

Teorija skupova

Kolokvij – 25. studenog 2024.

Teorijska pitanja

- (1 bod) Definirajte kompoziciju relacija.
 - (1 bod) Riječima i simbolima iskažite aksiom beskonačnosti.
 - (1 bod) Nabrojte aksiome korištene u dokazu da je Kartezijev produkt skupova skup.
 - (1 bod) Dokažite da je operacija sljedbenika injektivna.
- (2 boda) Dokažite Knaster–Tarskijev teorem.

Zadaci

- (4 boda) Neka je $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz skupova. Ispitajte odnos skupova

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_{n+1} \Delta A_{n+2} \Delta \cdots \Delta A_{3n+2}) \quad \text{i} \quad \limsup A_n \setminus \liminf A_n.$$

Svoje tvrdnje argumentirajte dokazima, odnosno kontraprimjerima.

- (4 boda) Odredite kardinalnost skupa svih podskupova od \mathbb{R} koji su gusti u \mathbb{R} . Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite.
- (6 bodova) Neka je A skup i $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz relacija parcijalnog uređaja na A . Označimo

$$R := \liminf R_n.$$

- Dokažite da je R relacija parcijalnog uređaja na A .
- Označimo sa M_n skup svih minimalnih elemenata s obzirom na R_n te sa M skup svim minimalnih elemenata s obzirom na R . Dokažite da je tada

$$\limsup M_n \subseteq M$$

i pokažite primjerom da obratna inkluzija ne mora vrijediti.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.