Teorija skupova

Prvi kolokvij, grupa A

23. studenoga 2018.

(1) (a) (1 bod) Navedite aksiom partitivnog skupa.
   (b) (1 bod) Definirajte neprebrojiv skup i navedite tri primjera.
   (c) (1 bod) Definirajte Kartezijev produkt, te odredite broj elemenata skupa $V_4 \times V_2$ (Oznaka V_n odnosi se na razine kumulativne hijerarhije).
   (d) (1 bod) Iskažite Cantorov osnovni teorem. Objasnite oznaku $<$ koja se u iskazu koristi!
   (e) (1 bod) Objasnite oznaku $\bigcup A$, gdje je A skup.
   (f) (1 bod) Točno ili netočno (ne morate obrazlagati):
      (i) Za svaka dva različita skupa x i y vrijedi $x \in y$ ili $y \in x$.
      (ii) Ako je skup A neprebrojiv, tada je i $A \times B$ neprebrojiv za svaki B.
      (iii) ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$.

(2) (4 boda) Dokažite: Ako je A beskonačan a B prebrojiv skup, tada je $A \cup B \sim A$.

(3) (5 bodova) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova. Ispitajte odnos skupova

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \Delta A_{n+1}) \qquad \text{i} \qquad (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n})\Delta(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n+1}).$$

Argumentirajte svoje tvrdnje dokazima, odnosno kontraprimjerima.

(4) (5 bodova) Neka je A skup i R binarna relacija na A. Dokažite da je R simetrična i tranzitivna ako i samo ako je $R = R^{-1} \circ R$.

(5) (5 bodova) Kažemo da je $A \subseteq \mathbb{R}$ *kofinalan* ako za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji $y \in A$ takav da je $x \leq y$. Odredite kardinalnost skupa svih kofinalnih podskupova od $\mathbb{R}$.

(6) (5 bodova) Neka je A skup i R binarna relacija na A. Dokažite ili opovrgnite: relacija R je refleksivna ako i samo ako je $((A \times A) \setminus R)^T$ parcijalan uređaj na A. Navedite dokaze, odnosno kontraprimjere za obje implikacije.

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire!

Zadatke (1) i (2) možete rješavati na jednom papiru, a svaki od zadataka (3), (4), (5) i (6) morate na zasebnom!

Potpišite sve papire koje predajete!

Sretno!

Teorija skupova

Prvi kolokvij, grupa B

23. studenoga 2018.

(1) (a) (1 bod) Navedite aksiom unije.
  (b) (1 bod) Objasnite što znači $k(A) = n$, gdje je $n \in \mathbb{N}$.
  (c) (1 bod) Definirajte uređen par, te odredite broj elemenata skupa $(\emptyset, \emptyset)$.
  (d) (1 bod) Iskažite Knaster, Tarskijev teorem o fiksnoj točki.
  (e) (1 bod) Objasnite oznaku ${}^{B}A$, gdje su A i B skupovi.
  (f) (1 bod) Točno ili netočno (ne morate obrazlagati):
    (i) Za svaka dva različita skupa x i y vrijedi $x \nsubseteq y$ ili $y \nsubseteq x$.
    (ii) Skupovna razlika je asocijativna operacija.
    (iii) Skup $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ je prebrojiv. (V_n je n-ta razina kumulativne hijerarhije.)

(2) (4 boda) Dokažite: Ako je A beskonačan a B konačan skup, tada je $A \setminus B \sim A$.

(3) (5 bodova) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova. Ispitajte odnos skupova

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n \Delta A_{n+1}) \qquad \text{i} \qquad \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{2n}\Big) \Delta \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{2n+1}\Big).$$

Argumentirajte svoje tvrdnje dokazima, odnosno kontraprimjerima.

(4) (5 bodova) Neka je A skup i R binarna relacija na A. Dokažite da je R simetrična i tranzitivna ako i samo ako je $R = R \circ R^{-1}$.

(5) (5 bodova) Kažemo da je $A \subseteq \mathbb{R}$ *koinicijalan* ako za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji $y \in A$ takav da je $y \leq x$. Odredite kardinalnost skupa svih koinicijalnih podskupova od $\mathbb{R}$.

(6) (5 bodova) Neka je A skup i R binarna relacija na A. Dokažite ili opovrgnite: relacija R je antisimetrična ako i samo ako je $((A \times A) \setminus R)^T$ parcijalan uređaj na A. Navedite dokaze, odnosno kontraprimjere za obje implikacije.

Smijete koristiti samo pribor za pisanje i brisanje te prazne papire!

Zadatke (1) i (2) možete rješavati na jednom papiru, a svaki od zadataka (4), (5) i (6) morate na zasebnom!

Potpišite sve papire koje predajete!

Sretno!