Teorija skupova

Prvi kolokvij — 28. studenoga 2022. godine

Zadatak 1. *(6 bodova)*

(a) Iskažite aksiom unije. Koji je još aksiom potreban za definiciju $a \cup b$?

(b) Definirajte kompoziciju dviju relacijā. Je li to asocijativna operacija?

(c) Iskažite Knaster–Tarskijev teorem o fiksnoj točki. Gdje se taj teorem koristi?

(d) Postoji li skup x za koji je $x^+ \in x$? Navedite takav skup ili objasnite zašto ne postoji.

(e) Postoji li neinduktivni nadskup od ω ? Navedite neki ili objasnite zašto ne postoji.

(f) Točno ili netočno (ne morate obrazlagati): (1) $V_\omega \sim \omega$;
(2) postoji niz skupova $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ takav da je $x_i \in x_{i+1}$ za sve $i \in \omega$;
(3) svaka funkcija koja čuva refleksivni uređaj čuva i strogi uređaj.

Rješenje.

(a) $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (\exists t \in x)(z \in t))$; aksiom para.

(b) $R \circ Q := \{(a, c) \in \operatorname{dom} Q \times \operatorname{rng} R : \exists b (aQbRc)\}$; da.

(c) Neka je a PUS i $f : a \to a$ čuva refleksivni uređaj. Ako u a svaki podskup ima supremum/infumum, tada f ima najveću/najmanju fiksnu točku. Koristi se (njegov specijalni slučaj za partitivni skup) pri dokazivanju Banachove leme.

(d) Ne. Kad bi postojao, imali bismo $x \in x^+ \in x$, pa neprazni skup $\{x, x^+\}$ ne bi imao $\in$-minimalni element, kontra aksioma dobre utemeljenosti.

(e) Da, $\omega^+ \supseteq \omega$ nije induktivan jer $\omega \in \omega^+$ ali $\omega^+ \notin \omega^+$.

(f) (1) Točno. (2) Točno. (3) Netočno.

$\blacksquare$

Ukratko za tvrdnje iz (f): (1) $\sum_{n\in\omega} \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{0}}}}}}}_{n \text{ potenc.}} = 0 + 1 + 2 + 4 + 16 + 65536 + \dots = \aleph_0$.
(2) $0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \cdots$ $(x_i := i)$
(3) $f : 2 \to 1$; $f(x) := 0$ čuva $\leq$, ali ne i $<$.

Zadatak 2. *(4 boda)* Dokažite: parcijalno uređeni skup je dobro uređen ako i samo ako je totalno (linearno) uređen i dobro utemeljen.

Rješenje.

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $(a, <)$ PUS koji je DUS.

(TUS) Za bilo koje $x, y \in a$, $\{x, y\}$ je neprazni podskup od a, pa ima najmanji element z. No $z \in \{x, y\}$ znači $z = x$ ili $z = y$. Prvo znači da je $y \leq x$, a drugo $x \leq y$. Dakle, x i y su usporedivi, a kako su bili proizvoljni, a je TUS.

(DUT) Neka je b proizvoljan neprazan podskup od a. Kako je a DUS, b ima (jedinstveni) najmanji element, označimo ga s m. Kad bi u b postojao $r < m$, bilo bi i $m \leq r$ (jer je $m = \min b$), odnosno $r < r$ ↯. Dakle, m je minimalni element u b. Kako je b bio proizvoljan, a je DUT.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $(a, <)$ PUS koji je TUS i DUT. Neka je b proizvoljni neprazni podskup od a. Jer je a DUT, b ima (barem jedan) minimalni element: odaberimo jedan i označimo ga s m. Neka je $r \in b$ proizvoljan. Jer je a TUS, r i m su usporedivi: $r < m \bigvee r = m \bigvee m < r$. Prvo je nemoguće jer je m minimalan, a drugo i treće vode na $m \leq r$. Kako je r bio proizvoljan, m je najmanji u b. Kako je b bio proizvoljan, a je DUS.

