Teorija skupova — prvi kolokvij

25. studenoga 2021.

1. (a) [1 bod] Iskažite aksiom para. Koji aksiomi su potrebni da dokažemo da je $\{x, y, z\}$ skup (za skupove x, y i z)?
   (b) [1 bod] Definirajte Kartezijev produkt, i zapišite ga u obliku iz kojeg primjenom aksioma separacije slijedi da je to skup.
   (c) [1 bod] Definirajte zbrajanje kardinalnosti. Napišite precizno tvrdnju da ono ne ovisi o reprezentantima.
   (d) [1 bod] Iskažite Banachovu lemu. Ako su funkcije koje se u njoj pojavljuju surjekcije, navedite jedan konkretni skup koji je zadovoljava.
   (e) [1 bod] Dokažite da je sljedbenik klasna injekcija.
   (f) [1 bod] Iskažite korolar Dedekindovog teorema rekurzije, i pomoću njega definirajte zbrajanje s brojem 3.

2. [4 boda] Dokažite Knaster–Tarskijev teorem o fiksnoj točki, i primijenite ga na partitivni skup uređen inkluzijom.

---

3. [5 bodova] Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova. Ispitajte odnos skupova $\liminf_n (A_0 \triangle \cdots \triangle A_n)$ i
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big((A_0 \triangle \cdots \triangle A_n) \setminus \bigcup_{k\geq n+1} A_k \Big).$$

4. [5 bodova] Odredite kardinalnost skupa svih nizova prirodnih brojeva koji svaku vrijednost iz $\mathbb{N}$ poprimaju konačno mnogo puta.

5. [5 bodova] Neka je A skup, $a \in A$, R relacija na A i $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dokažite ili opovrgnite:
   (a) ako je R parcijalni uređaj, tada je R^n parcijalni uređaj;
   (b) ako je a minimalan s obzirom na R, tada je a minimalan s obzirom na R^n;

   kao i obrate tih tvrdnji.

   Napomena: ako tvrdnja (a) ne vrijedi, tvrdnju (b) ispitajte u slučaju kad su i R i R^n parcijalni uređaji na A.