Teorija skupova

Prvi kolokvij, grupa A

22. studenoga 2019.

(1) (a) (1 bod) Napišite rekurzivnu definiciju uređene n–torke skupova.
(b) (1 bod) Definirajte pojam indeksirane familije skupova, te navedite primjer beskonačne familije skupova za koju ne postoji skup čiji presjek je sa svakim članom familije jednočlan skup.
(c) (1 bod) Za skup $x = \{\{\emptyset\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \emptyset\}$ odredite $\bigcup x$ i $\bigcap x$.
(d) (1 bod) Iskažite teorem o karakterizaciji beskonačnih skupova, te navedite 3 primjera skupova x takvih da je svaka injekcija $f : x \to x$ nužno i surjekcija.
(e) (1 bod) Iskažite shemu aksioma separacije, te navedite 3 primjera ZF–formula.
(f) (1 bod) Iskažite aksiom izbora.

(2) (4 boda) Neka je x skup i $F : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ funkcija koja ima svojstvo da za sve $y, z \subseteq x$ takve da je $y \subseteq z$ vrijedi $F(y) \subseteq F(z)$. Dokažite da postoji $x_0 \subseteq x$ tako da je $F(x_0) = x_0$, te za svaki $y \subseteq x$ za koji je $F(y) = y$ vrijedi $y \subseteq x_0$.

(3) (5 bodova) Neka je $(A_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ familija skupova. Ispitajte odnos skupova

$$\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq 1} A_{n+k} \quad \text{i} \quad \bigcap_{n > 1} \bigcup_{k \geq 1} A_{kn}.$$

Svoje tvrdnje argumentirajte dokazima, odnosno kontraprimjerima.

(4) (5 bodova) Neka je A neprazan skup. Na skupu $\{r \mid r \text{ je neprazna relacija na } A\}$ definiramo relaciju $\mathcal{R}$ na sljedeći način:

$$(q, r) \in \mathcal{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad q \cap r \text{ je tranzitivna relacija.}$$

Odredite relaciju $\mathcal{R}^T$.

(5) (5 bodova) Odredite kardinalnost skupa

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ za konačno mnogo } x \in \mathbb{R}\}.$$

(6) (5 bodova) Za parcijalno uređen skup $(S, <)$ kažemo da je *usmjeren prema gore* ako svaki dvočlani podskup od S ima gornju među u S. Dokažite da je konačan neprazan parcijalno uređen skup usmjeren prema gore ako i samo ako ima najveći element.

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire!

Zadatke (1) i (2) možete rješavati na jednom papiru, a svaki od zadataka (3), (4), (5) i (6) morate na zasebnom!

Potpišite sve papire koje predajete!

Sretno!

Teorija skupova

Prvi kolokvij, grupa B

22. studenoga 2019.

(1) (a) (1 bod) Definiraje pojmove konačnog i beskonačnog skupa.
   (b) (1 bod) Definirajte Kartezijev produkt proizvoljne indeksirane familije skupova.
   (c) (1 bod) Za proizvolje skupove A i B definirajte $k(A)^{k(B)}$, te napišite koliko je $\aleph_0^{\aleph_0}$ i $c^{\aleph_0}$.
   (d) (1 bod) Iskažite aksiom para, te odgovorite vrijedi li općenito $(A \times B) \cup C = (A \cup C) \times (B \times C)$.
   (e) (1 bod) Iskažite Cantorov osnovni teorem teorije skupova i objasnite oznaku $<$ koja se koristi u iskazu.
   (f) (1 bod) Iskažite Banachovu lemu.

(2) (4 boda) Neka je x skup i $F : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ funkcija koja ima svojstvo da za sve $y, z \subseteq x$ takve da je $y \subseteq z$ vrijedi $F(y) \subseteq F(z)$. Dokažite da postoji $x_0 \subseteq x$ tako da je $F(x_0) = x_0$, te za svaki $y \subseteq x$ za koji je $F(y) = y$ vrijedi $x_0 \subseteq y$.

(3) (5 bodova) Neka je $(A_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ familija skupova. Ispitajte odnos skupova

$$\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq 1} A_{n+k} \quad \text{i} \quad \bigcup_{n > 1} \bigcap_{k \geq 1} A_{kn}.$$

Svoje tvrdnje argumentirajte dokazima, odnosno kontraprimjerima.

(4) (5 bodova) Neka je A neprazan skup. Na skupu $\{r \mid r \text{ je neprazna relacija na } A\}$ definiramo relaciju $\mathcal{R}$ na sljedeći način:

$$(q, r) \in \mathcal{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad q \cap r \text{ je simetrična relacija.}$$

Odredite relaciju $\mathcal{R}^T$.

(5) (5 bodova) Odredite kardinalnost skupa

$$\{f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \mid f(x) \neq 0 \text{ za konačno mnogo } x \in \mathbb{Q}\}.$$

(6) (5 bodova) Za parcijalno uređen skup $(S, <)$ kažemo da je *usmjeren prema dolje* ako svaki dvočlani podskup od S ima donju među u S. Dokažite da je konačan neprazan parcijalno uređen skup usmjeren prema dolje ako i samo ako ima najmanji element.

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire!

Zadatke (1) i (2) možete rješavati na jednom papiru, a svaki od zadataka (3), (4), (5) i (6) morate na zasebnom!

Potpišite sve papire koje predajete!

Sretno!