■

Zadatak 3. *(5 bodova)* Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova. Ispitajte odnos skupova

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{n^2<k\leq(n+1)^2} A_k \;\Big\backslash\; \bigcup_{k\leq n^2} A_k \right) \quad \text{i} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} A_0 \triangle \ldots \triangle A_n.$$

Svoje tvrdnje argumentirajte dokazima, odnosno kontraprimjerima.

Prije samog rješenja zadatka, prisjetimo se što je dokazano na vježbama:

> Neka su $A_1, A_2, \ldots A_n$ skupovi. Tada se skup $A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n$ sastoji točno od onih elemenata koji pripadaju A_i za neparno mnogo indeksa i.

Rješenje.
Uvedimo oznake radi jednostavnijeg zapisa u nastavku:

$$L := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{n^2<k\leq(n+1)^2} A_k \;\Big\backslash\; \bigcup_{k\leq n^2} A_k \right), \qquad D := \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} A_0 \triangle \ldots \triangle A_n.$$

Pokazujemo da vrijedi $L \subseteq D$ i $D \nsubseteq L$.

$\boxed{\subseteq}$ *(3 boda)* Neka je $x \in L$ proizvoljan. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$x \in \bigcap_{n^2<k\leq(n+1)^2} A_k \Big\backslash \bigcup_{k\leq n^2} A_k$, tj. $x \in \bigcap_{n^2<k\leq(n+1)^2} A_k$ i $x \notin \bigcup_{k\leq n^2} A_k$. Iz toga slijedi:

(1) za svaki $k \in \mathbb{N}$ takav da $n^2 < k \leq (n+1)^2$ vrijedi $x \in A_k$,

(2) za svaki $k \in \mathbb{N}$ takav da $k \leq n^2$ vrijedi $x \notin A_k$.

Tvrdimo da vrijedi $x \in A_0 \triangle \ldots \triangle A_{(n+1)^2}$. Za to je prema tvrdnji s vježbi dovoljno pokazati da vrijedi $x \in A_i$ za neparno mnogo indeksa $i \in \{0, 1, \ldots, (n+1)^2\}$. Iz (1) i (2) slijedi da vrijedi $x \in A_i$ samo za $i \in \{n^2+1, \ldots, (n+1)^2\}$. Kako je u posljednjem skupu ukupno $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$, dakle neparno elemenata skupa $\{0, 1, \ldots (n+1)^2\}$, dobivamo traženu tvrdnju. Dakle, za $m := (n+1)^2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vrijedi $x \in A_0 \triangle \ldots \triangle A_m$ pa slijedi $x \in D$. Zaključujemo da vrijedi $L \subseteq D$.

$\boxed{\not\supseteq}$ *(2 boda)* Definirajmo $A_0 = \{1\}$ i $A_i = \emptyset$, za svaki $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Iz $1 \in A_0$ i $1 \notin A_1$ slijedi $1 \in A_0 \setminus A_1 \subseteq A_0 \triangle A_1 \subseteq D$. Prema tome, $1 \in D$.

Pretpostavimo suprotno, tj. $D \subseteq L$. Tada iz $1 \in D$ slijedi $1 \in L$, tj. postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da između ostalog vrijedi $1 \in A_k$, za $n^2 < k \leq (n+1)^2$. No, tada $1 \in A_{(n+1)^2}$, što je u kontradikciji s $A_{(n+1)^2} = \emptyset$ (jer $(n+1)^2 > 0$).

Dakle, $D \not\subseteq L$. ■

Zadatak 4. *(5 bodova)* Neka je A neprazan skup. Za nepraznu relaciju R na A reći ćemo da je *2-ciklička* ako vrijedi $R \circ R = I_A$ (pritom I_A označava dijagonalnu relaciju na A). Dokažite da je svaka *2-ciklička* relacija simetrična te pokažite da obrat ne vrijedi općenito.

