Teorija skupova

Prvi kolokvij

25. studenoga 2020.

(1) (a) (1 bod) Definirajte dobro utemeljen skup. Postoji li parcijalno uređen skup x te $y \in x$ takvi da je x dobro utemeljen, a $x \setminus \{y\}$ (s restrikcijom uređaja na x) nije? Obrazložite svoj odgovor.
(b) (1 bod) Iskažite aksiom unije. Za skup $x = \{n \in \omega : (\exists m \in \omega)(n = 2 \cdot m)\}$, usporedite skupove $\bigcup x$ i $\bigcup \mathcal{P}(x)$ s obzirom na inkluziju.
(c) (1 bod) Iskažite Banachovu lemu. Navedite nužan i dovoljan uvjet pod kojim je $\emptyset$ primjer skupa iz zaključka leme.
(d) (1 bod) Navedite primjer beskonačno mnogo pravih klasa.
(e) (1 bod) Definirajte što znači da funkcija čuva strogi uređaj. Nađite bijekciju koja ne čuva strogi uređaj, ali njoj inverzna funkcija čuva strogi uređaj.
(f) (1 bod) Kratko objasnite kako se aksiom para može dokazati u ZF bez aksioma para.

(2) (4 boda) Dokažite da je Kartezijev produkt dvaju dobro utemeljenih skupova, uređen antileksikografski, ponovo dobro utemeljen.

(3) (4 boda) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ padajući niz skupova. Ispitajte odnos skupova

$$\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{P}(A_0 \triangle A_n) \quad \text{i} \quad \mathcal{P}(A_0) \triangle \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{P}(A_n).$$

Svoje tvrdnje argumentirajte dokazima, odnosno kontraprimjerima.

(4) (3 boda) Neka je A skup te $R : A \to A$. Dokažite ili opovrgnite:

ako je R tranzitivna relacija, onda vrijedi $R^2 = R$.

(5) (4 boda) Odredite kardinalnost skupa svih prebrojivih simetričnih relacija na $\mathbb{R}$.

(6) (4 boda) Na skupu $X = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ neprazan i konačan}\}$ definiramo relaciju $\prec$ s:

$$A \prec B \quad :\Longleftrightarrow (\forall a \in A)(\exists b \in B)(a < b),$$

pri čemu je $<$ standardni uređaj na $\mathbb{N}$.
(a) Dokažite da je $(X, \prec)$ parcijalno uređen skup.
(b) Dokažite da $(X, \prec)$ ima najmanji element te da u $(X, \prec)$ ne postoje maksimalni elementi.
(c) Dokažite ili opovrgnite: U $(X, \prec)$ svaki odozgo omeđen skup ima supremum.

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire!

Zadatke (1) i (2) možete rješavati na jednom papiru, a svaki od zadataka (3), (4), (5) i (6) morate na zasebnom!

Potpišite sve papire koje predajete!

Sretno!

Rezultati: *Srijeda, 2. 12. 2020., navečer na Merlinu.*