

Teorija skupova

Prvi kolokvij — 28. studenoga 2022. godine

Zadatak 1. (6 bodova)

- (a) Iskažite aksiom unije. Koji je još aksiom potreban za definiciju $a \cup b$?
- (b) Definirajte kompoziciju dviju relacijā. Je li to asocijativna operacija?
- (c) Iskažite Knaster–Tarskijev teorem o fiksnoj točki. Gdje se taj teorem koristi?
- (d) Postoji li skup x za koji je $x^+ \in x$? Navedite takav skup ili objasnite zašto ne postoji.
- (e) Postoji li neinduktivni nadskup od ω ? Navedite neki ili objasnite zašto ne postoji.
- (f) Točno ili netočno (ne morate obrazlagati): (1) $V_\omega \sim \omega$;
(2) postoji niz skupova (x_0, x_1, x_2, \dots) takav da je $x_i \in x_{i+1}$ za sve $i \in \omega$;
(3) svaka funkcija koja čuva refleksivni uređaj čuva i strogi uređaj.

Zadatak 2. (4 boda) Dokažite: parcijalno uređeni skup je dobro uređen ako i samo ako je totalno (linearno) uređen i dobro utemeljen.

Zadatak 3. (5 bodova) Neka je $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz skupova. Ispitajte odnos skupova

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n^2 < k \leq (n+1)^2} A_k \mid \bigcup_{k \leq n^2} A_k \right) \quad \text{i} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_0 \Delta \dots \Delta A_n.$$

Svoje tvrdnje argumentirajte dokazima, odnosno kontraprimjerima.

Zadatak 4. (5 bodova) Neka je A neprazan skup. Za nepraznu relaciju R na A reći ćemo da je *2-ciklička* ako vrijedi $R \circ R = I_A$ (pritom I_A označava dijagonalnu relaciju na A). Dokažite da je svaka *2-ciklička* relacija simetrična te pokažite da obrat ne vrijedi općenito.

Zadatak 5. (4+1=5 bodova) Neka je G skup svih zatvorenih kugli u \mathbb{R}^3 , te neka je H skup svih funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takvih da je $f|_{\mathbb{Z}}$ bijekcija između \mathbb{Z} i \mathbb{N} .

- (a) Vrijedi li $G \sim H$? Dokažite!
- (b) Točno ili netočno (ne morate obrazlagati): (1) $(G, \subset) \simeq (H, \subset)$;
(2) ako je (G, \subset) pseudorešetka, tada je i (H, \subset) pseudorešetka.

U (b) podzadatku samo oba ispravna odgovora donose > 0 bodova.

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire! Zadatke (1) i (2) možete rješavati na jednom papiru, a svaki od zadataka (3), (4) i (5) morate na zasebnom! Potpišite sve papire koje predajete! Sretno!