Rješenje.
Neka je A proizvoljan neprazan skup i R proizvoljna *2-ciklička* relacija na A. Pokažimo prvo da je R simetrična relacija. Neka su a, b proizvoljni takvi da vrijedi aRb (tada posebno, jer je R relacija na A, vrijedi $a, b \in A$). Iz $b \in A$ slijedi bI_Ab. Kako je R *2-ciklička*, vrijedi $R \circ R = I_A$ pa iz prethodnog dobivamo $b(R \circ R)b$. Prema tome postoji $c \in A$ za koji vrijedi bRc i cRb. Sada iz aRb i bRc slijedi $a(R \circ R)c$ pa zbog $R \circ R = I_A$ slijedi aI_Ac, tj. $a = c$. Iz posljednjeg i bRc slijedi bRa, pa zaključujemo da je relacija R simetrična.

Dokažimo da obrat tvrdnje iz zadatka ne vrijedi općenito. Definiramo $A := \{0, 1\}$, te $R := \{(0, 0)\}$ (uočimo da je R jedna relacija na A). Tada vrijedi $R^{-1} = \{(0, 0)\} = R$ pa znamo s vježbi da je R simetrična relacija. Međutim, relacija R nije *2-ciklička* jer ne vrijedi $R \circ R = I_A$: za $1 \in A$ vrijedi $1I_A1$, ali ne vrijedi $1(R \circ R)1$ (u protivnom postoji $y \in A$ takav da vrijedi $1RyR1$, što je u suprotnosti s definicijom relacije R) - dakle, $R \circ R \neq I_A$.

■

Zadatak 5. *(4+1=5 bodova)* Neka je G skup svih zatvorenih kugli u $\mathbb{R}^3$, te neka je H skup svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takvih da je $f|_{\mathbb{Z}}$ bijekcija između $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}$.

(a) Vrijedi li $G \sim H$? Dokažite!

(b) Točno ili netočno (ne morate obrazlagati): (1) $(G, \subset) \simeq (H, \subset)$;
(2) ako je $(G, \subset)$ pseudorešetka, tada je i $(H, \subset)$ pseudorešetka.

U (b) podzadatku samo oba ispravna odgovora donose > 0 bodova.

Nekoliko napomena prije samog rješenja ovog zadatka:

- Zatvorena kugla u $\mathbb{R}^3$ oko točke $x \in \mathbb{R}^3$ radijusa $r > 0$ je skup $\overline{K}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^3 : d(x, y) \leq r\}$ (pri čemu je d standardna metrika na $\mathbb{R}^3$).

- Koristimo oznaku $\mathbb{R}_+$ za skup $\{r \in \mathbb{R} \ : \ r > 0\}$.

Rješenje.

(a) Dakle, $G = \{\overline{K}(x, r) \ : \ x \in \mathbb{R}^3, \ r \in \mathbb{R}, \ r > 0\}$. Prema tome, vrijedi $G \sim \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$. Slijedi $k(G) = k\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+\right) = k\left(\mathbb{R}^3\right) \cdot k\left(\mathbb{R}_+\right) = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. U prethodnom smo koristili:

- □ s vježbi znamo $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, pa posebno $k\left(\mathbb{R}^3\right) = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.
- □ $\langle 0, 1\rangle \subseteq \mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{R}$ povlači $\mathfrak{c} = k(\langle 0, 1\rangle) \leq k\left(\mathbb{R}_+\right) \leq k(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$. Po CSB slijedi $k\left(\mathbb{R}_+\right) = \mathfrak{c}$.

S druge strane, vrijedi $H = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \middle| \ f\big|_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}\right\}$ iz čega slijedi $H \subseteq \ {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$. Time dobivamo $k(H) \leq k\left({}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}\right) = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$. Za $k(H) = 2^{\mathfrak{c}}$ po CSB je dovoljno pokazati da vrijedi $2^{\mathfrak{c}} \leq k(H)$.

Definirajmo funkciju $\chi \ :^{\langle 0,1\rangle} \langle 0, 1\rangle \to H$ koja svakoj funkciji $f : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ pridružuje funkciju $\chi(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu ovako:

$$\chi(f)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \langle 0, 1\rangle, \\ 2x, & x \in \mathbb{N}, \\ -2x - 1, & x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (\langle 0, 1\rangle \cup \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Pokazujemo da je funkcija χ dobro definirana, te da je ta funkcija injekcija.

