

[9] M. D. POTTER, *Mengentheorie*, Spektrum Akademischer Verlag, 1990.

[10] H. RUBIN, J. RUBIN, *Equivalents of the Axiom of Choice*, North–Holland, 1970.

[11] L. E. SIGLER, *Exercises in Set Theory*, Springer, New York, 1976.

[12] M. VUKOVIĆ, *Teorija skupova (predavanja)*, PMF–MO, Zagreb, 2006. http://web.math.hr/~vukovic/TS_skripta_2005.pdf