Teorija skupova

Kolokvij – 27. studenog 2023.

Teorijska pitanja

1. (a) (1 bod) Iskažite riječima i napišite simbolima aksiom partitivnog skupa.
   (b) (1 bod) Iskažite Knaster-Tarskijev teorem.
   (c) (1 bod) Definirajte sljedbenik i dokažite da nema fiksnu točku.
   (d) (1 bod) Definirajte minimalni i najmanji element u parcijalno uređenom skupu.
2. (2 boda) Dokažite Cantorov osnovni teorem.

Zadaci

1. (4 boda) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova. Ispitajte odnos skupova
$$\limsup_n A_n \qquad \text{i} \qquad \bigcap_{n\geq 1}\Big(A_n \triangle \Big(A_{n-1}\cup A_{n+1}\Big)\Big).$$
Svoje tvrdnje argumentirajte dokazima, odnosno kontraprimjerima.

2. (4 boda) Za svaki $c\in\mathbb{R}$ definirana je funkcija $f_c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_c(x)=cx^2+(c-1)$. Dokažite da za svaki **prebrojiv** skup $A\subseteq\mathbb{R}$ postoji $c\in\mathbb{R}$ takav da su skupovi A i $f_c[A]$ disjunktni.

3. (6 bodova) Za relaciju R na skupu A kažemo da je *asimetrična* ako
$$(\forall x,y\in A)(xRy\Rightarrow y\not{R}x).$$
Neka je R asimetrična i tranzitivna. Dokažite:
   (a) Ako je A konačan skup, tada postoji $m\in\mathbb{N}$ takav da je $R^n=\emptyset$, za sve $n\geq m$. Obratno, ako za neku relaciju R postoji m s navedenim svojstvom, dokažite da je R asimetrična. Mora li biti i tranzitivna?
   (b) Dokažite da je R parcijalni uređaj. Je li svaki parcijalni uređaj asimetrična i tranzitivna relacija?
   (c) Za $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ neka je M_n skup svih maksimalnih elemenata s obzirom na R^n. Dokažite da je $M_n\subseteq M_{n+1}$ te da obratna inkluzija ne mora vrijediti.