- Neka je $f : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ proizvoljna funkcija. Pokazujemo da vrijedi $\chi(f) \in H$, tj. da je $\chi(f)\big|_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ bijekcija.
  - $*$ Injektivnost: pretpostavimo da su $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ proizvoljni takvi da vrijedi $x_1 \neq x_2$. Iz toga slijedi $2x_1 \neq 2x_2$, $-2x_1 - 1 \neq -2x_2 - 1$, $2x_1 \neq -2x_2 - 1$ i $-2x_1 - 1 \neq 2x_2$ (u posljednja dva slučaja jedan broj jest djeljiv s 2, a drugi nije). Dakle, u svakom slučaju vrijedi $\chi(f)\big|_{\mathbb{Z}}(n_1) \neq \chi(f)\big|_{\mathbb{Z}}(n_2)$.
  - $*$ Surjektivnost: neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Ukoliko je n paran, vrijedi $n = 2k$, za neki $k \in \mathbb{N}$, pa vrijedi $\chi(f)\big|_{\mathbb{Z}}(k) = 2k = n$. Inače ($n$ neparan), vrijedi $n = 2k+1$, za neki $k \in \mathbb{N}$, pa vrijedi $-k - 1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ iz čega slijedi $\chi(f)\big|_{\mathbb{Z}}(-k - 1) = -2(-k - 1) - 1 = 2k + 1 = n$.
- Neka su $f_1, f_2 \in \ {}^{\langle 0,1\rangle}\langle 0, 1\rangle$ proizvoljne funkcije takve da vrijedi $f_1 \neq f_2$. Tada postoji $x \in \langle 0, 1\rangle$ takav da vrijedi $f_1(x) \neq f_2(x)$. Za taj x sada dobivamo $\chi(f_1)(x) =$ (jer $x \in \langle 0, 1\rangle$) $= f_1(x) \neq f_2(x) =$ (jer $x \in \langle 0, 1\rangle$) $= \chi(f_2)(x)$. Prema tome, $\chi(f_1) = \chi(f_2)$. Zaključujemo da je funkcija χ injekcija.

Dakle, vrijedi $k(G) = \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} = k(H)$ (što povlači $k(G) \neq k(H)$), pa zaključujemo da ne vrijedi $G \sim H$.

(b)

(1) Netočno.

(2) Točno.

■

Ovdje ćemo navesti i obrazloženja za dane odgovore u (b) podzadatku (no istaknimo da se to nije tražilo - trebalo je samo napisati je li pojedina tvrdnja točna ili netočna!):

(1) Pretpostavimo da su $(G, \subset)$ i $(H, \subset)$ slični (tj. $G \sim H$). To znači da postoji barem jedna sličnost $f : G \to H$. Kako je po definiciji sličnost ujedno i bijekcija, slijedi $G \sim H$, što je u kontradikciji s dobivenim rezultatom u (a) podzadatku.

   Dakle, ne vrijedi $(G, \subset) \simeq (H, \subset)$.

(2) Prepostavimo da je $(G, \subset)$ pseudorešetka. Tada iz definicije pseudorešetke slijedi da svaki dvočlani podskup $\{K_1, K_2\} \subseteq G$ ima infimum. Posebno to mora vrijediti za $K_1 = \overline{K}((0,0,0),1)$ i $K_2 = \overline{K}((100,100,100),1)$, tj. postoji zatvorena kugla $K' \in G$ koja je najveća donja međa skupa $\{K_1, K_2\}$. Kako je K' donja međa tog skupa, mora vrijediti $K' \subseteq K_1$ i $K' \subseteq K_2$, iz čega slijedi $K' \subseteq K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Prema posljednjem vrijedi $K' \subseteq \emptyset$, što nije moguće (jer K' je zatvorena kugla).

   Dakle, $(G, \subset)$ nije pseudorešetka. Tada tvrdnja iz zadatka oblika „ako T_1 onda T_2” za neistinitu tvrdnju T_1 vrijedi :)